



# 新世纪课程教材

Textbook Series of New Century

全国高等医药院校教材 • 供基础、预防、临床、口腔医学类专业用

# 医学物理学

第五版

主编

胡新珉



人民卫生出版社



# 新世纪课程教材

责任编辑 梁京 兰南 ● 封面设计 赵京津

ISBN 7-117-04245-1



9 787117 042451 >

定 价:32.00 元

新世纪课程教材  
全国高等医药院校教材  
供基础、预防、临床、口腔医学类专业用

# 医学物理学

第五版

主编 胡新珉  
编者 (以姓氏笔画为序)  
刘筑闻 (首都医科大学)  
吴明海 (山东大学)  
李宜贵 (四川大学)  
李晓春 (中南大学)  
杨继庆 (第四军医大学)  
杨海珉 (昆明医学院)  
胡新珉 (四川大学)  
曾仁端 (华中科技大学)  
潘志达 (大连医科大学)  
冀敏 (复旦大学)

秘书

张益珍 (四川大学)

人民卫生出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

医学物理学/胡新珉主编. —5版. —北京:  
人民卫生出版社, 2001  
ISBN 7-117-04245-1

I. 医… II. 胡… III. 医学物理学 IV. R312

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 044066 号

**医学物理学**  
**第五版**

主 编: 胡 新 珉  
出版发行: 人民卫生出版社(中继线 67616688)  
地 址: (100078)北京市丰台区方庄芳群园 3 区 3 号楼  
网 址: <http://www.pmph.com>  
E - mail: [pmph@pmph.com](mailto:pmph@pmph.com)  
印 刷: 北京通县永乐印刷厂  
经 销: 新华书店  
开 本: 850×1168 1/16 印张: 26.5  
字 数: 571 千字  
版 次: 1978 年 7 月第 1 版 2001 年 9 月第 5 版第 25 次印刷  
印 数: 656 598—716 597  
标准书号: ISBN 7-117-04245-1/R·4246  
定 价: 32.00 元

著作权所有, 请勿擅自用本书制作各类出版物, 违者必究

(凡属质量问题请与本社发行部联系退换)

# 全国高等医药院校五年制临床医学专业

## 第五轮教材修订说明

为适应我国高等医学教育改革和发展的需要,经卫生部临床医学专业教材评审委员会审议,卫生部教材办公室决定从1998年开始进行临床医学专业教材第五轮修订。在总结第四轮教材编写质量、使用情况的基础上,提出第五轮修订要面向21世纪,遵循培养目标,适用于本科五年制教学需要;突出教材三基(基础理论、基本知识和基本技能)、五性(思想性、科学性、先进性、启发性和适用性)的特点,注重教材的整体优化及编写的标准化、规范化。同时决定第五轮教材的修订分两批进行,第二批修订是由全国高等医药教材建设研究会和卫生部教材办公室共同组织的。全套教材共50种,第五轮修订40种,新增10种,并有26种是五、七年制共用教材。随着学科发展的需要,教材名称以及必修课与选修课的科目也有所调整。

## 五年制五轮教材目录

### 必修课教材

- |                  |         |                 |         |
|------------------|---------|-----------------|---------|
| △1. 《医用高等数学》第三版  | 主编 张逸群  | 15. 《病理生理学》第五版  | 主编 金惠铭  |
| △2. 《医学物理学》第五版   | 主编 胡新耿  | 16. 《药理学》第五版    | 主编 金有豫  |
| △3. 《基础化学》第五版    | 主编 魏祖期  | △17. 《医学心理学》第三版 | 主编 姜乾金  |
|                  | 副主编 祁嘉义 | △18. 《法医学》第三版   | 主编 王保捷  |
| △4. 《有机化学》第五版    | 主编 吕以仙  | 19. 《诊断学》第五版    | 主编 陈文彬  |
|                  | 副主编 陆阳  |                 | 副主编 王友赤 |
| △5. 《医学生物学》第五版   | 主编 左伋   | 20. 《医学影像学》第四版  | 主编 吴恩惠  |
| △6. 《系统解剖学》第五版   | 主编 柏树令  | 21. 《内科学》第五版    | 主编 叶任高  |
| 7. 《局部解剖学》第五版    | 主编 彭裕文  |                 | 副主编 陆再英 |
| 8. 《组织学与胚胎学》第五版  | 主编 邹仲之  | 22. 《外科学》第五版    | 主编 吴在德  |
| △9. 《生物化学》第五版    | 主编 周爱儒  |                 | 副主编 郑树  |
|                  | 副主编 查锡良 | 23. 《妇产科学》第五版   | 主编 乐杰   |
| 10. 《生理学》第五版     | 主编 姚泰   | 24. 《儿科学》第五版    | 主编 王慕逸  |
|                  | 副主编 乔健天 | 25. 《神经病学》第四版   | 主编 王维治  |
| 11. 《医学微生物学》第五版  | 主编 陆德源  |                 | 副主编 罗祖明 |
| △12. 《人体寄生虫学》第五版 | 主编 詹希美  | 26. 《精神病学》第四版   | 主编 郝伟   |
| △13. 《医学免疫学》第三版  | 主编 陈慰峰  | 27. 《传染病学》第五版   | 主编 彭文伟  |
| 14. 《病理学》第五版     | 主编 杨光华  | 28. 《眼科学》第五版    | 主编 惠延年  |

- |                 |                   |                   |                   |
|-----------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| 29. 《耳鼻咽喉科学》第五版 | 主编 田勇泉<br>副主编 孙爱华 | 34. 《卫生学》第五版      | 主编 仲来福<br>副主编 刘移民 |
| △30. 《口腔科学》第五版  | 主编 张志愿            | 35. 《预防医学》第三版     | 主编 叶莘莘            |
| △31. 《皮肤性病学》第五版 | 主编 张学军            | △36. 《中医学》第五版     | 主编 郑守曾            |
| △32. 《核医学》第五版   | 主编 李少林<br>副主编 张永学 | △37. 《计算机应用基础》第二版 | 主编 邹赛德<br>副主编 杨长兴 |
| 33. 《流行病学》第五版   | 主编 王建华            | △38. 《体育》第二版      | 主编 裴海泓            |

## 选修课教材

- |                |        |                |        |
|----------------|--------|----------------|--------|
| △39. 《细胞生物学》   | 主编 凌诒萍 | 45. 《临床流行病学》   | 主编 王家良 |
| △40. 《医学分子生物学》 | 主编 冯作化 | △46. 《康复医学》第二版 | 主编 南登崑 |
| △41. 《医学遗传学》   | 主编 陈竺  | △47. 《医学文献检索》  | 主编 方平  |
| 42. 《临床药理学》第二版 | 主编 徐叔云 | △48. 《卫生法》     | 主编 赵同刚 |
| 43. 《医学统计学》第三版 | 主编 马斌荣 | △49. 《医学导论》    | 主编 文历阳 |
| △44. 《医学伦理学》   | 主编 丘祥兴 | △50. 《全科医学概论》  | 主编 杨秉辉 |

注：画△者为五、七年制共用教材

## 全国高等医药院校临床医学专业 第四届教材评审委员会

主任委员 裘法祖

副主任委员 杨光华

### 委 员

(以姓氏笔画为序)

|          |     |          |     |
|----------|-----|----------|-----|
| 方 圻 (特邀) | 卢永德 | 乐 杰      | 许积德 |
| 朱元珩      | 朱学骏 | 乔健天      | 吴恩惠 |
| 陈文彬      | 陆美芳 | 武忠弼 (特邀) | 郑 树 |
| 周 申      | 周东海 | 金有豫      | 金惠铭 |
| 南 潮      | 钟世镇 | 谈一飞      | 彭文伟 |
| 董永绥      |     |          |     |

# 第五版 前 言

本书是以第四版规划教材《医用物理学》为基础，根据现代医学对物理学的基本需求，参考国内外有关教材，并结合我们的教学实践和教改经验，由九所院校共同编写的，并将书名改为《医学物理学》。

在本书编写中，我们的编写宗旨是：把教材的先进性、科学性、实用性结合在一起，有一个较完整的理论结构体系，突出基本的宏观理论和微观理论，重视反映现代物理科学新成就，注重适当联系生物医学实际，强化现代物理思想、概念和方法，并保持一定的物理学系统性。因此，本书内容丰富，具有现代化教材的特性，能为培养面向 21 世纪高素质的医学人才打下坚实的基础。

本书与第四版《医用物理学》教材相比较有以下特点：①内容广度有较大幅度的扩充，增加了狭义相对论和广义相对论、量子生物学基础、生物非线性动力学、生物物理遗传学和基本粒子等学科前沿内容。②内容深度有一定提升，特别是在与生物医学直接相联系的内容方面，如在流体运动部分增加了生物材料的粘弹性模型；电学部分介绍了心电导联、神经传导的电缆方程、生物阻抗及测定；光学部分增加液晶、特种显微镜；在量子力学部分介绍了扫描隧穿显微镜等。③教材结构分为两个板块，前 14 章基本内容为第一个板块，后 5 章专题内容为第二个板块。这种结构体例与国际教科文组织关于 21 世纪国际物理教育规划的教材模式是相一致的，使教材具有较大弹性，既保证了基本内容的介绍，又不失现代科学成就的介绍，可供不同教学时数的学校的教学需求。④强化现代物理思想、概念和方法，如在力学中强调三大时空平移性和三大守恒定律及现代时空观，还在相关部分分别介绍了对称性、统计性概念、统一性思想和对应原理等。这些内容是现代物理研究和自然科学研究的指导思想，对启迪学生创造思维、培养高科学素质人才有重要作用。⑤本书涉及的物理量和单位的名称、符号均按《中华人民共和国国家标准——量和单位》(GB3100 ~ 3102-93)进行了修订。

本书共 19 章，前 14 章为基本内容，供必修课讲授用；后 5 章为专题内容，供选修用。每章配有一定数量的例题、思考题和习题，习题附有答案，便于学生自学。教学参考时数为 72 ~ 108 学时。

本书适合高等医药院校五年制和七年制临床、基础、口腔、儿科、法医、医检、卫检、预防医学、护理等专业用，也可供医药院校其他专业、生命科学有关专业的师生和研究工作者作为参考。

本书的编写得到四川大学学校领导、教务处、基础医学院，大连医科大学领导以及各编者所在大学领导的极大关心和支持，在此表示衷心谢意。对热情支持本书编写

的国内外专家、教授及其他人员表示诚挚的谢意。

由于编者的水平有限，脱稿仓促，错误和不妥之处在所难免，恳请读者批评指正。

编 者

2001年6月



# 目 录

|                       |           |
|-----------------------|-----------|
| 绪论                    | 1         |
| <b>第一章 力学基本定律</b>     | <b>4</b>  |
| <b>第一节 质点的运动</b>      | <b>4</b>  |
| 一、位移 运动方程             | 4         |
| 二、速度 加速度              | 5         |
| <b>第二节 牛顿运动规律</b>     | <b>6</b>  |
| 一、牛顿运动定律              | 6         |
| 二、力学单位的国际单位制和量纲       | 7         |
| 三、惯性系和非惯性系            | 7         |
| <b>第三节 功和能 能量守恒定律</b> | <b>9</b>  |
| 一、功                   | 9         |
| 二、动能 势能               | 10        |
| 三、功能原理 时间平移对称性与能量守恒定律 | 11        |
| <b>第四节 动量 动量守恒定律</b>  | <b>12</b> |
| 一、冲量与动量               | 12        |
| 二、空间平移对称性与动量守恒定律      | 13        |
| <b>第五节 刚体的转动</b>      | <b>14</b> |
| 一、刚体的定轴转动             | 14        |
| 二、转动定律                | 16        |
| 三、角动量 空间旋转对称性与角动量守恒定律 | 16        |
| 四、旋进                  | 18        |
| <b>第六节 应力和应变</b>      | <b>18</b> |
| 一、应力                  | 19        |
| 二、应变                  | 19        |
| <b>第七节 弹性模量</b>       | <b>20</b> |
| 一、弹性和塑性               | 20        |
| 二、弹性模量                | 20        |
| <b>第八节 骨与肌肉的力学特性</b>  | <b>21</b> |
| 一、骨骼的力学性质             | 21        |
| 二、肌肉的力学特性             | 24        |

|                               |    |
|-------------------------------|----|
| 思考题与习题一 .....                 | 26 |
| <b>第二章 流体的运动</b> .....        | 28 |
| <b>第一节 理想流体 稳定流动</b> .....    | 28 |
| 一、理想流体 .....                  | 28 |
| 二、稳定流动 .....                  | 29 |
| 三、连续性方程 .....                 | 29 |
| <b>第二节 伯努利方程</b> .....        | 30 |
| 一、伯努利方程 .....                 | 30 |
| 二、伯努利方程的应用 .....              | 32 |
| <b>第三节 粘性流体的流动</b> .....      | 34 |
| 一、层流和湍流 .....                 | 34 |
| 二、牛顿粘滞定律 .....                | 35 |
| 三、雷诺数 .....                   | 36 |
| <b>第四节 粘性流体的运动规律</b> .....    | 37 |
| 一、粘性流体的伯努利方程 .....            | 37 |
| 二、泊肃叶定律 .....                 | 37 |
| 三、斯托克司定律 .....                | 39 |
| <b>第五节 生物材料的粘弹性</b> .....     | 40 |
| 一、生物材料的结构特点 .....             | 40 |
| 二、生物材料的粘弹性 .....              | 40 |
| 三、粘弹性材料的力学模型 .....            | 42 |
| <b>第六节 血液在循环系统中的流动</b> .....  | 43 |
| 一、心脏做功 .....                  | 43 |
| 二、血流速度分布 .....                | 44 |
| 三、血流过程中的血压分布 .....            | 45 |
| 思考题与习题二 .....                 | 46 |
| <b>第三章 振动、波动和声波</b> .....     | 47 |
| <b>第一节 简谐振动</b> .....         | 47 |
| 一、简谐振动方程 .....                | 47 |
| 二、简谐振动的特征量 .....              | 48 |
| 三、简谐振动的矢量图示法 .....            | 48 |
| 四、简谐振动的能量 .....               | 49 |
| <b>第二节 阻尼振动、受迫振动和共振</b> ..... | 49 |
| 一、阻尼振动 .....                  | 49 |
| 二、受迫振动 .....                  | 50 |
| 三、共振 .....                    | 50 |

|                              |    |
|------------------------------|----|
| <b>第三节 简谐振动的合成</b> .....     | 51 |
| 一、两个同方向、同频率简谐振动的合成 .....     | 51 |
| 二、同方向、不同频率的简谐振动的合成 .....     | 52 |
| 三、振动谱 .....                  | 52 |
| 四、两个同频率、互相垂直的简谐振动的合成 .....   | 53 |
| <b>第四节 机械波</b> .....         | 54 |
| 一、机械波的产生 .....               | 54 |
| 二、波面和波线 .....                | 54 |
| 三、波速、波长、波的周期和频率 .....        | 55 |
| <b>第五节 波动方程</b> .....        | 55 |
| <b>第六节 波的能量</b> .....        | 57 |
| 一、波的能量 .....                 | 57 |
| 二、波的强度 .....                 | 57 |
| 三、波的衰减 .....                 | 58 |
| <b>第七节 惠更斯原理</b> .....       | 58 |
| 一、惠更斯原理 .....                | 58 |
| 二、解释波的衍射 .....               | 58 |
| <b>第八节 波的干涉</b> .....        | 59 |
| 一、波的叠加原理 .....               | 59 |
| 二、波的干涉 .....                 | 59 |
| 三、调幅波 .....                  | 60 |
| 四、驻波 .....                   | 61 |
| <b>第九节 声波</b> .....          | 63 |
| 一、声压和声强 .....                | 63 |
| 二、听觉域 .....                  | 64 |
| 三、声强级和响度级 .....              | 65 |
| <b>第十节 多普勒效应</b> .....       | 65 |
| <b>第十一节 超声波及其医学应用</b> .....  | 67 |
| 一、超声波的特性 .....               | 67 |
| 二、超声波的产生与探测 .....            | 68 |
| 三、超声波在医学中的应用 .....           | 68 |
| <b>思考题与习题三</b> .....         | 71 |
| <br>                         |    |
| <b>第四章 狭义相对论和广义相对论</b> ..... | 73 |
| <b>第一节 伽利略变换</b> .....       | 73 |
| 一、经典力学的绝对时空观和相对性原理 .....     | 73 |
| 二、伽利略变换 .....                | 74 |
| <b>第二节 洛伦兹变换</b> .....       | 75 |

|                                  |     |
|----------------------------------|-----|
| 一、迈克耳孙-莫雷实验 .....                | 75  |
| 二、狭义相对论的基本假设 .....               | 75  |
| 三、洛伦兹变换 .....                    | 76  |
| <b>第三节 狭义相对论的时空观</b> .....       | 77  |
| 一、时间膨胀 .....                     | 77  |
| 二、洛伦兹收缩 .....                    | 78  |
| 三、同时性的相对性 .....                  | 79  |
| 四、因果率和信号速度 .....                 | 79  |
| 五、光多普勒效应 .....                   | 79  |
| 六、退行红移和膨胀宇宙 .....                | 80  |
| <b>第四节 相对论动力学</b> .....          | 80  |
| 一、动量和质量 .....                    | 81  |
| 二、力和动能 .....                     | 81  |
| 三、质能关系 .....                     | 82  |
| 四、能量和动量的关系 .....                 | 83  |
| <b>第五节 广义相对论简介</b> .....         | 84  |
| 一、等效原理 .....                     | 84  |
| 二、广义相对性原理 .....                  | 85  |
| 三、引力场的时空特性 .....                 | 85  |
| 四、引力坍缩与黑洞 .....                  | 87  |
| 五、引力波 .....                      | 87  |
| <b>思考题与习题四</b> .....             | 87  |
| <br>                             |     |
| <b>第五章 分子动理论</b> .....           | 89  |
| <b>第一节 物质的微观结构</b> .....         | 89  |
| <b>第二节 理想气体分子动理论</b> .....       | 90  |
| 一、理想气体状态方程 .....                 | 90  |
| 二、理想气体微观模型 .....                 | 91  |
| 三、理想气体的压强公式 .....                | 91  |
| 四、理想气体的能量公式 .....                | 92  |
| 五、理想气体定律的推导 .....                | 93  |
| <b>第三节 气体分子速率分布律和能量分布律</b> ..... | 94  |
| 一、麦克斯韦速率分布定律 .....               | 94  |
| 二、平均自由程和平均碰撞频率 .....             | 96  |
| 三、玻耳兹曼能量分布定律 .....               | 98  |
| <b>第四节 输运过程</b> .....            | 98  |
| 一、热传导 .....                      | 99  |
| 二、扩散 .....                       | 100 |

|                             |     |
|-----------------------------|-----|
| 三、透膜运输 .....                | 100 |
| <b>第五节 液体的表面现象</b> .....    | 102 |
| 一、表面张力和表面能 .....            | 102 |
| 二、曲面下的附加压强 .....            | 104 |
| 三、毛细现象和气体栓塞 .....           | 105 |
| 四、表面活性物质与表面吸附 .....         | 107 |
| <b>思考题与习题五</b> .....        | 108 |
| <br>                        |     |
| <b>第六章 热力学基础</b> .....      | 109 |
| <b>第一节 热力学的一些基本概念</b> ..... | 109 |
| 一、热力学系统 .....               | 109 |
| 二、准静态过程 .....               | 109 |
| <b>第二节 热力学第一定律</b> .....    | 110 |
| 一、功、热量、内能 .....             | 110 |
| 二、热力学第一定律 .....             | 111 |
| <b>第三节 热力学第一定律的应用</b> ..... | 112 |
| 一、定容过程 .....                | 112 |
| 二、定压过程 .....                | 112 |
| 三、等温过程 .....                | 114 |
| 四、绝热过程 .....                | 114 |
| 五、人体的能量交换 .....             | 115 |
| <b>第四节 循环过程 卡诺循环</b> .....  | 117 |
| 一、循环过程和热机效率 .....           | 117 |
| 二、卡诺循环及其效率 .....            | 119 |
| <b>第五节 热力学第二定律</b> .....    | 120 |
| 一、热力学第二定律 .....             | 120 |
| 二、可逆过程和不可逆过程 .....          | 121 |
| 三、热力学第二定律的统计意义 .....        | 121 |
| 四、卡诺定理 .....                | 123 |
| <b>第六节 熵和熵增加原理</b> .....    | 123 |
| 一、克劳修斯等式 .....              | 123 |
| 二、熵 .....                   | 124 |
| 三、熵增加原理与能量退降 .....          | 125 |
| <b>思考题与习题六</b> .....        | 127 |
| <br>                        |     |
| <b>第七章 静电场</b> .....        | 129 |
| <b>第一节 电场 电场强度</b> .....    | 129 |
| 一、电荷 库仑定律 .....             | 129 |

|                        |     |
|------------------------|-----|
| 二、电场与电场强度 .....        | 130 |
| 三、场强叠加原理 .....         | 130 |
| 四、电场强度的计算 .....        | 131 |
| 第二节 高斯定理 .....         | 132 |
| 一、电场线和电通量 .....        | 132 |
| 二、高斯定理 .....           | 133 |
| 三、高斯定理的应用举例 .....      | 134 |
| 第三节 电势 .....           | 135 |
| 一、静电场力所作的功 .....       | 135 |
| 二、静电场的环路定理 .....       | 136 |
| 三、电势 .....             | 136 |
| 四、电势叠加原理 .....         | 137 |
| 五、电场强度与电势的关系 .....     | 139 |
| 第四节 电偶极子 电偶层 .....     | 140 |
| 一、电偶极子电场的电势 .....      | 140 |
| 二、电偶层 .....            | 141 |
| 第五节 静电场中的电介质 .....     | 142 |
| 一、电介质的极化 .....         | 142 |
| 二、电介质中的静电场 .....       | 143 |
| 三、电位移 有电介质时的高斯定理 ..... | 145 |
| 四、电容器及其电容 .....        | 146 |
| 五、静电场的能量 .....         | 146 |
| 第六节 心电知识 .....         | 148 |
| 一、心电场 .....            | 148 |
| 二、心电图 .....            | 150 |
| 三、心电图导联 .....          | 150 |
| 思考题与习题七 .....          | 151 |
| <br>                   |     |
| 第八章 直流电 .....          | 154 |
| 第一节 电流密度 .....         | 154 |
| 一、电流和电流密度 .....        | 154 |
| 二、金属与电解质的导电性 .....     | 155 |
| 三、欧姆定律的微分形式 .....      | 156 |
| 第二节 基尔霍夫定律 .....       | 157 |
| 一、基尔霍夫第一定律 .....       | 157 |
| 二、基尔霍夫第二定律 .....       | 158 |
| 第三节 电容器的充电和放电 .....    | 159 |
| 一、RC 电路的充电过程 .....     | 160 |

|                 |            |
|-----------------|------------|
| 二、RC 电路的放电过程    | 161        |
| 第四节 生物膜电位       | 162        |
| 一、能斯特方程         | 162        |
| 二、静息电位          | 163        |
| 三、神经纤维的电缆方程     | 165        |
| 四、动作电位          | 167        |
| 思考题与习题八         | 167        |
| <b>第九章 电磁现象</b> | <b>169</b> |
| 第一节 磁场 磁感应强度    | 169        |
| 一、磁感应强度         | 169        |
| 二、磁通量 磁场中的高斯定理  | 170        |
| 第二节 电流的磁场       | 171        |
| 一、毕奥-萨伐尔定律      | 171        |
| 二、安培环路定律        | 174        |
| 第三节 场磁对电流的作用    | 175        |
| 一、磁场对运动电荷的作用    | 175        |
| 二、磁场对载流导线的作用    | 176        |
| 三、载流线圈所受磁力矩     | 176        |
| 四、霍尔效应          | 178        |
| 五、质谱仪和回旋加速器     | 178        |
| 六、电磁泵和电磁船       | 180        |
| 七、磁带与磁头         | 180        |
| 八、生物医学电磁传感器     | 181        |
| 第四节 磁介质         | 181        |
| 一、介质中的磁场        | 182        |
| 二、顺磁质、抗磁质和铁磁质   | 183        |
| 三、超导体及其磁学特性     | 183        |
| 第五节 磁场的生物效应     | 185        |
| 一、生物磁现象         | 185        |
| 二、磁场的生物效应       | 186        |
| 三、生物磁场的测定       | 187        |
| 第六节 电磁感应定律      | 188        |
| 一、电磁感应定律        | 188        |
| 二、动生电动势         | 189        |
| 三、感生电动势 涡旋电场    | 190        |
| 第七节 生物电阻抗       | 191        |
| 一、生物体的交流等效电路    | 191        |

|                    |     |
|--------------------|-----|
| 二、机体阻抗测量 .....     | 193 |
| 三、阻抗图与阻抗微分图 .....  | 193 |
| 第八节 电磁振荡和电磁波 ..... | 195 |
| 一、位移电流 .....       | 195 |
| 二、麦克斯韦方程组 .....    | 196 |
| 三、电磁振荡 .....       | 197 |
| 四、电磁波和电磁波谱 .....   | 198 |
| 五、电磁场对生物体的作用 ..... | 199 |
| 思考题与习题九 .....      | 200 |
| <br>               |     |
| 第十章 波动光学 .....     | 202 |
| 第一节 光的干涉 .....     | 202 |
| 一、光的相干性 .....      | 202 |
| 二、光程和光程差 .....     | 203 |
| 三、杨氏双缝实验 .....     | 204 |
| 四、洛埃镜实验 .....      | 206 |
| 五、薄膜干涉 .....       | 206 |
| 六、等厚干涉 .....       | 207 |
| 七、迈克耳孙干涉仪 .....    | 209 |
| 第二节 光的衍射 .....     | 210 |
| 一、单缝衍射 .....       | 210 |
| 二、圆孔衍射 .....       | 213 |
| 三、光栅衍射 .....       | 213 |
| 第三节 光的偏振 .....     | 214 |
| 一、自然光和偏振光 .....    | 214 |
| 二、马吕斯定律 .....      | 215 |
| 三、布儒斯特定律 .....     | 216 |
| 四、光的双折射 .....      | 217 |
| 五、二向色性和偏振片 .....   | 219 |
| 第四节 偏振光的干涉 .....   | 220 |
| 第五节 偏振光的应用 .....   | 221 |
| 一、光弹效应 .....       | 221 |
| 二、克尔效应 .....       | 222 |
| 三、物质的旋光性 .....     | 223 |
| 第六节 液晶的光学特性 .....  | 224 |
| 一、液晶的分类和结构 .....   | 224 |
| 二、液晶的双折射现象 .....   | 225 |
| 三、胆甾相液晶的选择反射 ..... | 225 |



|                                |            |
|--------------------------------|------------|
| 四、液晶的电光效应 .....                | 225        |
| 思考题与习题十 .....                  | 226        |
| <b>第十一章 几何光学 .....</b>         | <b>228</b> |
| <b>第一节 球面折射 .....</b>          | <b>228</b> |
| 一、单球面折射 .....                  | 228        |
| 二、共轴球面系统 .....                 | 231        |
| <b>第二节 透镜 .....</b>            | <b>231</b> |
| 一、薄透镜公式 .....                  | 232        |
| 二、薄透镜组合 .....                  | 232        |
| 三、厚透镜 .....                    | 234        |
| 四、柱面透镜 .....                   | 235        |
| 五、透镜的像差 .....                  | 236        |
| <b>第三节 眼睛 .....</b>            | <b>237</b> |
| 一、眼的光学结构 .....                 | 237        |
| 二、眼的调节 .....                   | 238        |
| 三、眼的分辨本领 .....                 | 239        |
| 四、眼的屈光不正及其矫正 .....             | 239        |
| <b>第四节 几种医用光学仪器 .....</b>      | <b>241</b> |
| 一、放大镜 .....                    | 241        |
| 二、光学显微镜 .....                  | 242        |
| 三、纤镜 .....                     | 246        |
| 四、特殊显微镜 .....                  | 247        |
| 思考题与习题十一 .....                 | 252        |
| <b>第十二章 量子力学基础 .....</b>       | <b>254</b> |
| <b>第一节 黑体辐射 .....</b>          | <b>254</b> |
| 一、黑体辐射 .....                   | 254        |
| 二、普朗克量子假设 .....                | 256        |
| <b>第二节 光电效应 .....</b>          | <b>257</b> |
| 一、光电效应 .....                   | 257        |
| 二、爱因斯坦光子假设 .....               | 258        |
| <b>第三节 康普顿效应 .....</b>         | <b>259</b> |
| 一、康普顿效应 .....                  | 259        |
| 二、康普顿效应的解释 .....               | 260        |
| <b>第四节 线状谱 原子中的能量量子化 .....</b> | <b>261</b> |
| 一、氢原子光谱 .....                  | 261        |
| 二、玻尔理论 .....                   | 262        |

|                                |            |
|--------------------------------|------------|
| 第五节 物质的波动性质 .....              | 264        |
| 一、德布罗意假设 .....                 | 264        |
| 二、电子衍射 .....                   | 265        |
| 三、不确定关系 .....                  | 266        |
| 第六节 薛定谔方程 .....                | 267        |
| 一、波函数 .....                    | 267        |
| 二、薛定谔方程 .....                  | 267        |
| 三、一维无限深势阱 .....                | 268        |
| 四、势垒 隧道效应 .....                | 270        |
| 第七节 量子力学的原子结构概念 .....          | 273        |
| 一、四个量子数 .....                  | 273        |
| 二、多电子原子 .....                  | 274        |
| 第八节 原子光谱与分子光谱 .....            | 275        |
| 一、原子光谱 .....                   | 275        |
| 二、分子光谱 .....                   | 276        |
| 思考题与习题十二 .....                 | 279        |
| <br>                           |            |
| <b>第十三章 X 射线</b> .....         | <b>281</b> |
| <b>第一节 X 射线的产生</b> .....       | <b>281</b> |
| 一、X 射线的产生装置 .....              | 281        |
| 二、X 射线的强度和硬度 .....             | 283        |
| <b>第二节 X 射线谱</b> .....         | <b>284</b> |
| 一、连续 X 射线谱 .....               | 284        |
| 二、标识 X 射线谱 .....               | 285        |
| <b>第三节 X 射线的基本性质</b> .....     | <b>286</b> |
| 一、X 射线的一般性质 .....              | 286        |
| 二、X 射线的衍射 .....                | 287        |
| <b>第四节 物质对 X 射线的衰减规律</b> ..... | <b>288</b> |
| 一、单色 X 射线的衰减规律 .....           | 288        |
| 二、衰减系数与波长、原子序数的关系 .....        | 289        |
| <b>第五节 X 射线的医学应用</b> .....     | <b>290</b> |
| 一、治疗 .....                     | 290        |
| 二、诊断 .....                     | 290        |
| 三、X-CT .....                   | 291        |
| 思考题与习题十三 .....                 | 297        |
| <br>                           |            |
| <b>第十四章 原子核和放射性</b> .....      | <b>299</b> |
| <b>第一节 原子核的基本性质</b> .....      | <b>299</b> |

|                          |     |
|--------------------------|-----|
| 一、原子核的组成 .....           | 299 |
| 二、原子核的性质 .....           | 300 |
| 三、原子核的结合能及质量亏损 .....     | 300 |
| 第二节 原子核的衰变类型 .....       | 302 |
| 一、 $\alpha$ 衰变 .....     | 303 |
| 二、 $\beta$ 衰变 .....      | 303 |
| 三、 $\gamma$ 衰变和内转换 ..... | 304 |
| 第三节 原子核的衰变规律 .....       | 305 |
| 一、衰变规律 .....             | 305 |
| 二、半衰期 .....              | 305 |
| 三、放射性活度 .....            | 307 |
| 四、放射性平衡 .....            | 308 |
| 第四节 射线与物质的相互作用 .....     | 309 |
| 一、带电粒子与物质的相互作用 .....     | 309 |
| 二、光子与物质的相互作用 .....       | 310 |
| 三、中子与物质的相互作用 .....       | 311 |
| 第五节 辐射剂量与防护及测量原理 .....   | 311 |
| 一、辐射剂量及其单位 .....         | 311 |
| 二、辐射防护 .....             | 313 |
| 三、射线的测量原理 .....          | 313 |
| 第六节 放射性核素在医学上的应用 .....   | 316 |
| 一、示踪的原理 .....            | 316 |
| 二、放射诊断 .....             | 316 |
| 三、放射治疗 .....             | 320 |
| 第七节 基本粒子简介 .....         | 320 |
| 一、粒子的基本性质 .....          | 321 |
| 二、粒子的相互作用 .....          | 321 |
| 三、粒子的分类 .....            | 321 |
| 思考题与习题十四 .....           | 323 |
| <br>                     |     |
| 第十五章 量子生物学基础 .....       | 325 |
| 第一节 量子生物学的基本方法 .....     | 325 |
| 一、分子轨道法 .....            | 325 |
| 二、能量指数与结构指数 .....        | 327 |
| 第二节 量子生物学的主要研究内容 .....   | 328 |
| 一、核酸的结构和功能 .....         | 328 |
| 二、蛋白质的结构和功能 .....        | 329 |
| 三、酶的催化作用机制 .....         | 330 |

|                               |            |
|-------------------------------|------------|
| 四、遗传突变和化学致癌 .....             | 331        |
| 五、量子药理学问题 .....               | 333        |
| 六、金属离子在生物系统中的作用 .....         | 334        |
| 思考题与习题十五 .....                | 335        |
| <b>第十六章 生物物理遗传学简介 .....</b>   | <b>336</b> |
| <b>第一节 理论生物物理遗传学 .....</b>    | <b>336</b> |
| 一、信息论在孟德尔定律中的应用 .....         | 336        |
| 二、DNA 分子一级结构线性排列顺序 .....      | 337        |
| 三、遗传密码的概率和信息量 .....           | 338        |
| 四、基因调控 .....                  | 338        |
| 五、遗传进化与负熵 .....               | 339        |
| <b>第二节 亚分子遗传学和量子遗传学 .....</b> | <b>340</b> |
| 一、遗传物质的生物能力学特征 .....          | 340        |
| 二、遗传物质中电子激发能的转移方式 .....       | 343        |
| 思考题与习题十六 .....                | 345        |
| <b>第十七章 激光及其医学应用 .....</b>    | <b>346</b> |
| <b>第一节 激光的基本原理 .....</b>      | <b>346</b> |
| 一、粒子的能级与辐射跃迁 .....            | 346        |
| 二、粒子数按能级的分布 .....             | 347        |
| 三、光学谐振腔 .....                 | 348        |
| 四、激光器与激光 .....                | 349        |
| <b>第二节 激光的特性 .....</b>        | <b>350</b> |
| 一、方向性好 .....                  | 351        |
| 二、亮度高、强度大 .....               | 351        |
| 三、单色性好 .....                  | 351        |
| 四、相干性好 .....                  | 352        |
| 五、偏振性好 .....                  | 352        |
| <b>第三节 激光的医学应用 .....</b>      | <b>352</b> |
| 一、激光的生物作用 .....               | 353        |
| 二、激光在基础医学研究中的应用 .....         | 355        |
| 三、激光的临床应用 .....               | 357        |
| 四、医用激光器 .....                 | 358        |
| 五、激光的安全防护 .....               | 359        |
| 思考题与习题十七 .....                | 359        |
| <b>第十八章 磁共振成像 .....</b>       | <b>360</b> |

|  |            |
|--|------------|
| 第一节 磁共振的基本概念 .....                                 | 360        |
| 一、原子核的磁矩 .....                                     | 360        |
| 二、磁矩在磁场中的运动 .....                                  | 361        |
| 三、磁共振现象 .....                                      | 362        |
| 四、弛豫过程和弛豫时间 .....                                  | 363        |
| 第二节 磁共振成像原理 .....                                  | 365        |
| 一、磁共振成像的基本方法 .....                                 | 365        |
| 二、人体的磁共振成像 .....                                   | 367        |
| 三、如何产生氢核密度 $\rho$ 和 $T_1$ 、 $T_2$ 加权图像 .....       | 368        |
| 第三节 磁共振成像临床诊断的物理学依据 .....                          | 370        |
| 一、氢核密度 $\rho$ 、 $T_1$ 和 $T_2$ 的对比度 .....           | 370        |
| 二、氢核密度 $\rho$ 、 $T_1$ 、 $T_2$ 三种图像进行诊断的物理学依据 ..... | 371        |
| 第四节 磁共振成像系统 .....                                  | 372        |
| 一、磁场系统 .....                                       | 372        |
| 二、射频系统 .....                                       | 372        |
| 三、图像重建系统 .....                                     | 373        |
| 第五节 磁共振成像的现状与发展前景 .....                            | 373        |
| 思考题与习题十八 .....                                     | 374        |
| <br>   |            |
| <b>第十九章 生物非线性动力学简介 .....</b>                       | <b>375</b> |
| <b>第一节 运动及其相空间描述 .....</b>                         | <b>376</b> |
| 一、相空间 .....  | 376        |
| 二、吸引子 .....  | 379        |
| <b>第二节 混沌运动 .....</b>                              | <b>380</b> |
| 一、混沌运动 .....                                       | 380        |
| 二、奇异吸引子 .....                                      | 383        |
| <b>第三节 分形与分维 .....</b>                             | <b>383</b> |
| 一、自相似性 .....                                       | 384        |
| 二、分数维 .....  | 385        |
| 思考题与习题十九 .....                                     | 386        |
| <b>参考文献 .....</b>                                  | <b>388</b> |
| <b>索引 .....</b>                                    | <b>389</b> |

# 绪 论

## 一、物理学的研究对象

物理学和其他自然科学一样，是以认识物质的基本属性、研究物质运动规律为研究目的的。我们周围的所有的客观实在都是物质，一切物质(包括实物和场)都在永恒不息地运动着，宇宙一切自然现象都是物质运动的表现。这里所指的运动是广义的，它包括机械运动、变化、生长、相互作用等过程。物质运动的形式是极其多样的，各种形式的物质运动之间，相互依存而又本质上相互区别。它们既服从普遍规律，又有自己独特的规律，自然科学的分类就是根据其所研究对象的不同而区分的。

在所有自然科学中，物理学所研究的物质运动形式，具有最基本和最普遍的性质。具体地说，物理学所研究的运动包括：机械运动、分子热运动、电磁运动、原子内部运动、场和实物的相互作用等。物理学所研究的运动形式，普遍存在于其他高级的、复杂的物质运动形式之中。因此，物理学所研究的规律，具有最基本、最普遍的意义，使得物理学知识成为研究其他自然科学所不可缺少的基础。在自然科学尚未分类的古代，物理学几乎就是全部自然科学。随着科学的发展，出现许多自然科学分支，并陆续独立成为一门学科。由于近代科学的迅速发展和相互渗透，出现了许多和物理学直接有关的“边缘学科”，如化学物理学、物理化学、生物物理学、天体物理学、生物物理化学、生物医学工程学等。医学物理学是物理学的重要分支学科，它是现代物理学与医学相结合所形成交叉学科，物理学上的每一次重大发现都极大地推动了其他自然科学的发展，促进科学技术和生产技术发生根本性的变革。由于物理学所研究的规律具有很大的普遍性，它与哲学的关系也十分密切，物理学中许多重大发现，例如，相对论、物质波粒二象性、基本粒子的相互转化、场和实物间相互作用等，为哲学提供了有力的证据。

## 二、物理学与生命科学的关系

医学是以人体为研究对象的生命科学，生命现象属于物质的高级运动形式。随着现代物理学的迅速发展，人类对生命现象的认识的逐步深入，生命科学和医学已从宏观形态的研究进入微观机制的研究，从细胞水平的研究上升到分子水平的研究，并日益将其理论建立在精确的物理学基础之上。任何生命过程都是和物理过程密切相联系的。揭示生命现象的本质，诸如能量的交换、信息的传递、体内控制和调节、疾病发生机制、物理因素对机体的作用等，都必须应用物理学规律。大量事实表明，物理学在生物医学领域中的应用日益广泛和深入。生物物理学的迅速发展，正在对阐明生命

现象的本质不断作出新的贡献。

另一方面，物理学所提供的技术和方法已日益广泛应用于生命科学、医学研究及临床医疗实践之中，并且不断更新。例如，光学显微镜、X线透视和照片、放射性核素等在医学上的应用已是人们早已熟知的。而现代电子显微镜与光学显微镜相比，分辨率提高了近千倍，成为研究细胞内部超微结构的重要工具，计算机X射线断层摄影术(X-CT)与通常X线诊断相比，其灵敏度提高了百倍，磁共振成像(NMR-CT或MRI)技术既能显示解剖学图像，又能显示反映功能和代谢过程与生化信息的图像，为医学提供了一种崭新的诊断技术。各种光纤内镜取代了刚性导管内镜，提高了疾病的诊断率，减轻了病人的痛苦。物理治疗除常见的热疗、电疗、光疗、放疗、超声治疗等方法外，还应用低温冷冻、微波、激光等手段。电子计算机不仅应用于研究人体生理和病理过程中的各种控制调节，而且用于辅助诊断、自动监护和医院管理。在研究生物大分子本身的结构、构象、能量状态及其变化，以及这些状态和变化与功能之间的关系方面，除应用了物理学中的量子力学方法外，还普遍应用了物理学中的各种光谱和波谱技术等，如电子自旋共振谱、磁共振谱、激光拉曼、圆二色术、旋光色散、红外光谱、荧光偏振、X衍射、光散射以及激光全息等物理技术。

物理学在理论上和技术上的新成就不断为生命科学和医学的发展提供理论基础和技术方法。反过来，生命科学和医学的发展，又不断地向物理学提供新的研究课题，二者互相促进、相辅相成。总之，物理学与生命科学的关系可归结为两个主要方面：①物理学知识是揭示生命现象不可缺少的基础。②物理学所提供的技术和方法为生命科学的研究、临床实践开辟了许多新的途径。

在高等医学院校里开设的医学物理学课是一门重要的必不可少的必修课，它的主要任务是给医学生提供系统的物理学知识，使他们在中学物理学的基础上，进一步掌握物理学的基本概念、基本规律、研究方法，扩大物理学知识的领域，为学习现代医学准备必要的物理基础。物理学作为严格的定量的自然科学的带头学科，一直在科学技术发展中发挥极其重要的作用。物理学的发展对人类生产力的提高起到了极大的推动作用，过去是如此，现在是如此，展望未来也是如此。

### 三、物理学的研究方法及其科学思维

大学物理是在比中学物理学较高的层次上介绍物理学内容和进行物理学实验，因而有可能更好地体现物理学的研究方法。而对物理学及其科学思维和研究方法的了解，不仅有助于学生对物理学和其他学科的学习，使之具备高级医学卫生人才所应有的理科素质，而且有助于启迪学生思维。各门科学，包括物理学在内，其基本任务是认识物质属性，研究物质运动规律，其研究方法都是遵循“实践-理论-实践”的认识法则。具体地说，物理学的研究方法包括观察、实验、假说和理论各个环节。观察和实验所获得的大量资料是理论的依据。理论是从几条基本原理出发，说明一定范围内的各种物理现象，并且还能在一定程度上预言未知现象的存在，指导进一步的实践。

科学理论具有三个显著的特征：系统化、自我运动的能力和趋向普遍性。理论建立后将继受到实践的考验，如果发现新的实验事实与理论有矛盾，就将使理论得到

修正和发展，甚至推翻原有的理论，而建立更能反映客观实际的新理论。

物理学研究方法及其相应的方法论原理包括：解释原理、简单性原理、物理世界图像统一原理、数学模型化、守恒原理、对称原理、对应原理、互补原理、可观察性原理以及基元性原理等。物理学知识的高度系统化，运用数学的日益增长程度，对人们世界观影响的深度和它的非常广泛的实际应用——表征物理学的这一切特征使得物理学处于现代科学知识的领先地位。现代物理学是自然科学的主要部门，在现代自然科学知识体系中，物理学继续形成着科学思维的风格，提供科学思维的准则。这就是为什么需要对物理学研究方法及其科学思维予以特别重视的原因。

物理学研究方法是开发智力和提高能力的途径。物理学思想能启迪学生创新思维，是培养创造型人才火种。

(胡新珉)



# 第一章 力学基本定律

学习本章后，你应：

1. 掌握对运动的描述方法，位移、速度、加速度、角速度、角加速度的概念。
2. 掌握牛顿运动定律、转动定律。理解惯性系和非惯性系，理解力学单位制及量纲。
3. 理解力、动量、能量、功、转动惯量等重要基本概念，掌握动量守恒、能量守恒、角动量守恒定律。了解对称性的概念以及对称性守恒定律的关系。
4. 了解应力与应变的关系以及生物组织的力学特性。

力学研究的是物体机械运动规律。物体机械运动是指它的位置随时间的改变。物理学中许多重要的基本概念，如力、动量、能量、功等，都是在力学中首先提出的。因此力学是学习物理学的基础。

## 第一节 质点的运动

研究物体运动时，如果物体的大小和形状在所研究的问题中可以忽略，就把它抽象为一个质量与它相同的点，称为质点。

### 一、位移 运动方程

质点在一段时间内位置的改变叫它在这段时间的位移。如图 1-1 所示，设质点在  $t$  和  $t + \Delta t$  时刻分别通过 P 和  $P_1$  点，其位置矢量，简称位矢，分别为  $r(t)$  和  $r(t + \Delta t)$ ，则由 P 引到  $P_1$  的矢量表示位矢的增量，即

$$\Delta r = r(t + \Delta t) - r(t)$$

这一位矢的增量就是质点在  $t$  到  $t + \Delta t$  这一段时间内的位移。

应该注意的是，位移  $\Delta r$  是矢量，既有大小又有方向。其大小用  $\Delta r$  矢量的长度表示，记作  $|\Delta r|$ 。这一数量不能简写为  $\Delta r$ ，因为  $\Delta r = r(t + \Delta t) - r(t)$ ，它是位矢的大小在  $t$  到  $t + \Delta t$  这一段时间的增量。 $|\Delta r|$  一般不等于  $\Delta r$ 。

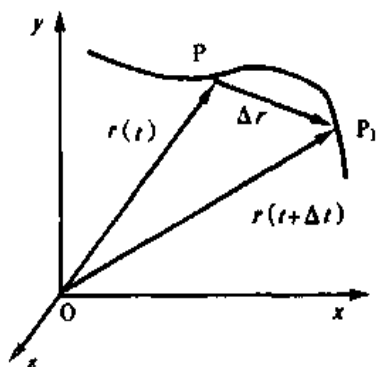


图 1-1 位移

从运动学的角度看, 质点的运动就是它的位置随时间的变化, 也就是它的位矢是随时间改变的。这一改变可以表述为

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \quad (1-1)$$

式(1-1)是质点运动方程的矢量表示式。若位矢  $\boldsymbol{r}$  在直角坐标系中的三个分量分别是  $x\boldsymbol{i}, y\boldsymbol{j}, z\boldsymbol{k}$ , 则有

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k} \quad (1-2)$$

作为时间函数的三个坐标值可以表示为

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (1-3)$$

这样的一组函数称为质点运动方程的标量表示式, 也可看作是质点沿各坐标轴的分运动的表示式。质点的实际运动是由式(1-1)或式(1-3)中三个函数的总体表示的。式(1-2)表明: 质点的实际运动是各分运动的矢量合成, 这一关系叫运动的叠加原理。

## 二、速度 加速度

质点的位移需要时间来完成。位移  $\Delta\boldsymbol{r}$  和发生这段位移所经历的时间的比称为质点在这一段时间内的平均速度。以  $\bar{\boldsymbol{v}}$  表示平均速度

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} \quad (1-4)$$

平均速度也是矢量, 它的方向就是位移的方向, 如图 1-2。当  $\Delta t$  趋于零时, 式(1-4)的极限, 即质点位矢对时间的变化率, 称为质点在时刻  $t$  的瞬时速度, 简称速度。用  $\boldsymbol{v}$  表示速度, 则有

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \quad (1-5)$$

速度的方向, 就是  $\Delta t$  趋于零时,  $\Delta\boldsymbol{r}$  的方向。当  $\Delta t$  趋于零时,  $P_1$  点向  $P$  点趋近, 而  $\Delta\boldsymbol{r}$  的方向最后将与质点运动轨道在  $P$  点的切线一致。因此, 质点在时刻  $t$  的速度的方向就沿着该时刻质点所在处运动轨道的切线而指向运动的前方。

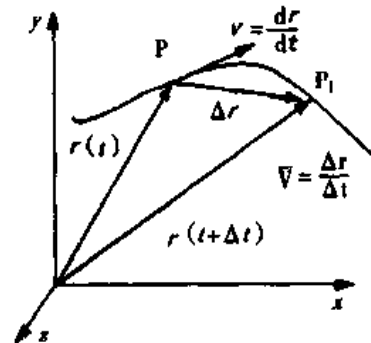


图 1-2 平均速度与瞬时速度

速度的大小叫速率, 以  $v$  表示

$$v = |\boldsymbol{v}| = \left| \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta\boldsymbol{r}|}{\Delta t}$$

用  $\Delta s$  表示在  $\Delta t$  时间内质点沿轨道所经过的路程。当  $\Delta t$  趋于零时,  $|\Delta\boldsymbol{r}|$  和  $\Delta s$  趋于相同。因此可以得到

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta\boldsymbol{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \quad (1-6)$$

即速率的大小等于质点所走过的路程对时间的变化率。

在直角坐标系中, 速度的分量表示式如下

$$\boldsymbol{v} = \frac{dx}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{dy}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{dz}{dt}\boldsymbol{k} = v_x + v_y + v_z \quad (1-7)$$

应该注意，速度与速率不同。速度是位移的时间变化率，而速率是路程的时间变化率。速度是矢量，而速率是标量。

当质点的运动速度随时间改变时，常需要了解速度变化的情况。速度变化的情况用加速度表示。以  $\boldsymbol{v}(t)$  和  $\boldsymbol{v}(t + \Delta t)$  分别表示质点在时刻  $t$  和时刻  $t + \Delta t$  的速度，则在这段时间内的平均加速度  $\bar{\boldsymbol{a}}$  由下式定义

$$\bar{\boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{v}(t + \Delta t) - \boldsymbol{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} \quad (1-8)$$

当  $\Delta t$  趋于零时，此平均加速度的极限，即速度对时间的变化率，称为质点在时刻  $t$  的瞬时加速度，简称加速度，以  $\boldsymbol{a}$  表示加速度，就有

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \quad (1-9)$$

应该明确的是，加速度也是矢量。由于它是速度对时间的变化率，所以不管是速度的大小发生变化，还是速度的方向发生变化，都有加速度。利用式(1-5)，还可得

$$\boldsymbol{a} = \frac{d^2 \boldsymbol{r}}{dt^2} \quad (1-10)$$

在直角坐标系中，加速度的分量表示式如下

$$\boldsymbol{a} = \frac{dv_x}{dt} \boldsymbol{i} + \frac{dv_y}{dt} \boldsymbol{j} + \frac{dv_z}{dt} \boldsymbol{k} = \boldsymbol{a}_x + \boldsymbol{a}_y + \boldsymbol{a}_z \quad (1-11)$$

很明显，如果加速度  $\boldsymbol{a}$  的方向和速度  $\boldsymbol{v}$  的方向一致，则结果只能引起速度  $\boldsymbol{v}$  的量值发生变化而不会改变它的方向，质点将作直线运动。只有加速度  $\boldsymbol{a}$  的方向与速度  $\boldsymbol{v}$  的方向不一致时，质点才作曲线运动。另一方面如果加速度  $\boldsymbol{a}$  的方向与速度  $\boldsymbol{v}$  的方向垂直，则结果只会改变速度的方向而不改变它的量值。故可以把曲线运动在任何时刻的加速度  $\boldsymbol{a}$  分解为沿速度  $\boldsymbol{v}$  方向的切向加速度  $a_t$  和垂直于速度  $\boldsymbol{v}$  方向的法向加速度  $a_n$ 。切向加速度的作用是改变速度的量值，而法向加速度的作用是改变速度的方向。

## 第二节 牛顿运动规律

### 一、牛顿运动定律

质点运动学只涉及了运动的描述，并未研究质点为什么作这样或那样的运动。研究物体为什么作这样或那样的运动的内容是力学的动力学部分。牛顿(Newton)在《自然哲学的数学原理》中提出了三条定律作为动力学的基础，这三条定律统称牛顿运动定律。以牛顿运动定律为基础建立起来的力学理论称为牛顿力学。

牛顿第一定律：物体(质点)如果不受外力的作用，它将保持原有的静止状态或作匀速直线运动(惯性定律)。

牛顿第二定律：作用在物体上的合外力  $\boldsymbol{F}$  等于物体动量的时间变化率。

$$\boldsymbol{F} = \frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} \quad (1-12)$$

式(1-12)中的  $P$  是物体的质量  $m$  与速度  $v$  的乘积称为动量。动量是个矢量，它的方向和速度方向相同。如果物体的质量可以认为是不变的话，式(1-12)可以写成

$$F = m \frac{dv}{dt} = ma \quad (1-13)$$

牛顿第三定律：力总是成对出现的。如果物体 A 以力  $F_A$  作用在物体 B 上，则物体 B 也必然同时以一等值反向的力  $F_B$  作用在物体 A 上，即  $F_A = -F_B$ 。

牛顿运动定律引入了力、惯性、质量和动量的概念。力是一个物体对另一个物体的作用。物体在不受外力影响时保持原有运动状态的性质称为惯性，而惯性的大小则是以物体的质量来衡量的。质量大的物体惯性也大，它的速度不容易改变。动量是质量与速度的乘积，它是表征物体运动状态的物理量。牛顿运动定律把上述这些概念和运动学的基本概念联系起来。

## 二、力学单位的国际单位制和量纲

应用牛顿定律进行数量计算时，各物理量的单位必须“配套”。相互配套的一组单位称为“单位制”。目前国内外通用的单位制叫国际单位制，代号为 SI。

在确定各物理量的单位时，总是根据它们之间的相互联系选定少数几个物理量作为基本量，并人为地规定它们的单位。这样的单位叫基本单位。其他的物理量都可以根据一定的关系从基本量导出，这些物理量叫导出量。导出量的单位都是基本单位的组合，叫导出单位。

由于基本单位的选择不同，就组成了不同的单位制。SI 的力学基本单位是秒(s)、米(m)和千克(kg)。

以 T、L 和 M 分别表示基本量的时间、长度和质量。如果单考虑某一导出量是如何由这些基本量组成的，则一个导出量可以用 T、L 和 M 的幂次组合表示出来。表示一个物理量如何由基本量组合的式子，称为物理量的量纲。如速度、加速度、力、动量等的量纲分别为  $[v] = LT^{-1}$ ， $[a] = LT^{-2}$ ， $[F] = MLT^{-2}$ ， $[P] = MLT^{-1}$ 。对于不同的单位制，如果基本量的选择不同，则同一物理量的量纲也不同。量纲可用于校核等式，量纲也可以定出同一物理量不同单位之间的换算关系。

## 三、惯性系和非惯性系

对于不同的参考系，同一物体的运动形式可以不同，但运动的描述是相对的，可以根据研究问题的方便任意选择参考系。但是，如果问题涉及运动和力的关系，即要应用牛顿定律时，是否也可以任意选择参考系呢？

先看一个例子，站台上停着一辆小车，相对于地面参考系进行分析，小车停着，加速度为零。这是因为作用在它上的力相互平衡，即合力为零的缘故，这符合牛顿定律。如果从加速起动的列车车厢内观察这辆小车，即相对于作加速运动的车厢参考系来分析小车的运动，将发现小车向车尾方向作加速运动。它受力的方向并无改变，合力仍然是零。合力为零而有了加速度，这是违背牛顿定律的。因此，相对于作加速运动的车厢参考系，牛顿定律不成立。

因此就可以得到这样的结论,对有些参考系牛顿定律成立,对另一些参考系牛顿定律不成立。实际上,牛顿定律只有在惯性参考系中才成立。惯性参考系就是适用牛顿第一定律的参考系,在此参考系中,一个不受力作用的物体将保持静止或作匀速直线运动。

惯性系有一个重要的性质,即如果我们确认了某一参考系为惯性系,则相对于此参考系作匀速直线运动的任何其他参考系一定是惯性系。反过来也可以说,相对于一个已知惯性系作加速运动的参考系,一定不是惯性参考系,或者说是一个非惯性系。

具体判断一个实际的参考系是不是惯性系,只能根据实验观察。太阳参考系,即原点固定在太阳中心而各坐标轴指向固定方向(以恒星为基准)的参考系是个很好的惯性系。地心参考系是原点固定在地球中心而坐标轴指向空间固定方向(以恒星为基准)的参考系,地心参考系可以近似地当惯性系看待。地面参考系是坐标轴固定在地面上的参考系。由于地球围绕自己的轴相对于地心参考系不断地自转,所以地面参考系不是惯性系。但由于地面上各处相对于地心参考系的法向加速度最大不超过  $3.40 \times 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  (在赤道上),所以地面参考系也可以近似地当惯性系看待。在一般工程技术问题中,相对于地面参考系描述物体的运动和应用牛顿定律,得出的结论也足够准确地符合实际,就是因为这个缘故。

至于前面提到的加速运动的车厢,由于它相对于地面参考系有明显的加速度,所以不能当惯性系看待。

在实际问题中常常需要在非惯性系中观察和处理物体的运动现象。在这种非惯性系中,牛顿定律是不成立的。但是为了方便起见,我们也常常形式地利用牛顿第二定律分析问题,为此引入惯性力。

以加速平动参考系为例。设有一质点,质量为  $m$ , 相对于某一惯性系  $S$ , 它在实际的外力  $F$  作用下产生加速度  $a$ 。设想另一参考系  $S'$ , 相对于惯性系  $S$  以加速度  $a_0$  平动。在  $S'$  参考系中,质点的加速度是  $a'$ 。由运动的相对性可知  $a = a' + a_0$ 。根据牛顿第二定律得

$$F = m(a' + a_0) = ma' + ma_0$$

即

$$F + (-ma_0) = ma' \quad (1-14)$$

此式说明,质点受的合外力  $F$  并不等于  $ma'$ , 因此牛顿定律在参考系  $S'$  中不成立。但是如果在  $S'$  中观察时,除了实际的外力  $F$  外,质点还受到一个大小和方向由  $(-ma_0)$  表示的力,并将此力也计入合力之内,则式(1-14)就可以形式上理解为:在  $S'$  系内观测,质点所受的合外力也等于它的质量与加速度的乘积。因而,也就可以在形式上应用牛顿第二定律了。

为了在非惯性系中形式地应用牛顿第二定律而必须引入的力称为惯性力。由式(1-14)可知,在加速平动参考系中,它的大小等于质点的质量和此非惯性系相对于惯性系的加速度的乘积,而方向与此加速度的方向相反。以  $F_0$  表示惯性力,则有  $F_0 = -ma_0$ 。

引进惯性力后在非惯性系中牛顿第二定律的形式为  $F + F_0 = ma'$ 。其中  $F$  是实际存在的各种力,它们是物体之间的相互作用的表现,其本质都可以归结为四种基本

的自然力。惯性力  $F_0$  只是参考系非惯性运动的表现，或者说是物体的惯性在非惯性系中的表现。它不是物体间的相互作用，也没有反作用力。因此惯性力又称为虚拟力。

绕一个相对于惯性系固定的轴作转动的盘也是一个非惯性系。在这样一个非惯性系中应用牛顿第二定律也需要引入一个虚设的惯性力。图 1-3 绘出绕固定轴匀速转动的盘，盘上的一根细绳的两端分别连着固定轴和质点  $m$ 。若以盘作为参考系观测，小球虽受到细绳的拉力  $T$  的作用，却静止不动，不符合牛顿第二定律。为了保持牛顿第二定律的形式，假想小球受到一个与力  $T$  相平衡的惯性力  $f_c$ ，它的大小为

$$f_c = m \frac{v^2}{R} = m\omega^2 R$$

这个惯性力称为惯性离心力，简称离心力。

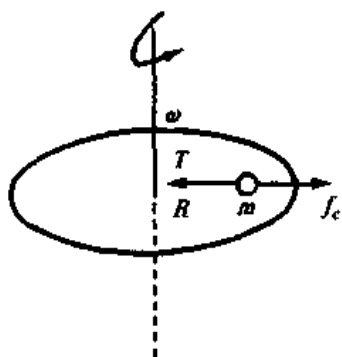


图 1-3 惯性离心力

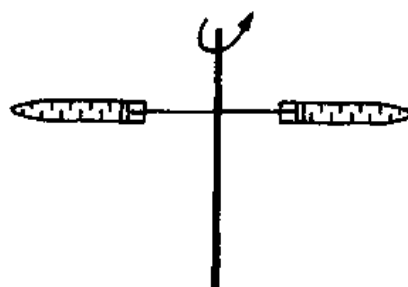


图 1-4 离心机原理

利用离心力的概念，可制成快速分离悬浮液中不同密度微粒的机械——离心机。图 1-4 是离心机的原理图。使装有试样的离心管在水平面上绕轴快速旋转，试样中的微粒受到离心力的作用向管底转移。由于密度大的微粒受到的离心力大，因此经过一段时间以后，管中的微粒将按密度的大小分离，密度最大的位于管底，最小的靠近管口。如果离心机转速高，则向心加速度的值可以比重力加速度值  $g$  大许多倍，于是可大大加快分离的速度。近代超速离心机的转速可达  $60000 \text{ r} \cdot (\text{min})^{-1}$ 。若以  $R = 10 \text{ cm}$  计算，则向心加速度约为重力加速度的 40 万倍，即  $4 \times 10^5 g$ 。这样的高速离心机可分离线度小于几个微米的病毒和蛋白质分子。

### 第三节 功和能 能量守恒定律

#### 一、功

功是描述力在物体移动过程中的空间效果，定义为力在位移方向上的分量与位移的乘积。以  $dA$  表示功，则

$$dA = F \cdot dr = F \cdot dr \cdot \cos\varphi \quad (1-15)$$

功是标量，功的量纲是  $\text{ML}^2\text{T}^{-2}$ ，单位焦耳(J)。功没有方向，但有正负。当  $\varphi > \pi/2$

时,  $dA < 0$ , 即在这个过程中力作负功, 也就是物体克服这力作了功。

如果物体沿曲线从 A 运动到 B, 力  $F$  对它作的功  $A_{AB}$  就是

$$A_{AB} = \int_A^B dA = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (1-16)$$

单位时间内完成的功称为功率, 功率的单位为瓦特(W)。 $1W = J \cdot s^{-1}$ 。

## 二、动能 势能

能是指一个物体或物体系统所具有的做功本领。能是一个因做功而发生改变的量, 其量值变化可以作为功的量度。物体能量的大小与它的状态有关, 也就是说能量是物体状态的函数。

**1. 动能** 质量为  $m$  的物体, 在力的作用下沿曲线由 A 至 B。力的空间累积, 即力对物体作的功就是

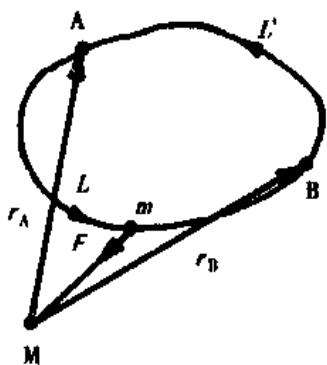
$$A_{AB} = \int_A^B dA = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B F \cos \varphi \cdot dr = \int_A^B m \frac{dv}{dt} \cdot v dt = m \int_{v_A}^{v_B} v dv = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 \quad (1-17)$$

式(1-17)表明, 外力所作的功, 在量值上等于  $\frac{1}{2} m v^2$  这个量的改变。这个量是由各时刻物体的运动状态决定的, 是一个表示能量的物理量, 定义为物体的动能。以  $E_k$  表示物体的动能, 则

$$A_{AB} = E_{kB} - E_{kA} \quad (1-18)$$

即外力对物体所作的功等于物体动能的增量。这一结论称为动能定理。这里,  $A_{AB}$  包括了所有外力对物体作的功。对于由两个以上物体组成的系统, 动能定理可以表述为: 所有外力和所有内力对物体系所作的功之和等于物体系总动能的增量。

**2. 势能** 如果力对物体所作的功与物体运动的路径无关, 仅由运动物体的始末位置所决定。这样的力叫保守力。物体沿任一闭合路径移动一周时, 保守力作的功为零。如图 1-5, 以 M 所在的位置为坐标原点, 物体  $m$  从 A 点沿  $L$  到 B 点, 然后再沿  $L'$  到 A 点, 力  $F$  所作的功为



$$\begin{aligned} \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_L^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{L'}^A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_L^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_L^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \end{aligned} \quad (1-19)$$

由于力  $F$  所作的功与路径无关, 即  $\int_L^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{L'}^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , 故

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (1-20)$$

图 1-5 保守力的功

物体间保守力作的功与路径无关, 而只决定于物体

间的始末位置，所以对这一系统，就存在一个由它们的相对位置决定的状态函数。这个由相对位置决定的函数叫系统的势能函数。以  $E_p$  表示物体的势能。若以  $E_{pA}$  和  $E_{pB}$  分别表示物体在 A 处和 B 处时系统的势能，则保守力作的功  $A_{AB}$  为：

$$A_{AB} = E_{pA} - E_{pB} = -\Delta E_p \quad (1-21)$$

即保守力作的功等于系统势能的减小。

重力就是一个保守力，重力势能与物体的高度有关，大小为  $mgh$ 。

### 三、功能原理 时间平移对称性与能量守恒定律

**1. 功能原理** 系统的内力可分为保守内力和非保守内力。因此，系统内力所作的功就等于保守内力作的功与非保守内力作的功之和。按照物体系动能定理，所有外力和所有内力对物体系所作的功之和等于物体系总动能的增量。而内力中又有保守内力和非保守内力。于是

$$A_{\text{外力}} + A_{\text{保守内力}} + A_{\text{非保守内力}} = E_{kB} - E_{kA}$$

由于保守内力作的功等于系统势能的减小，故上式可写为

$$A_{\text{外力}} + A_{\text{非保守内力}} = (E_{kB} + E_{pB}) - (E_{kA} + E_{pA})$$

系统的功能和势能之和称为系统的机械能，即机械能  $E = E_k + E_p$ ，所以上式又可写为

$$A_{\text{外力}} + A_{\text{非保守内力}} = E_B - E_A \quad (1-22)$$

式(1-22)表明，从初态变化到末态时，系统机械能的增量等于非保守力(外力和非保守内力)作功的总和，这就是系统的功能原理，它在惯性系中成立。

一个只受保守力作用的系统，即  $A_{\text{外力}} + A_{\text{非保守内力}} = 0$ ，式(1-22)可变为

$$E_B = E_A = c \quad (1-23)$$

这就是说，在只有保守力作功的情况下，物体系的机械能保持不变。这就是机械能守恒定律。

**2. 时间平移对称性与能量守恒定律** 物理学中，对称性的研究方法，是从很简单的不可观测量假设出发，寻找出某种对称性及其普遍结论。如果进行一次变动或操作后事物完全复原，则称该事物对所经历的变动或操作具有对称性，而该操作就叫对称操作。

对称性在日常生活中是常见的。球体是中心对称的，圆柱体是轴对称的，平面镜成像是面对称的，正负电子对是共轭对称的等。基本的对称性有镜像对称、平移对称、旋转对称和物理定律的对称性等。

常见的对称操作是时空操作，空间操作有平移、转动、镜像反射、空间反演、标度变换等。时间操作有时间平移、时间反演等。

物理定律的对称性是指经过某种操作后，物理定律的形式保持不变。因此，物理定律的对称性又称为不变性。关于物理定律的对称性有一条很重要的定律：对应于每一种对称性都有一种对称性守恒定律。

在惯性系中绝对时间是不可观测的，物体运动的时间只能相对的测量，即时间的



流逝是均匀的，不同时刻在物理上是等价的，时间具有平移对称性。

设封闭系统  $t$  时刻的能量是  $E(t)$ ，对时间进行微小平移变换  $t' = t + dt$  后  $t'$  时刻的能量是  $E(t') = E(t + dt)$ 。将  $E(t + dt)$  展开成泰勒级数可得

$$E(t + dt) = E(t) + \frac{\partial E(t)}{\partial t} dt + \dots$$

因  $dt$  微小，故上式可近似地表示为

$$E(t + dt) = E(t) + \frac{\partial E(t)}{\partial t} dt$$

由于系统的能量不随时间变化，即有  $\frac{\partial E(t)}{\partial t} = 0$ ，所以

$$E(t + dt) = E(t) \quad (1-24)$$

这样，利用时间平移对称性就可以证明机械能守恒定律，即在只有保守力作功的封闭系统内，物体系统的总能量保持不变。如果时间平移量是一个比较大的量  $\Delta t$ ，可以将  $\Delta t$  看成是很多个微小量  $dt$  之和，用上述方法进行若干次变换，同样可以得到式 (1-24) 的结果。

## 第四节 动量 动量守恒定律

### 一、冲量与动量

当物体受到力的作用时，它的速度要发生变化。因而它的动量也要发生变化。动量变化的大小与力的大小及作用时间的长短有关。为此可以把牛顿第二定律写成微分形式

$$F dt = dp \quad (1-25)$$

$F dt$  就表示力在时间  $dt$  内的累积量，称为在  $dt$  时间内物体所受合外力的冲量，以  $I$  表示。在时间  $\Delta t = t_2 - t_1$  范围内冲量  $I$  为

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F dt = \int_{p_1}^{p_2} dp = p_2 - p_1 = m v_2 - m v_1 \quad (1-26)$$

即物体在  $\Delta t$  时间内动量的改变等于物体在同一时间内所受合外力的冲量，这一结论称为动量定理。

动量定理对碰撞和打击过程的分析特别有用。在这类过程中，力的作用时间很短，而力的量值却很大。这种冲力是很难测量出来的，但是只要知道碰撞前后物体的动量变化，就能算出力的冲量。如果进一步知道冲力的作用时间，冲力的平均值就能求出来。通常引入平均冲力  $\bar{F}$

$$\bar{F} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} F dt}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

利用动量定理可以分析人体从高处坠地时怎样延长碰撞时间，减少冲力。人体由于碰

撞所造成的伤亡事故是不少见的，高处坠地是其中的一种。坠地时人体所受的冲力和碰撞经历的时间长短有关。落在水、沙、松软的土地上以及双脚着地时弯曲双膝，都可以延长碰撞时间，减少冲力，减少人体由于碰撞所造成的危害。

## 二、空间平移对称性与动量守恒定律

一个由许多物体组成的系统内部各个物体之间的相互作用，可以引起系统内各个物体的能量发生变化，我们把这些相互作用称为内力。系统外物体的力也可以影响系统内部的动量，为了把它们和内力分别开来，把系统外物体的力称为外力。如图 1-6 所示，讨论质量分别为  $m_1$  和  $m_2$  两个物体组成的物体系统，二者除受相互作用力(内力)， $f$ 、 $f'$  外，还受到系统外其他物体的作用力(外力)。 $F$ 、 $F'$ 。分别对两物体写出牛顿第二定律

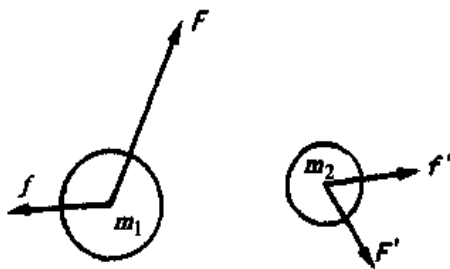


图 1-6 两物体组成的系统

$$F + f = \frac{dp_1}{dt}$$

$$F' + f' = \frac{dp_2}{dt}$$

将两式相加，并利用牛顿第三定律  $f = -f'$ ，则

$$F + F' = \frac{d}{dt} (p_1 + p_2)$$

对于由许多物体组成的系统，由于系统内所有内力的矢量和为零，所以

$$\sum_i F_i = \frac{d}{dt} \sum_i p_i \quad (1-27)$$

上式表明，系统的总动量随时间的变化率等于该系统所受的合外力。

当系统所受的合外力为零时，系统的总动量保持不变。即当  $\sum_i F_i = 0$  时，

$$\frac{d}{dt} \sum_i p_i = 0。故$$

$$\sum_i p_i = \text{常量} \quad (1-28)$$

式(1-28)就是物体系的动量守恒定律，它揭示了通过物体之间的相互作用，物体机械运动发生转移的规律。当系统不受外力作用时，系统内各物体的动量可以发生变化，但这种变化只能是动量在系统内各个物体间传递，而系统的总动量保持不变。

在图 1-7 中，物体 B 不动，物体 A 从 A 沿  $\Delta s$  移到 A'，位置改变造成的势能变化为  $\Delta U = -F_{AB} \cdot \Delta s$ ；若物体 A 不动，将物体从 B 沿  $-\Delta s$

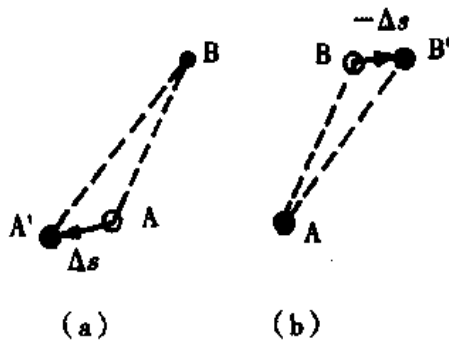


图 1-7 空间平移对称性

方向移动到  $B'$ ，则势能变化为  $\Delta U' = -F_{BA} \cdot (-\Delta s)$ 。两种变化的区别仅在于物体 A 和 B 组成的系统整体在空间有个平移，但其相对位置是一样的，即  $\overline{A'B} = \overline{AB'}$ 。空间平移对称性意味着物体之间的相互作用势能只与它们的相对位置有关，与它们整体在空间的平移无关。因此，以上两种情况终态的势能相等，即

$$U + \Delta U = U + \Delta U'$$

故

$$\Delta U = \Delta U'$$

$$-F_{BA} \cdot \Delta s = F_{AB} \cdot \Delta s$$

所以

$$-F_{BA} = F_{AB}$$

而

$$F_{BA} = \frac{dp_A}{dt}, \quad F_{AB} = \frac{dp_B}{dt}$$

因此

$$\frac{dp_A}{dt} + \frac{dp_B}{dt} = \frac{d}{dt}(p_A + p_B) = 0$$

即在不受外力作用的情况下，系统的总动量是不变的，这就是动量守恒定律。

利用动量守恒定律解决问题时，若系统所受合外力不为零，但合外力在某一方向的分量为零，则总动量在该方向上的分量是守恒的。在某些情况下，物体系内部的相互作用力比所受外力大的多，即外力对总动量的变化影响很小，诸如爆炸、碰撞等过程，就可以近似利用动量守恒定律解决。同时需要指出的是动量守恒定律只与始末状态的动量有关，只要系统不受外力作用，就不必过问运动过程的细节而利用动量守恒定律求解力学问题。

## 第五节 刚体的转动

刚体是固体的理想化模型，如果一个物体在任何力的作用下，它不改变形状和大小，就可以把它当作刚体处理。转动是指物体上的各个质点都绕同一转轴作圆周运动。在这一节中，我们将对刚体的转动作初步介绍。

### 一、刚体的定轴转动

刚体可以看成由许多质点组成，每一个质点称为刚体的一个质元，刚体这个质点系的特点是，在外力作用下各质元之间的相对位置保持不变。既然是一个质点系，所以以前讲过的关于质点系的基本定律就都可以应用。当然，由于刚体这一质点系有其特点，所以这些基本定律就表现为更适合于研究刚体运动的特殊形式。

**1. 刚体的运动** 刚体的运动可以是平动、转动或二者的结合。如果刚体在运动中，连结体内两点的直线在空间的指向总保持平行，这样的运动就叫平动。在平动时，刚体内各质元的运动轨迹都一样，而且在同一时刻的速度和加速度都相等。因此在描述刚体的平动时，就可以用一点的运动来代表。通常就用刚体质心的运动来代表整个刚体的平动。

转动的最简单情况是定轴转动。在这种运动中各质元均作圆周运动，而且各圆的圆心都在一条固定不动的直线上，这条直线叫转轴。转动是刚体的基本运动形式之

一。刚体的一般运动都可以认为是平动和绕某一转轴转动的结合。

刚体绕某一固定转轴转动时，各质元的线速度、加速度一般是不同的(图 1-8)。但由于各质元的相对位置保持不变，所以描述各质元运动的角量，如角位移、角速度和角加速度都是一样的。因此描述刚体整体的运动时，用角量最为方便。以  $d\theta$  表示刚体在  $dt$  时间内转过的角位移，则刚体的角速度为

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (1-29)$$

角速度  $\omega$  为矢量。它的方向由右手螺旋法则确定(图 1-8)。

刚体的角加速度为

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (1-30)$$

离转轴的距离为  $r$  的质元的线速度和刚体的角速度的关系为

$$v = r\omega \quad (1-31)$$

而其加速度与刚体的角加速度和角速度的关系为：

$$\begin{aligned} a_t &= r\alpha \\ a_n &= r\omega^2 \end{aligned} \quad (1-32)$$

定轴转动的一种简单情况是匀加速转动。在这一转动过程中，刚体的角加速度  $\alpha$  保持不变。以  $\omega_0$  表示刚体在时刻  $t=0$  时的角速度，以  $\omega$  表示它在时刻  $t$  时的角速度，以  $\theta$  表示它在从 0 到  $t$  时刻这一段时间内的角位移，仿照匀加速直线运动公式的推导可得匀加速转动的相应公式

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 + \alpha t \\ \theta &= \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \\ \omega^2 - \omega_0^2 &= 2\alpha\theta \end{aligned} \quad (1-33)$$

**2. 定轴转动的动能** 转动的物体具有动能，其值等于组成物体的各个质点的动能的总和，即

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} \Delta m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} \Delta m_2 v_2^2 + \dots \\ &= \frac{1}{2} \Delta m_1 r_1^2 \omega^2 + \frac{1}{2} \Delta m_2 r_2^2 \omega^2 + \dots \\ &= \frac{1}{2} (\Delta m_1 r_1^2 + \frac{1}{2} \Delta m_2 r_2^2 + \dots) \omega^2 \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n \Delta m_i r_i^2 \right) \omega^2 \end{aligned} \quad (1-34)$$

**3. 定轴转动的转动惯量** 若定义下式(此式也适用于质点系的定轴转动)

$$J = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \quad (1-35)$$

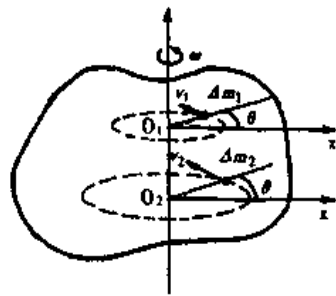


图 1-8 刚体的定轴转动

则(1-34)式变为

$$E_k = \frac{1}{2} J \omega^2 \quad (1-36)$$

将其与质点动能公式  $E_k = \frac{1}{2} m v^2$  类比,  $\sum_{i=1}^n m_i r_i^2$  的作用与质量  $m$  相当。 $J$  是一个衡量转动惯性的量,  $J$  越大, 要使物体获得一定角速度所需的能量越多, 我们把  $J$  称为刚体对定轴的转动惯量。它决定于刚体的质量、形状、质量分布和转轴位置。转动惯量是刚体转动惯性的量度, 转动惯量越大, 刚体的转动惯性就越大。如果刚体的质量是连续分布的, 则刚体的转动惯量为

$$J = \int r^2 dm = \int r^2 \rho dv \quad (1-37)$$

式中  $dv$  表示  $dm$  的体积元,  $\rho$  表示该处的密度,  $r$  为体积元与该处的距离。在 SI 制中,  $J$  的单位是  $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ 。

## 二、转动定律

一个具有固定轴的静止刚体, 在外力作用下是否绕轴转动, 不但与力的大小有关, 而且与力的作用点及作用力的方向有关。因此在研究转动问题时需要引入力矩这一概念。力的大小与力臂(即力的作用线和转轴之间的垂直距离)的乘积称为此力对转轴的力矩, 单位取  $\text{N} \cdot \text{m}$ 。力矩为矢量, 它的方向由右手螺旋定则来规定, 即由矢径沿小于  $180^\circ$  角向力的方向旋转, 螺旋前进的方向即代表力矩的方向。

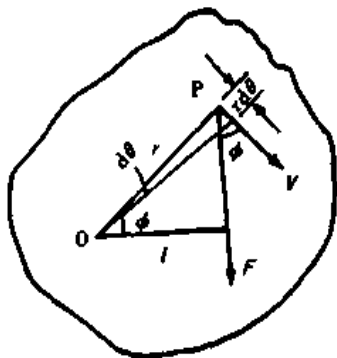


图 1-9 转动定律的推导

在图 1-9 中, 刚体在力  $F$  的作用下绕垂直于纸面的  $O$  轴转动。当转动一小角  $d\theta$  时, 力所作的功等于力的作用点的位移  $r d\theta$  乘以力在位移方向上分量  $F \cos \theta$ 。即

$$dA = F \cos \phi \cdot r d\theta = Fr \cos \phi d\theta = Fl d\theta$$

式中  $Fl$  即力矩  $M$ , 故可写成

$$dA = M d\theta$$

做功将引起刚体动能的增加, 则

$$M d\theta = d\left(\frac{J\omega^2}{2}\right)$$

若  $J$  在转动过程中不变, 则

$$M d\theta = J \omega d\omega$$

而  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ , 所以

$$M = J \frac{d\omega}{dt} = J \alpha \quad (1-38)$$

上式指出, 转动物体的角加速度与作用的力矩成正比, 与物体的转动惯量成反比。该定律称为转动定律, 相当于质点运动的牛顿第二定律。

## 三、角动量 空间旋转对称性与角动量守恒定律

1. 角动量 质点对  $O$  点的角动量是这样定义的: 如图 1-10 所示,  $r$  是从  $O$  点指

向质点所在位置的位矢,  $m\mathbf{v}$  是质点动量,  $\varphi$  是  $\mathbf{r}$  与  $m\mathbf{v}$  的夹角, 则运动质点对  $O$  点的角动量。

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \quad (1-39)$$

角动量是矢量。其大小是动量  $m\mathbf{v}$  与动量臂  $d = r\sin\varphi$  的乘积, 其方向用右手螺旋法则确定: 四指从  $\mathbf{r}$  方向沿小于  $\pi$  的方向旋转到  $m\mathbf{v}$  方向时, 与之垂直的拇指指向就是  $\mathbf{L}$  的方向。  $\mathbf{L}$  垂直于  $\mathbf{r}$  和  $m\mathbf{v}$  决定的平面。单位是  $\text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$ 。质点系对某点的角动量是所有运动质点对该点角动量的矢量和。即

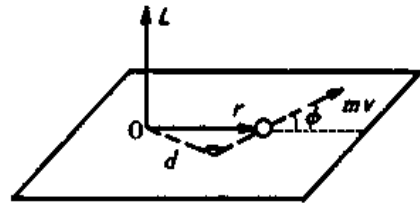


图 1-10 角动量的定义

$$\mathbf{L} = \sum (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i) \quad (1-40)$$

如果质点系绕定轴转动, 所有质点以轴为中心作圆周运动, 有相同的角速度  $\omega$ , 轴线到质点的位矢  $\mathbf{r}_i$  与质点的动量  $m_i \mathbf{v}_i$  垂直, 且  $v_i = r_i \omega$ , 故

$$\mathbf{L} = (\sum m_i r_i^2) \omega \quad (1-41)$$

在刚体中任取一质元  $\Delta m_i$ , 它相对于转轴的角动量是

$$r_i \Delta m_i v_i = r_i \Delta m_i r_i \omega = \Delta m_i r_i^2 \omega$$

因此整个刚体对定轴的角动量是

$$\mathbf{L} = (\sum m_i r_i^2) \omega = J \omega \quad (1-42)$$

**2. 空间旋转对称性与角动量守恒定律** 以两个质点组成的封闭系统为例, 由空间旋转对称性导出角动量守恒定律。

两个质点  $m_1$ 、 $m_2$  组成的封闭系统可以使用势能定理。质点  $m_1$ 、 $m_2$  之间的引力势能可以用二者连线段对坐标原点  $o$  的张角  $\varphi$  表示

$$E_p = E_p(\varphi)$$

如图 1-11, 为简单起见, 设质点  $m_1$ 、 $m_2$  位于以  $o$  点为圆心,  $R$  为半径的圆周上。将两个质点  $m_1$ 、 $m_2$  在圆周的轨道上沿同一方向旋转  $d\varphi$  的角度, 设势能的变化为  $dE_p$ , 由势能定理得

$$-dE_p = dA = (M_1 + M_2) \cdot d\varphi$$

式中  $M_1$  是质点  $m_2$  对质点  $m_1$  的作用力  $f_1$  对  $o$  点的力矩,  $M_2$  是质点  $m_1$  对质点  $m_2$  的作用力  $f_2$  对  $o$  点的力矩。因空间具有旋转对称性, 旋转后  $m_1$ 、 $m_2$  的连线对  $o$  点的张角仍为  $\varphi$ , 两质点间的相对位置也不会改变, 因而有  $dE_p = 0$ 。由此可得

$$M_1 + M_2 = 0$$

两质点间相互作用力对同一点的力矩的矢量和为零。

由于  $M = \frac{dL}{dt}$ , 故  $\frac{dL_1}{dt} + \frac{dL_2}{dt} = \frac{d}{dt}(L_1 + L_2) = 0$ 。

即

$$L_1 + L_2 = \text{恒矢量} \quad (1-43)$$

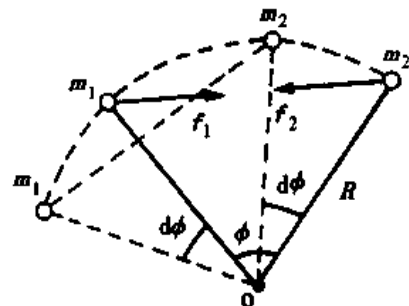


图 1-11 角动量守恒定理

由  $N$  个质点组成的封闭系统，其内可能有相互作用的非保守力。但由于非保守内力也是成对出现的，且大小相等方向相反，对同一点的每一对内力矩也是大小相等、方向相反。将整个体系沿某一方向旋转一个微小角度  $d\varphi$ ，由于系统内各质点间没有相对角位移，非保守内力矩作的总功为零，仍然可以使用势能定理。这样就不难证明  $N$  个质点组成的封闭系统对同一点的角动量是守恒的。

$$\sum L_i = \text{恒矢量} \quad (1-44)$$

式(1-43)和式(1-44)说明，封闭系统的角动量是守恒的。封闭系统中的内力矩不会改变系统的总角动量。这一结论称为角动量守恒定律。

#### 四、旋 进

大家对陀螺游戏是比较熟悉的，当玩具陀螺不转动时，由于受到重力矩的作用，会倾倒下来。但当陀螺急速旋转时，尽管同样受到重力矩的作用，却不会倒下来，这时陀螺在绕自身对称轴转动的同时，对称轴还将绕竖直轴  $oz$  转动，如图 1-12 所示。

陀螺以角速度  $\omega$  绕自身对称轴高速转动的现象，叫自转，自转角动量  $L = J\omega$ 。在重力矩作用下，自转轴以角速度  $\Omega$  绕竖直轴转动的现象叫旋进。如图 1-13 所示。现在作近似处理(认为所有角动量都沿自转轴方向，陀螺自转角速度越高，这种近似就越精确)，由  $Mdt = dL$ ，可求得旋进角速度  $\Omega$

$$Mdt = mgl \sin(\pi - \theta) dt = mgl \sin\theta dt$$

$$dL = L \sin\theta d\varphi \quad (L \sin\theta \text{ 是图中所示的 } r)$$

于是有

$$mgl \sin\theta dt = L \sin\theta d\varphi$$

进动角速度

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{mgl}{L} = \frac{mgl}{J\omega} \quad (1-45)$$

自行车拐弯是进动现象，炮弹的发射也要利用进动现象。

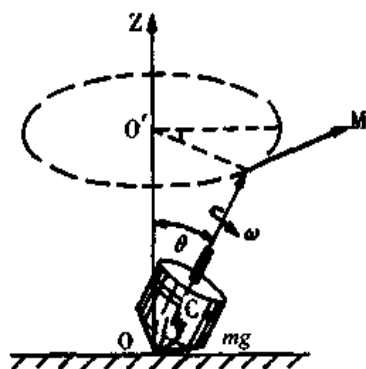


图 1-12 陀螺进动现象

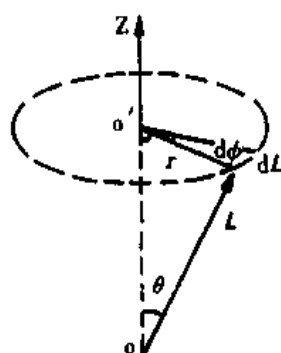


图 1-13 求进动角速度  $\Omega$

#### 第六节 应力和应变

物体受到外力作用后，一方面可能产生整体运动，另一方面，外力将向物体内部传递，引起物体内部相邻点之间的相对运动，进而导致其体积或形状的改变，使物体

产生变形。应力与应变就是为研究后者而引入的两个基本概念。

## 一、应 力

应力是指作用于物体内部单位面积上的弹性力，它准确地描述了作用于物体内部力的分布情况。应力具有局部特征，可以表示相应位置上的受力强度，其单位为  $\text{N}\cdot\text{m}^{-2}$ 。图 1-14 为物体内部  $O$  点附近的一小单元，截面  $ABC$  的法线方向为  $n$ ，面积为  $\Delta A$ ，截面上受合力  $\Delta F$  作用，按照应力的定义，该面上的平均应力为  $\Delta F/\Delta A$ ，当  $\Delta A$  趋于 0 时，定义：

$$P = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA} \quad (1-46)$$

此为点  $O$  在  $n$  方向的应力。显然，任一方向的应力均为矢量，我们可将其分解为与作用面垂直的分量  $\sigma$  及与作用面平行的分量  $\tau$ ，一般我们称与作用面垂直的应力为正应力，与作用面平行的应力为切应力。不同物体存在正应力或切应力阈值，超过该阈值，物体即可被破坏。

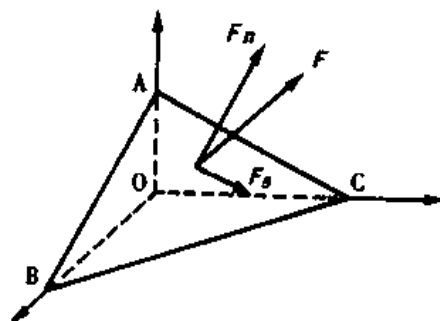


图 1-14  $O$  点的应力状态

## 二、应 变

物体内部任一小单元，在应力作用下可发生变形，变形程度可用应变描述，应变有多种形式。

当物体受应力作用时，其长度、形状或体积都可能发生变化，这种变化的相对量（如与其原来尺度相比较）称为应变。应变为无量纲量。按变化量的不同，应变有线应变、切应变及体应变等。

如图 1-15 (a)，对一细长物体施加拉力  $F$  使之拉伸，设物体初始长度为  $L_0$ ，拉伸后成为  $L_0 + \Delta L$ ，则单位长度的伸长率为

$$\epsilon = \frac{(L_0 + \Delta L) - L_0}{L_0} = \frac{\Delta L}{L_0} \quad (1-47)$$

称  $\epsilon$  为线应变。若物体被压缩，则  $\Delta L < 0$ ，此时有  $\epsilon < 0$ 。

如图 1-15 (b) 所示的长方体，下底面固定，在其上底面平行地加一作用力  $F$ ，使之变形。设两底面相对偏移距离为  $\Delta x$ ，垂直距离为  $d$ ，倾斜角为  $\varphi$ ，定义

$$\gamma' = \Delta x/d = \text{tg}\varphi \quad (1-48)$$

此为切应变。

物体在各个方向上均匀压强  $P$  作用下，体积变小。设初始体积为  $V_0$ ，受压后体积变

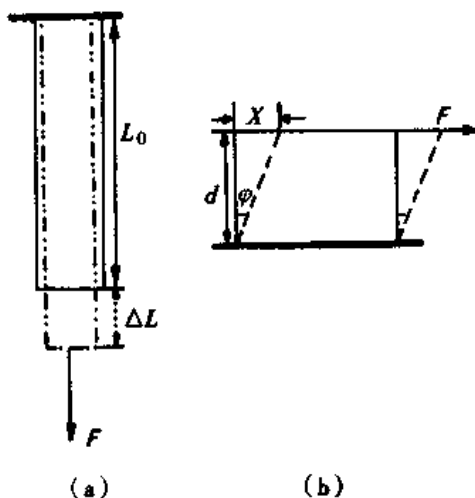


图 1-15 应变的一般表示



为  $V_0 - \Delta V$ ，则体积应变  $\theta$  定义为

$$\theta = \frac{(V_0 - \Delta V) - V_0}{V_0} = -\frac{\Delta V}{V_0} \quad (1-49)$$

当物体被纵向拉伸时，将产生横向收缩。实验表明，横向的相对收缩与纵向相对伸长成正比。若设物体横截面为矩形，其边长分别为  $a_0$ 、 $b_0$ ，拉伸后变为  $a$ 、 $b$ ，线应变为  $\Delta L/L$ ，若设材料性质与受力方向无关(这种材料我们称为各向同性材料)，则

$$\mu = \frac{a_0 - a}{a_0} / \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{b_0 - b}{b_0} / \frac{\Delta L}{L_0} \quad (1-50)$$

$\mu$  称为泊松比。不可压缩材料  $\mu = 1/2$ ，其他材料  $\mu < 1/2$ 。

## 第七节 弹性模量

外力作用将引起物体变形，力与变形之间存在一定的关系，这种关系可以用应力与应变之间的函数表示，这种函数关系称为材料的本构关系。

### 一、弹性和塑性

弹簧被拉伸，长度发生变化，但同时也相伴产生一种反拉伸力量。一般而言，当外力不超过一定范围时，绝大多数物体在除去外力后能够恢复原有形状，这种物体称为完全弹性体，物体能够恢复变形的特性为弹性。

若外力过大，外力除去后，有一部分变形将不能恢复，这种物体称为弹塑性体，外力除去后变形不能恢复的特性为塑性。

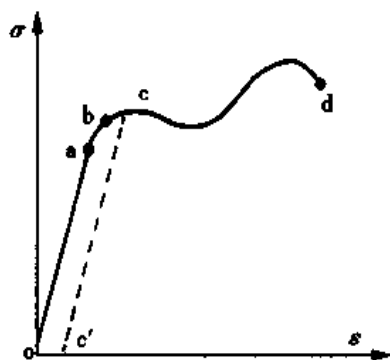


图 1-16 某金属材料的简单拉伸示意图

自然界中没有完全的弹性体，对均匀杆状物体进行简单拉伸实验可以研究材料的弹性与塑性。图 1-16 是某金属材料的简单拉伸实验示意图。在拉伸的开始阶段( $oa$ )，应力与应变成正比，从  $a$  点以后，拉伸曲线开始弯曲，说明应力和应变的比例关系被破坏， $a$  点称材料的正比例极限；拉伸曲线的  $ab$  段，虽然应力、应变不再成正比例，但如果在这一阶段的任一点除掉负荷，材料仍可循原来的拉伸路径恢复到原来的长度，即此时物体仍为完全弹性体， $b$  点称为材料的弹性极限； $b$  点以后属塑性范围，外力祛除后将沿与  $oa$  平行的方向卸载，同时有部分变形不能恢复(图中  $oc'$  段)。

### 二、弹性模量

在正比例极限(弹性极限)内，应力、应变成正比，这就是胡克定律。不同材料其比例系数不同，我们称材料应力与应变的比值为该材料的弹性模量，弹性模量的单位

为  $\text{N}\cdot\text{m}^{-2}$ 。

物体单纯受张应力或压应力作用时，其应力与应变的比值称为杨氏模量，用  $E$  表示，即

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} \quad (1-51)$$

切应力与切应变的比值称为切变模量，一般用  $G$  表示，显然有

$$G = \frac{\tau}{\gamma} \quad (1-52)$$

大多数材料切变模量的数值为杨氏模量的  $1/2$  到  $1/3$ 。

弹性模量表示物体变形的难易程度，弹性模量越大，物体越不容易变形。例如钢的杨氏模量为  $20 \times 10^{10} \text{N}\cdot\text{m}^{-2}$ 、切变模量为  $8 \times 10^{10} \text{N}\cdot\text{m}^{-2}$ ，人骨骼的杨氏模量为  $15 \times 10^9 \text{N}\cdot\text{m}^{-2}$ 、切变模量为  $3.2 \times 10^9 \text{N}\cdot\text{m}^{-2}$ 。正如图 1-16 所表示的那样，当物体所受作用力较小时，应力与应变成正比，比例系数——弹性模量为常数。但当所受作用力较大时，应力与应变表现为非线性关系，其弹性模量与变形相关，不再为常量。一般称弹性模量与物体变形有关的物体为非线性弹性体，大多数生物材料均为非线性弹性体。

除杨氏模量、切变模量外，我们还经常使用体积模量描述材料的体变特性，体积模量定义为压强  $P$  与体应变的负比值，用  $K$  表示。

$$K = \frac{-P}{\theta} = \frac{-P}{\Delta V/V_0} \quad (1-53)$$

式中  $P$  为物体所受压强， $V_0$  为物体变形前的体积， $\Delta V$  为物体受压强作用后体积的减少量。

## 第八节 骨与肌肉的力学特性

骨骼与肌肉是机体的主要承载系统与作功单元，它们的力学性能对其功能的完成至关重要，骨骼与肌肉力学是目前生物力学学科的主要研究内容。

### 一、骨骼的力学性质

骨骼系统的主要作用是保护内脏、提供坚实的动力交接和肌肉连结，便于肌肉和身体的活动。骨组织是一种特殊的结缔组织，它既有一定的结构形状及力学特性，又有很强的自我修复功能与力学适应性。骨折是常见的临床疾病，研究骨折经常使用强度与刚度的概念，强度是指在载荷作用下抵抗破坏的能力，刚度表示在载荷作用下抵抗变形的能力，骨的这两种最基本的物理性能取决于它的成分和结构。

实验表明，骨骼是典型的非线性弹性体，图 1-17 是人润湿骨的拉伸实验曲线示意图。显然在曲线

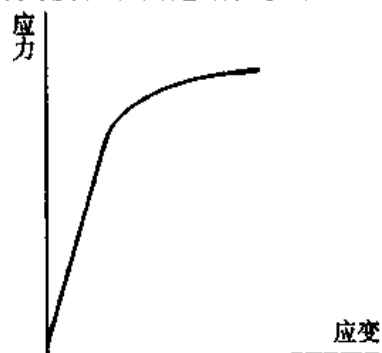


图 1-17 骨骼的单向拉伸曲线

的开始部分，非线性程度较低，可近似认为骨骼是线性弹性体。另外，与一般的金属材料不同，骨骼在不同方向载荷作用下表现出不同的力学性能(我们称材料的这种特性为各向异性)。图 1-18 是人股骨标准试样在不同方向拉伸时的刚度和强度变化曲线，可以看出，在纵轴方向上加载时，试样的刚度和强度最大，而在横轴方向上最小。

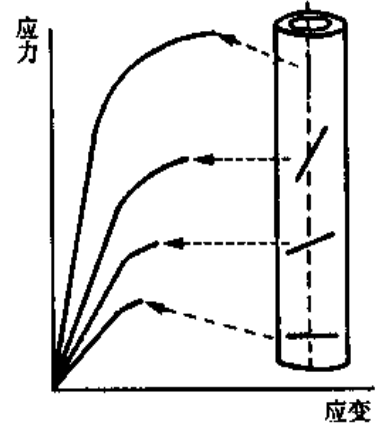


图 1-18 骨骼不同方向的拉伸曲线  
(样品对称轴上的黑线方向为拉伸方向)

骨是人体内最主要的承载组织，人体的骨骼受不同方式的力或力矩作用时会有不同的力学反应。骨骼的变形、破坏与其受力方式有关。人体骨骼受力形式多种多样，可根据外力和外力矩的方向，将骨骼的受力分为拉伸、压缩、弯曲、剪切、扭转和复合载荷六种。

**拉伸：**拉伸载荷是指自骨的表面向外施加的载荷(相当于人进行悬垂动作时骨受到的载荷)。骨骼在较大载荷作用下可伸长并变细。骨组织在拉伸载荷作用下断裂的机制主要是骨单位间结合线的分离和骨单位的脱离。临床上拉伸所致骨折多见于松质骨。

**压缩：**压缩载荷为加于骨表面大小相等、方向相反的载荷(如举重时身体各部分都要受到压缩载荷)。骨骼最经常承受的载荷是压缩载荷，压缩载荷能够刺激骨的生长，促进骨折愈合，较大压缩载荷作用能够使骨缩短和变粗。骨组织在压缩载荷作用下破坏的表现主要是骨单位的斜行劈裂。人润湿骨破坏的极限应力大于拉伸极限应力，拉伸与压缩的极限应力分别为  $134 \text{ MN}\cdot\text{m}^{-2}$  与  $170 \text{ MN}\cdot\text{m}^{-2}$ 。

**弯曲：**骨骼受到使其轴线发生弯曲的载荷作用时(图 1-19)，将发生弯曲效应。受到弯曲作用的骨骼上存在一没有应力与应变的中性对称轴( $oo'$ )，在中性对称轴凹侧面(载荷作用侧)骨骼受压缩载荷作用，在凸侧受拉伸载荷作用。应力大小与至中性对称轴的距离成正比(图中  $aa'$  面)，距轴越远，应力越大。对成人骨骼，破裂开始于拉伸侧，因为成人骨骼的抗拉能力弱于抗压能力。未成年人骨则首先自压缩侧破裂。

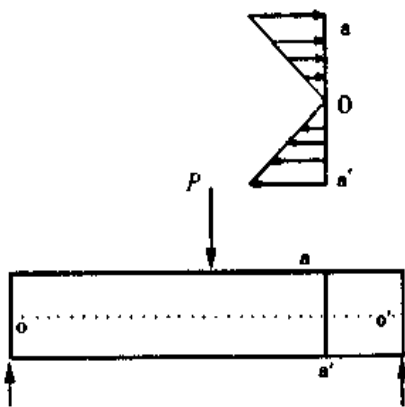


图 1-19 骨骼受弯曲载荷作用示意图

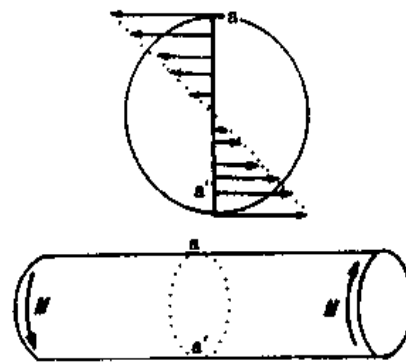


图 1-20 骨骼受扭转载荷作用示意图

剪切：剪切作用时，载荷施加方向与骨骼横截面平行，人骨骼所能承受的剪切载荷比拉伸和压缩载荷都低。

扭转：载荷(扭矩  $M$ )加于骨骼并使其沿轴线产生扭曲时即形成受扭转状态(图 1-20)，常见于人体或局部肢体作旋转时骨骼所承受的绕纵轴的两个反向力矩作用(如掷铁饼最后阶段腿部承受的载荷)。扭转载荷使骨骼横截面每一点均承受剪切应力作用，切应力的数值与该点到中性轴的距离成正比。骨骼的抗扭转强度最小，因而过大的扭转载荷很容易造成扭转性骨折。

上面提到的是骨骼受载的几种简单情况，实际生活中骨骼很少只受到一种载荷作用，作用于人体骨骼上的载荷往往是上述几种载荷的复合作用。

骨骼经常处于反复受力的过程中，当这种反复作用的力超过某一生理限度时，就可能造成骨组织损伤，这种循环载荷下的骨损伤称为疲劳损伤。实验表明，疲劳可引起骨骼多种力学参数改变，如，可使骨骼的强度、刚度下降。疲劳寿命随载荷增加而减少，随温度升高而减少，随密度增加而增加。疲劳骨折常常发生于持续而剧烈的体力活动期间，这种活动易造成肌肉疲劳，当肌肉疲劳时收缩能力减弱，以至难于储存能量和对抗加于骨骼上的应力，结果改变了骨骼上的应力分布，使骨骼受到异常的高载荷而导致疲劳骨折。断裂可发生于骨的拉伸侧、压缩侧或两侧均有。拉伸侧的断裂为横向裂纹并迅速发展为完全骨折。压缩侧的骨折发生缓慢，如不超过骨重建的速度就可能不致发展到完全骨折。

当外界物体以某一速度作用于骨骼上时，骨骼将受到很大的冲击，受冲击作用的骨骼可产生较大的应力与变形，并获得一定的能量。若这些力学量超过骨的强度极限，即可造成冲击损伤。在骨骼冲击损伤中，对人体生命有直接威胁的是颅骨损伤与脊柱损伤。当然，冲击方式不同，它们的损伤特性也不同。若是质量较大、与头相对运动速度较慢的钝器伤，作用能量将能够通过折裂处消散，因此，损伤可能表现为一条断裂线，也可能是从一点或一个区域发出的多条辐射状断裂线；若撞击物与颅骨相

宇航员在失重情况下每天失去 3g 钙。

骨骼中的应力如果在变化后长期维持新的水平，则不仅骨中的无机盐成分发生改变，而且整个骨的形状也发生改变。在较高应力持续作用下，一部分骨细胞变成成骨细胞，这种细胞的胞浆呈碱性，有能力使无机盐沉淀，并能产生纤维与粘多糖蛋白等细胞间质，这些和无机盐共同组成骨质，骨质将成骨细胞包围在其中，细胞合成活动逐渐停止，胞浆减少，胞体变形，成骨细胞变为骨细胞，从而使骨的承载面积增大。相反，作用在骨骼上的应力减少后，骨细胞变成破骨细胞，它产生酸性磷酸酶可以溶解骨骼中的粘多糖蛋白、胶原纤维和无机盐，这种活动的结果是降低了骨的有效面积。

应力如何引起基质内酸碱度的变化及如何使骨细胞向成骨细胞或破骨细胞转化，一般认为是由于应力产生的骨骼压电效应所致。

## 二、肌肉的力学特性

可兴奋细胞——肌纤维是肌肉的主要成分。肌纤维的直径为  $10 \sim 60 \mu\text{m}$ ，它由直径为  $1 \mu\text{m}$  左右的许多肌原纤维组成，肌原纤维又是由许多直径更小的蛋白微丝组成。这些蛋白微丝之间可以相互作用，使肌肉发生收缩或伸长。肌原纤维发生伸缩的基本单元为肌节，肌节的长度是变化的，充分缩短时长约  $1.5 \mu\text{m}$ ，放松时为  $2.0 \sim 2.5 \mu\text{m}$ 。肌肉的功能是将化学能转变为机械能。

肌肉包括骨骼肌、心肌和平滑肌三种，它们的组织要素相同，收缩的生物化学机制也大致一样，但结构、功能及力学特性有一定差异。骨骼肌可随意收缩，我们称其为随意肌；心肌、平滑肌的收缩由机体自主控制，与意念无关，研究较为困难。目前关于肌肉力学性质的研究结果大部分都是针对骨骼肌进行的。

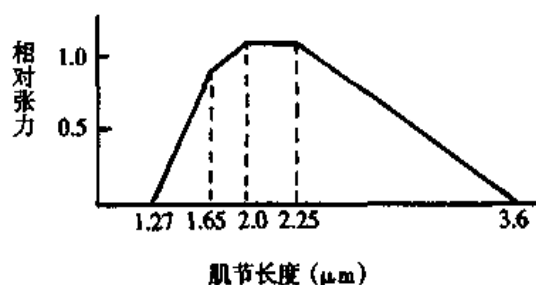


图 1-21 肌节长度—主动张力曲线

与一般材料特性不同，肌肉收缩时产生的内部拉力(一般称张力)变化主要依赖于肌节内结构的变化，并因此形成特殊的肌纤维张力-长度曲线(图 1-21)。可以看出，在肌节处于休息长度时( $2 \mu\text{m}$  左右)张力最大，但当肌节长度达到  $3.6 \mu\text{m}$  后，主动张力却变为零。肌纤维具有主动收缩性，此外，肌纤维及其周围的结缔组织还可被动承载，因此整块肌肉伸缩时的张力应为主动张力与被动张力之和(图 1-22)。

整块肌肉的力学特性较为复杂，为研究方便，可将其表示为图 1-23 所示的三单元模型。图中收缩元代表肌肉中有活性的主动收缩成分，当肌肉兴奋时可产生主动张力，其张力的大小与其微观结构有关，骨骼肌处于休息状态时，收缩元对张力没有贡献；并联弹性元代表肌肉被动状态下的力学性质，主要与主动收缩单元周围的结缔组织有关；串联弹性单元主要代表主动收缩单元的固有弹性及与之相串联的部分结缔组织。

整块肌肉可认为是由许多这样的模型混联在一起构成，模型的串联构成肌肉的长度，模型的并联构成肌肉的厚度。因此，可以把肌肉看成由多个模型串联与并联而

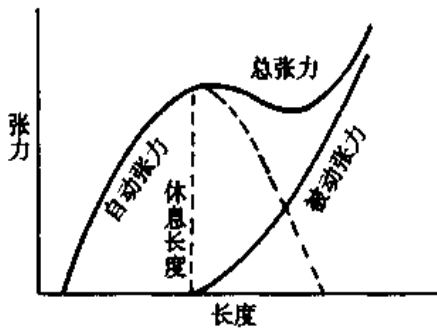


图 1-22 整块肌肉的力学特性

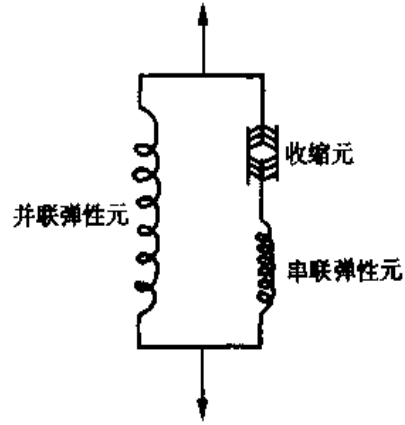


图 1-23 肌肉的三单元模型

成。由多个模型串联而成的肌肉，各个收缩元产生相同的收缩力，每个模型受到的外力相等，也等于整个肌肉两端的外力，而肌肉的伸长或缩短的总长度却等于各个模型伸长或缩短之和。由此可见，肌肉长度的增加，对其收缩速度有良好影响，但不影响它的收缩力。在多个模型并联而成的肌肉断面上，各个模型产生同样的变形与相同的收缩速度，而肌肉两端的作用力是各个模型对其两端作用力之和。因此，肌肉生理横断面的增加会导致肌肉收缩力的增加，但不会影响肌肉收缩速度。

肌肉的收缩速度与收缩力之间存在相关关系，对此，Hill 进行了详细的阐述。Hill 以青蛙的缝匠肌为试样，两端夹紧，保持长度  $L_0$  不变，以足够高的频率和电压加电刺激，使之挛缩产生张力  $P_0$ ，然后将其一端松开，使其张力下降为  $P$ ，在张力变化过程中测量张力  $P$  与速度  $V$ ，并同时测定肌肉收缩时产生的热量与维持挛缩状态需要的热量。考虑到肌肉收缩时，一方面对外作功(记为  $A$ )，另一方面对外释放热量(记为  $H$ )，由能量守恒原理，肌肉收缩时对外释放的能量为

$$E = A + H \quad (1-54)$$

肌肉对外所作的功等于负荷  $P$  和肌肉缩短距离  $x$  的乘积，即

$$A = Px \quad (1-55)$$

另外，从实验发现，肌肉收缩时释放的热量(即收缩热)  $H$  与肌肉缩短的距离成正比，即

$$H = \alpha x \quad (1-56)$$

比例因子  $\alpha$  表示肌肉缩短单位长度所释放的热量，具有力的量纲。

将式(1-55)和式(1-56)代入式(1-54)，即得肌肉收缩时所释放能量  $E$  的表达式

$$E = (P + \alpha)x \quad (1-57)$$

若将上式对时间求导数，考虑到距离的导数等于速度，于是有

$$\frac{dE}{dt} = (P + \alpha)V \quad (1-58)$$

实验表明，当肌肉收缩时，对外释放能量  $E$  的时间变化率随负荷减小而增大，且与肌肉能提起的最大负荷  $P_0$  和实际负荷  $P$  之差成正比，假定比例系数为  $b$  ( $b$  具有速度的量纲)，那么有

$$(P + \alpha)V = b(P_0 - P) \quad (1-59)$$

这便是 Hill 导出肌肉力-速度关系方程。经简单代数运算后, Hill 方程可改写为

$$(P + \alpha)(V + b) = (P_0 + \alpha)b \quad (1-60)$$

这个方程的右侧为常数, 与双曲线方程( $xy = \text{常数}$ )相似。这说明肌肉力与其收缩速度成反比。

## 思考题与习题一

1-1 回答下列问题:

- (1) 位移和路程有何区别?
- (2) 速度和速率有何区别?
- (3) 瞬时速度和平均速度的区别和联系是什么?
- (4) 物体能否有一不变的速率而仍有一变化的速度?
- (5) 速度为零的时刻, 加速度是否一定为零? 加速度为零的时刻, 速度是否一定为零?
- (6) 当物体具有大小、方向不变的加速度时, 物体的速度方向能否有改变?

1-2 回答下列问题:

- (1) 物体受到几个力的作用, 是否一定产生加速度?
- (2) 物体速度很大, 所受到的合外力是否也很大?
- (3) 物体的运动方向和合外力方向是否一定相同?
- (4) 物体运动的速率不变, 所受合外力是否为零?

1-3 炮弹以一定的仰角射出, 它的轨迹是一条抛物线。设当它到达最高点时, 不料发生爆炸, 分裂成质量相等的两块碎片, 其中一块在爆炸的影响下沿着原来的轨迹返回到出发点。问:

- (1) 另一块碎片将沿怎样的方向飞去? 能否达到预定的地点?
- (2) 到达地面时两者的速率是否相同?
- (3) 两者能否同时到达地面?

1-4 根据动量原理可知: 力在时间过程中的累积效应, 引起动量的改变。根据功能原理可知: 力的空间累积引起动能的改变。

(1) 如果物体受合外力作用了一段时间(即受到合外力的冲量作用), 动量发生了改变, 那么, 是否一定会引起物体动能的改变?

(2) 如果物体受合外力作用, 并且在力作用的方向上有了位移(即合外力对物体作了功), 使物体的动能发生了变化, 是否一定会引起物体动量的改变?

1-5 求长为  $L$ 、横截面积为  $A$ 、线密度等于  $\rho$  的弹性细圆棒在自身重力作用下体积的改变及与圆棒轴线呈  $\theta$  角的截面上的正应力、切应力。

1-6 液体的切变模量为零, 你如何理解?

1-7 比较骨骼、刚体、钢材、肌肉的杨氏模量的大小。

1-8 正确理解 Hill 方程, 探讨每搏量一定时, 血压与心率的关系。

1-9 一质点作半径为  $R$  的圆周运动, 其速率  $v = b - ct$ ,  $b$ 、 $c$  均为正的常量, 试求:

- (1) 任意时刻质点的加速度的大小和方向;
- (2) 速度为零时质点绕圆周运动了多少圈?

1-10 在生物物理实验中用来分离不同种类的分子的超级离心机的转速是  $60 \times 10^4 \text{ r} \cdot \text{min}^{-1}$ 。在这种离心机的转子内, 离轴 10cm 远的一个大分子的向心加速度是重力加速度的几倍?

( $\approx 4 \times 10^3$  倍)

1-11 桌上有一块质量  $M = 1\text{kg}$  的木板，板上放着一个质量  $m = 2\text{kg}$  的物体，物体和板之间、板和桌面之间的滑动摩擦系数均为  $\mu_k = 0.25$ ，静摩擦系数均为  $\mu_s = 0.30$ ，现以水平力  $F$  拉木板，物体与板一起以加速度  $a = 1\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$  运动，试求：

- (1) 物体和板的相互作用力以及板和桌面的相互作用力； (7.35N)  
 (2) 若要使板从物体下抽出，需用外力  $F$  是多少？ (16.17N)

1-12 一步枪在射击时，子弹在枪膛内受的推力满足  $F = 400 - \frac{4}{3} \times 10^5 t$  的规律变化，已知击发前子弹速度  $v_0 = 0$ ，子弹出枪口时速度  $v = 300\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 。求子弹的质量等于多少？ ( $2 \times 10^{-3}\text{kg}$ )

1-13 质量为  $1\text{kg}$  的球以  $25\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$  的速率竖直地落到地板上，以  $10\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$  的初速率跳回。

- (1) 试问在球与地板接触时间内作用在球上的冲量多大？ (-875N·s)  
 (2) 设接触时间为  $0.02\text{s}$ ，问作用在地板上的平均力多大？ (43759.8N)

1-14 质量为  $7.2 \times 10^{23}\text{kg}$ 、速度为  $6.0 \times 10^7\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$  的粒子 A，与另一个质量为其一半而静止的粒子 B 相碰，假定这碰撞是弹性碰撞，碰撞后粒子 A 的速率为  $5.0 \times 10^7\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ，求：

- (1) 粒子 B 的速率及偏转角；  
 (2) 粒子 A 的偏转角。 ( $4.74 \times 10^7\text{m}\cdot\text{s}^{-1}, 54.2^\circ, 22.3^\circ$ )

1-15 一质量为  $m$  的中子与一质量为  $M$  的原子核作弹性碰撞，若中子的初始动能为  $E_0$ ，试证明在碰撞过程中中子动能损失的最大值为  $4mME_0/(M+m)^2$ 。

1-16 地下蓄水池的底面积  $S = 50\text{m}^2$ ，储水深度  $h = 1.5\text{m}$ ，若水面低于地面的高度  $h_0 = 5.0\text{m}$ ，问将池水全部抽到地面时，需作多少功？若水泵的效率  $\eta = 80\%$ ，输入功率  $N = 35\text{kW}$ ，需要多少时间可以抽完？ ( $1.5 \times 10^2\text{s}$ )

1-17 求质量为  $m$ ，半径为  $R$  的均匀薄圆环的转动惯量，轴与圆环平面垂直并且通过其圆心。

1-18 一根长  $l$ ，质量为  $M$  的均匀直棒，其一端挂在一个水平光滑轴上而静止在竖直位置。今有一子弹，质量为  $m$ ，以水平速度  $v_0$  射入棒的下端而不复出。求棒和子弹开始一起运动时的角速度。  

$$\left( \frac{3mM}{(M+3m)l} \right)$$

(杨继庆)



## 第二章 流体的运动

---

学习本章后，你应：

1. 掌握理想流体和稳定流动的概念、连续性方程及伯努利方程的物理意义并熟练应用、牛顿粘滞定律和泊肃叶定律的意义和应用。
  2. 理解粘性流体伯努利方程的物理意义、层流和湍流、雷诺数、斯托克司定律及应用。
  3. 了解生物材料的粘弹性及力学模型、心脏做功、血流速度及血管中血压的分布。
- 

气体和液体统称为流体。流体的基本特征是具有流动性，即流体各部分之间极易发生相对移动，因而流体没有固定的形状。研究流体运动规律的学科称为流体动力学，本章将介绍它的一些基本概念和规律。

流体动力学是水力学、空气动力学、生物力学等学科的理论基础。掌握流体运动的规律对研究人体循环系统、呼吸过程以及相关的医疗设备是十分必要的。

### 第一节 理想流体 稳定流动

#### 一、理想流体

实际流体的运动是很复杂的。因为任何实际流体都是可压缩的，即它的体积随压强不同而改变；但是，实际液体在外力作用下体积只有微小的变化，例如，对水增加  $1.013 \times 10^8$  Pa 的压强，仅使水的体积减少 5% 左右。气体虽容易压缩，但它的流动性好，除密闭容器外，只要有很小的压强差就可以使气体迅速流动起来，从而使各处的密度趋于均匀。因此，实际液体和流动中的气体都可以近似看作是\*\*不可压缩的\*\*。另外，实际流体都有粘滞性，即当流体各层之间有相对流动时，相邻两层间存在内摩擦力。很多液体(如水和酒精)的粘滞性很小，气体的粘滞性就更小，当它在小范围内流动时，由粘滞性造成的影响一般可以忽略。

总之，在一些实际问题中，可压缩性和粘滞性只是影响运动的次要因素，而决定流体运动的主要因素是其流动性，因此往往采用理想流体模型来分析问题。所谓理想流体，就是绝对不可压缩、完全没有粘滞性的流体。

## 二、稳定流动

在流动过程中的任一瞬时，流体在所占据的空间每一点都具有一定的流速  $v(x, y, z, t)$ ，这个空间称为流体速度场，简称流场。为了形象地描述流场，可以在流场中划出一系列假想的曲线，在任一瞬间，使曲线上每一点的切线方向与流经该点的流体粒子的速度方向一致，这些曲线就叫这一时刻流体的流线。

一般情况下，流场中各点的流速随时间而变，因此流线的形状是随时间变化的。如果流场中各点的流速不随时间变化，即  $v = v(x, y, z)$ ，这样的流动称为稳定流动。在图 2-1 中，A、B、C 是流场中的三个点，并处在同一流线上，流体流经这三点的速度虽各不相同，但在稳定流动的情况下，A、B、C 三点的速度都不随时间变化。因此，流体作稳定流动时，流线的形状保持不变，流线与流体粒子的运动轨迹相重合。

如果在稳定流动的流体中划出一个小截面  $S_1$  (如图 2-2)，则通过其周边各点的流线所围成的管状区域称为流管。由于每一点有惟一确定的流速，所以流线不能相交，流管内外的流体都不会穿越管壁。可以把整个流动的流体看成是由许多流管组成的，只要搞清楚流体在流管中的运动规律，也就可以了解流体流动的一般情况。

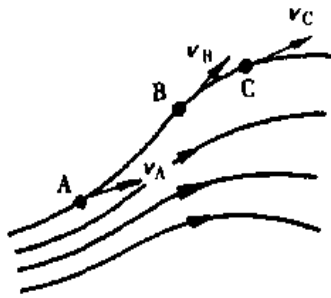


图 2-1 流线

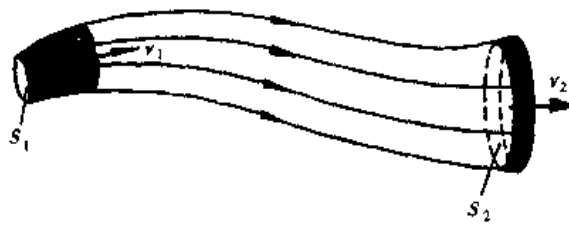


图 2-2 流管

## 三、连续性方程

在稳定流动的流场中任取一段细流管，如图 2-2 所示，流管的任一横截面上各点的物理量都可以看成是均匀的。设截面  $S_1$  和  $S_2$  处的流速分别为  $v_1$  和  $v_2$ ，流体密度分别为  $\rho_1$  和  $\rho_2$ 。经过一短时间  $\Delta t$ ，通过截面  $S_1$  进入该流管段的流体(图中  $S_1$  附近阴影部分)质量为

$$m_1 = \rho_1 (v_1 \Delta t) S_1 = \rho_1 S_1 v_1 \Delta t$$

同时通过截面  $S_2$  流出该流管段的流体(即图中  $S_2$  附近阴影部分)质量为

$$m_2 = \rho_2 (v_2 \Delta t) S_2 = \rho_2 S_2 v_2 \Delta t$$

根据质量守恒原则及稳定流动的特点，有  $m_1 = m_2$ ，即

$$\rho_1 S_1 v_1 \Delta t = \rho_2 S_2 v_2 \Delta t \quad (2-1)$$

$$\rho_1 S_1 v_1 = \rho_2 S_2 v_2$$

式(2-1)对于流管中任意两个与该流管垂直的截面都是正确的，故可写成

$$\rho S v = \text{常量} \quad (2-2)$$

式(2-2)表明, 流体作稳定流动时, 同一流管中任一截面处的流体密度  $\rho$ 、流速  $v$  和该截面面积  $S$  的乘积为一常量, 这个关系称为稳定流动时的连续性方程。 $\rho S v$  是单位时间内通过任一截面  $S$  的流体质量, 常称为质量流量, 因此连续性方程又称为质量流量守恒定律。

如果研究的是不可压缩流体, 此时  $\rho_1 = \rho_2$ , 从式(2-1)和式(2-2)可得出

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \quad (2-3)$$

$$S v = \text{常量} \quad (2-4)$$

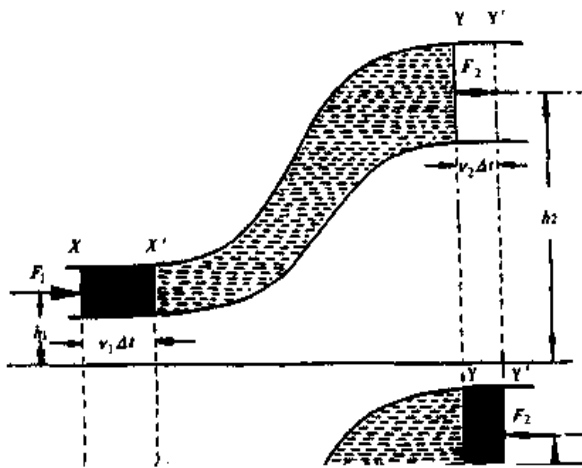
式(2-4)是不可压缩流体作稳定流动时的连续性方程,  $Sv$  是单位时间内通过任一截面  $S$  的流体体积, 常称为体积流量, 所以式(2-4)又可称为体积流量守恒定律。因此对于不可压缩的流体来说, 不仅质量流量守恒, 体积流量也是守恒的。

式(2-4)表明, 当不可压缩的流体在流管中作稳定流动时, 单位时间内通过垂直于流管的任一截面的流体体积都相等。因此流速与横截面积成反比, 截面积大处流速小, 截面积小处流速大。

## 第二节 伯努利方程

### 一、伯努利方程

理想流体作稳定流动时, 流体在流管中各处的流速、压强和高度之间有一定的关系, 下面利用功能原理来进行推导。



设理想流体在重力场中作稳定流动。在流场中任取一细流管, 并截取一段流体  $XY$  作为研究对象, 如图 2-3 所示。设经过极短时间  $\Delta t$  后, 此段流体由  $XY$  移到了  $X'Y'$  位置。由于所取的流管很细, 并且时间  $\Delta t$  很短, 则介于  $XX'$  间的流体体积  $V_1$  很小, 可以认为其中各点的压强、流速及相对于参考面的高度都相同, 分别以  $P_1$ 、 $v_1$  及  $h_1$  表示。

也应相同, 设为  $m$ 。现在分析在  $\Delta t$  时间内外力对这段流体所作的功以及由此而引起的机械能变化。

在流动过程中, 理想流体没有粘滞性, XY 段流体所受的外力是周围流体对它的压力, 而对其做功的只有流管中段外流体对它的压力, 如图中  $F_1$  和  $F_2$  所示。设 X、Y 处的截面积分别为  $S_1$  和  $S_2$ , 则

$$F_1 = P_1 S_1$$

$$F_2 = P_2 S_2$$

$F_1$  沿着流体流动方向作正功,  $F_2$  逆着流动方向作负功。X 面的位移是  $v_1 \Delta t$ , Y 面的位移是  $v_2 \Delta t$ 。故当流体从 XY 移至 X'Y' 时, 两力所作的总功为

$$A = F_1 v_1 \Delta t - F_2 v_2 \Delta t = P_1 S_1 v_1 \Delta t - P_2 S_2 v_2 \Delta t$$

上式中的  $S_1 v_1 \Delta t$  和  $S_2 v_2 \Delta t$  分别等于流管中 XX' 段和 YY' 段的流体体积。如前所述, 由于是理想流体作稳定流动, 因此这两段流体体积相等, 用  $V$  表示, 上式可写成

$$A = P_1 V - P_2 V \quad (a)$$

现在讨论 XY 段流体流至 X'Y' 时的机械能增量, 并用  $\Delta E$  表示。由图 2-3 可以看出, 在流动过程前后 X' 与 Y 之间的那段流体的运动状态没有变化, 所以其机械能的变化仅反映在 XX' 和 YY' 两段流体上。设 XX' 段流体的机械能为  $E_1$ , YY' 段流体的机械能为  $E_2$ , XX' 和 YY' 两段流体的质量相等并用  $m$  表示, 因此机械能增量  $\Delta E$  为

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \left( \frac{1}{2} m v_2^2 + m g h_2 \right) - \left( \frac{1}{2} m v_1^2 + m g h_1 \right) \quad (b)$$

由功能原理有

$$A = \Delta E$$

将(a)和(b)式代入上式得

$$P_1 V - P_2 V = \left( \frac{1}{2} m v_2^2 + m g h_2 \right) - \left( \frac{1}{2} m v_1^2 + m g h_1 \right)$$

移项得

$$P_1 V + \frac{1}{2} m v_1^2 + m g h_1 = P_2 V + \frac{1}{2} m v_2^2 + m g h_2$$

以  $V$  除各项得

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2 \quad (2-5)$$

式中  $\rho = m/V$  是流体的密度。

因为 X 和 Y 是在流管上任意选取的两个截面, 所以对同一流管的任一垂直截面来说

$$P + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g h = \text{常量} \quad (2-6)$$

式(2-5)和式(2-6)称为伯努利方程, 该方程说明, 理想流体在流管中作稳定流动时, 单位体积的动能、重力势能以及该点的压强之和为一常量。伯努利方程中的三项都具有压强的量纲, 其中  $\frac{1}{2} \rho v^2$  项与流速有关, 常称之为动压,  $P$  和  $\rho g h$  项与流速无关,

常称之为静压。

如果流体在水平管中流动( $h_1 = h_2$ )，则流体的势能在流动过程中不变，式(2-6)变成

$$P + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{常量} \quad (2-7)$$

从上式可以看出，在水平管中流动的流体，流速小的地方压强较大，流速大的地方压强较小。

[例题 2-1] 设有流量为  $0.12 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$  的水流过图 2-4 所示的管子。A 点的压强为  $2 \times 10^5 \text{ Pa}$ ，A 点的截面积为  $100 \text{ cm}^2$ ，B 点的截面积为  $60 \text{ cm}^2$ ，B 点比 A 点高  $2 \text{ m}$ 。假设水的内摩擦可以忽略不计，求 A、B 点的流速和 B 点的压强。

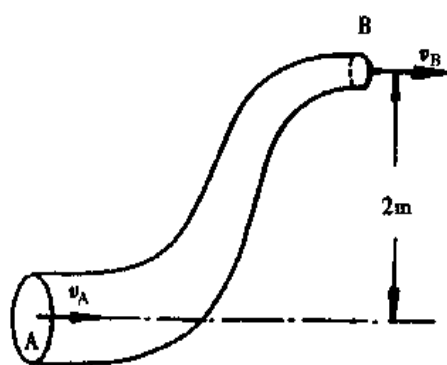


图 2-4 例题 2-1

解：已知  $Q = 0.12 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ ， $S_A = 10^{-2} \text{ m}^2$ ， $S_B = 60 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ ， $P_A = 2 \times 10^5 \text{ Pa}$ ， $h_A = 0 \text{ m}$ ， $h_B = 2 \text{ m}$ 。

水可看作不可压缩的流体，根据连续性方程有

$$S_A v_A = S_B v_B = Q$$

$$v_A = \frac{Q}{S_A} = \frac{0.12}{10^{-2}} = 12 \text{ (m} \cdot \text{s}^{-1}\text{)}$$

$$v_B = \frac{Q}{S_B} = \frac{0.12}{60 \times 10^{-4}} = 20 \text{ (m} \cdot \text{s}^{-1}\text{)}$$

又根据伯努利方程可得

$$P_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = P_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2 + \rho g h_B$$

$$P_B = P_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 - \frac{1}{2} \rho v_B^2 + \rho g h_B$$

$$= 2 \times 10^5 + \frac{1}{2} \times 1000 \times 12^2 - \frac{1}{2} \times 1000 \times 20^2 - 1000 \times 9.8 \times 2$$

$$= 5.24 \times 10^4 \text{ (Pa)}$$

## 二、伯努利方程的应用

1. 流量计 流体的流量可用汾丘里流量计来测量，它是一段水平管，两端的截面与管道截面一样大，中间逐渐缩小以保证流体稳定流动。如图 2-5 所示，是用来测液体流量的简单装置。设管子粗、细两处的截面积、压强、流速分别为  $S_1$ 、 $P_1$ 、 $v_1$  和  $S_2$ 、 $P_2$ 、 $v_2$ ，粗、细两处竖直管内的液面高度差为  $h$ ，根据水平管伯努利方程有

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

由连续性方程有

$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

将上二式联立求解，并将  $P_1 - P_2 = \rho gh$  代入可得

$$v_1 = S_2 \sqrt{\frac{2gh}{S_1^2 - S_2^2}}$$

因此，液体的流量为

$$Q = S_1 v_1 = S_1 S_2 \sqrt{\frac{2gh}{S_1^2 - S_2^2}} \quad (2-8)$$

以上二式中， $S_1$  和  $S_2$  为已知，只要测出两竖直管中液面的高度差  $h$ ，就可求出管中液体的流量。图 2-5 所示的装置稍加改变即可用来测气体的流量。

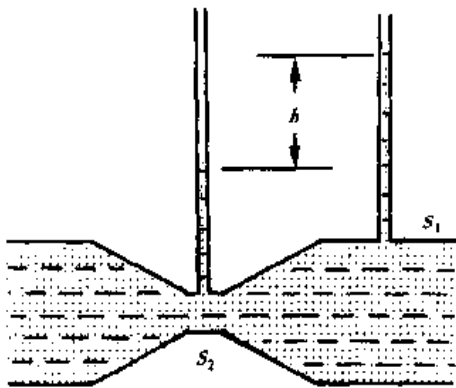


图 2-5 汾丘里流量计

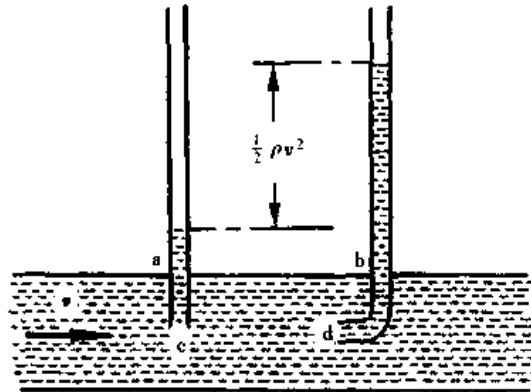


图 2-6 流速计原理

2. 流速计 皮托管是一种测流体流速的装置，图 2-6 是它的基本结构。图中 a 是一根直管，b 是一根直角弯管，直管下端的管口截面与流体流线平行，而弯管下端管口截面与流体流线垂直。流体在弯管下端 d 处受阻，形成速度为零的“滞止区”。这时两管所测出的压强是不相同的，设管中流体为液体，则比较图中 c、d 两处的压强可得

$$P_c + \frac{1}{2} \rho v^2 = P_d \quad (2-9)$$

式中  $v$  是液体在 c 处的流速，对于粗细均匀的这段流管来说也就是管中各点的速度。 $P_d$  比  $P_c$  大  $\frac{1}{2} \rho v^2$ ，这说明流体的动压在滞止区全部转化成了静压。对该装置，只要测出两管的液面高度差，便可得到  $P_d$  与  $P_c$  的差值，进而求得流速  $v$ 。

图 2-7 是一种皮托管的简单装置，测量时把它放在待测流速的流体（密度为  $\rho$ ）中，使 A 孔正对着流体前进方向，形成“滞止区”，M 孔的孔面平行于流线。两处的压强差可从 U 形管中液面的高度差测得，即

$$P_A - P_M = \frac{1}{2} \rho v^2 = \rho' gh$$

式中  $h$  是 U 形管中液面的高度差， $\rho'$  是 U 形管中液体的密度。

据此式可得

$$v = \sqrt{\frac{2\rho' gh}{\rho}} \quad (2-10)$$

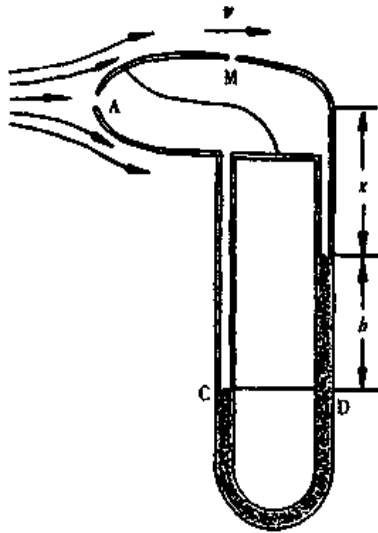


图 2-7 皮托管

### 3. 体位对血压的影响

如果流体在等截面管中流动，其流速不变，由伯努利方程可得

$$P_1 + \rho gh_1 = P_2 + \rho gh_2$$

$$P + \rho gh = \text{常量} \quad (2-11)$$

在这种情况下，高处的压强较小，而低处的压强则较大。

用上述关系，可解释体位变化对血压的影响。如图 2-8 所示，某人取平卧位时头部动脉压为 12.67 kPa，静脉压为 0.67 kPa，而当取直立位时头部动脉压则变为 6.80 kPa，静脉压变为 -5.20 kPa，减少的 5.87 kPa 是由高度改变所造成的。同理，对于足部来说，

由平卧位改为直立位时，动脉压将由 12.67 kPa 变成 24.40 kPa，静脉压将由 0.67 kPa 变成 12.40 kPa，增加的 11.73 kPa 也是由高度原因所致。因此，测量血压时一定要注意体位。

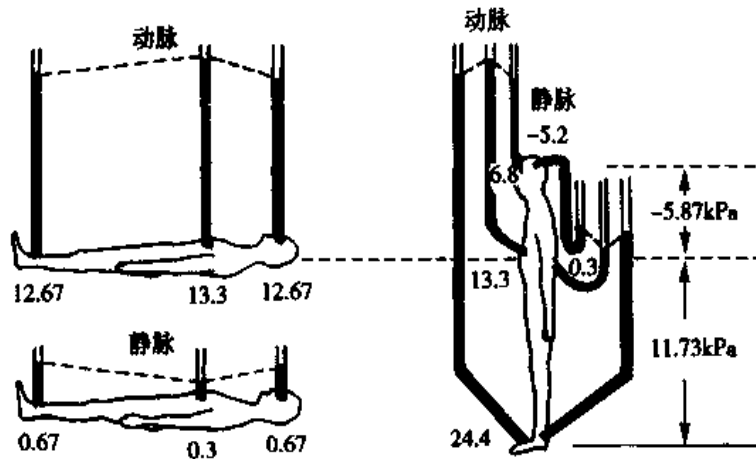


图 2-8 体位对血压的影响

## 第三节 粘性流体的流动

### 一、层流和湍流

实际流体在流动时总有内摩擦力，表现出粘滞性，简称粘性。粘性流体的流动形态主要有层流和湍流两种。

所谓层流，即流体分层流动，相邻两层流体之间只作相对滑动，流层间没有横向混杂。甘油是粘性流体，若在一支垂直放置的滴定管中倒入无色甘油，其上面再加上一段着色的甘油，打开下端活塞使甘油流出，从着色甘油的流动形态可以看出甘油流速并不完全一样，如图 2-9 所示，愈靠近管壁速度愈慢，与管壁接触的液层附着在管

壁上，速度为零，中央轴线上速度最大，流体沿垂直方向分成许多平行于管轴的圆筒形薄层，各流体层之间有相对滑动，这种现象说明管内的流体是分层流动的，图 2-10 是层流的示意图。

当流体流动的速度超过一定数值时，流体不再保持分层流动，而可能向各个方向运动，在垂直于管轴的方向有分速度，因而各流体层将混淆起来，并有可能形成漩涡，整个流动显得杂乱而不稳定，这样的流动形态称为湍流。流体作湍流时所消耗的能量比层流多，湍流区别于层流的特点之一是它能发出声音。在水管及河流中都可以看到这些现象。



图 2-9 粘性液体的流动



图 2-10 层流示意图



图 2-11 速度梯度

## 二、牛顿粘滞定律

流体作层流时，相邻两层流体作相对滑动，两层之间存在着切向的相互作用力，称为内摩擦力或粘滞力。内摩擦力是由分子间的相互作用力引起的，液体的内摩擦力比气体大得多。

在层流中，内摩擦力的大小与从一层到另一层流速变化的快慢程度有关。图 2-11 表示相距  $\Delta x$  的两流层，其速度差为  $\Delta v$ ，比值  $\Delta v/\Delta x$  表示在  $\Delta x$  距离内的平均速度变化率。当两流层无限接近时 ( $\Delta x \rightarrow 0$ )，比值  $\Delta v/\Delta x$  的极限  $dv/dx$  表示在 A 点速度沿 X 方向的变化率，称为 X 方向上的速度梯度。实验表明，内摩擦力  $f$  的大小与两流层的接触面积  $S$  以及接触处的速度梯度  $dv/dx$  成正比，即

$$f = \eta S \frac{dv}{dx} \quad (2-12)$$

上式称为牛顿粘滞定律，式中比例系数  $\eta$  称为流体的粘度。 $\eta$  值的大小取决于流体的性质，并和温度有关。一般来说，液体的  $\eta$  值随温度升高而减小，气体的  $\eta$  值随温度升高而增大。 $\eta$  值的大小表示了流体粘性的强弱，其 SI 制单位是  $\text{N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-2}$  或  $\text{Pa}\cdot\text{s}$ ，有时也用 P (Poise, 泊)， $1\text{P} = 0.1\text{Pa}\cdot\text{s}$ 。表 2-1 列出几种液体的  $\eta$  值。



表 2-1 一些液体的粘度值

| 液 体 |      |                        | 液 体  |       |                               |
|-----|------|------------------------|------|-------|-------------------------------|
|     |      | 粘度 $\eta$ (Pa·s)       |      |       | 粘度 $\eta$ (Pa·s)              |
| 水   | 0℃   | $1.8 \times 10^{-3}$   | 水银   | 100℃  | $1.0 \times 10^{-3}$          |
| 水   | 20℃  | $1.000 \times 10^{-3}$ | 蓖麻子油 | 17.5℃ | $1225.0 \times 10^{-3}$       |
| 水   | 37℃  | $0.69 \times 10^{-3}$  | 蓖麻子油 | 50℃   | $122.7 \times 10^{-3}$        |
| 水   | 100℃ | $0.3 \times 10^{-3}$   | 血液   | 37℃   | $2.0 \sim 4.0 \times 10^{-3}$ |
| 水银  | 0℃   | $1.68 \times 10^{-3}$  | 血浆   | 37℃   | $1.0 \sim 1.4 \times 10^{-3}$ |
| 水银  | 20℃  | $1.55 \times 10^{-3}$  | 血清   | 37℃   | $0.9 \sim 1.2 \times 10^{-3}$ |

式(2-12)也可写为

$$\tau = \eta \dot{\gamma} \quad (2-13)$$

式中  $\tau = f/s$  为切应力, 表示作用在流层单位面积上的内摩擦力。 $\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt} = \frac{dv}{dx}$  叫切变率, 即切应变对时间的变化率。在生物力学中, 牛顿粘滞定律常采用式(2-13)。

遵循牛顿粘滞定律的流体叫牛顿流体, 这种流体的粘度在一定温度下具有一定的数值, 即切应力  $\tau$  与切变率  $\dot{\gamma}$  成正比, 水和血浆等都是牛顿流体。不遵循牛顿粘滞定律的流体叫非牛顿流体, 非牛顿流体的粘度不是常量, 即切应力与切变率不是正比关系, 如血液等。

血液是一种非均匀液体, 含有大量血细胞, 分析血液的粘性, 对于某些疾病的诊断具有重要的参考价值。牛顿粘滞定律是研究血液流动及生物材料力学性质的重要基础。

### 三、雷 诺 数

粘性流体的流动形态是层流还是湍流, 除与速度有关外, 还与流体的密度  $\rho$ 、粘度  $\eta$  以及管子的半径  $r$  有关, 雷诺提出了一个无量纲的数作为决定层流向湍流转变的判据, 即

$$Re = \frac{\rho v r}{\eta} \quad (2-14)$$

$Re$  称为流动的雷诺数, 实验结果表明: ①  $Re < 1000$  时, 流体作层流; ②  $Re > 1500$  时, 流体作湍流; ③  $1000 < Re < 1500$  时, 流动不稳定(可以由层流变为湍流, 或相反)。

[例题 2-2] 设主动脉的内半径为 0.01 m, 血液的流速、粘度、密度分别为  $v = 0.25 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ 、 $\eta = 3.0 \times 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ 、 $\rho = 1.05 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ , 求雷诺数并判断血液以何种形态流动。

解: 雷诺数为

$$Re = \frac{1.05 \times 10^3 \times 0.25 \times 0.01}{3.0 \times 10^{-3}} = 875$$

这一数值小于 1000, 所以血液在主动脉中为层流。

从式(2-14)可以看出,流体的粘度愈小、密度愈大,愈容易发生湍流,而细的管子不易出现湍流。如果管子是弯曲的,则在较低的  $Re$  值也可发生湍流,且弯曲程度愈大  $Re$  的临界值就愈低。因此流体在管道中流动时,凡有急弯或分支的地方,就容易发生湍流。对生物循环系统,人的心脏、主动脉以及支气管中的某些部位都是容易出现湍流的地方,临床医生常根据听诊器听到的湍流声来辨别血流和呼吸是否正常。

## 第四节 粘性流体的运动规律

### 一、粘性流体的伯努利方程

在理想流体的伯努利方程推导中,我们忽略了流体的粘性和可压缩性。在讨论粘性流体的运动规律时,可压缩性仍可忽略,但流体的粘性必须考虑。粘性流体在流动时存在内摩擦力,流体必须克服内摩擦力做功,因而要消耗流体运动的部分机械能(使之转化为热能)。这就是说,流体沿流管流动的过程中,总机械能将不断减少。对图 2-3 所示的流管,如果是粘性流体作稳定流动,用  $A$  表示单位体积的流体从截面  $X$  运动到截面  $Y$  的过程中因存在内摩擦力而引起的能量损耗(也就是克服内摩擦力所作的功),则对  $X$ 、 $Y$  两处有

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho gh_1 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho gh_2 + A \quad (2-15)$$

上式即为粘性流体作稳定流动时的伯努利方程。

如果流体在等截面水平细管中流动,此时  $h_1 = h_2$ ,  $v_1 = v_2$ , 上式变为

$$P_1 = P_2 + A$$

可以看出  $P_1 > P_2$ , 因此,在水平细管的两端,必须维持一定的压强差,才能使粘性流体作匀速运动。

### 二、泊肃叶定律

粘性流体在等截面水平细管中作稳定流动时,如果雷诺数不大,则流动的状态是层流。由粘性流体的伯努利方程可知,要使管内的流体匀速流动,必须有一个外力来抵消内摩擦力,这个外力就是来自管子两端的压强差。实验表明,在水平均匀细圆管内作层流的粘性流体,其体积流量与管子两端的压强差  $\Delta P$  成正比,即

$$Q = \frac{\pi R^4 \Delta P}{8 \eta L} \quad (2-16)$$

式中  $R$  是管子的半径,  $\eta$  是流体的粘度,  $L$  是管子的长度,上式称为泊肃叶定律。

泊肃叶定律的推导:

1. 速度分布 设粘性流体在半径为  $R$ , 长度为  $L$  的水平管内匀速分层流动,管左端的压强为  $P_1$ , 管右端的压强为  $P_2$ ,  $P_1 > P_2$ , 流体向右流动。

在管中取与管同轴、半径为  $r$  的圆柱形流体(图 2-12)为研究对象,它所受到的压

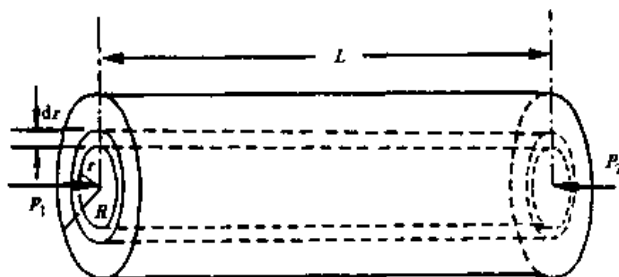


图 2-12 泊肃叶定律的推导

力差为

$$\Delta F = (P_1 - P_2)\pi r^2$$

周围流体作用在该圆柱形流体表面的内摩擦力为

$$f = -\eta 2\pi r L \frac{dv}{dr}$$

式中负号表示  $v$  随  $r$  的增大而减小,  $dv/dr$  是流体在半径  $r$  处的速度梯度。

由于管内流体作稳定流动, 所以以上两力大小相等, 即

$$(P_1 - P_2)\pi r^2 = -\eta 2\pi r L \frac{dv}{dr}$$

由上式可得

$$dv = -\frac{P_1 - P_2}{2\eta L} r dr$$

对上式积分得到

$$v = -\frac{P_1 - P_2}{4\eta L} r^2 + C$$

根据  $r = R$  时,  $v = 0$  的条件, 求得

$$C = \frac{P_1 - P_2}{4\eta L} R^2$$

代入上式得

$$v = \frac{P_1 - P_2}{4\eta L} (R^2 - r^2) \quad (2-17)$$

式(2-17)给出了流体在水平均匀细圆管中稳定流动时, 流速随半径的变化关系。从此式可以看出, 管轴( $r = 0$ )处流速有最大值, 流速  $v$  沿管径方向呈抛物线分布。

**2. 流量** 在管中取一内径为  $r$ 、厚度为  $dr$  的管状流层, 该流层的截面积为  $2\pi r dr$ , 流体通过该流层截面的流量为

$$dQ = v 2\pi r dr$$

式中  $v$  是流体在半径  $r$  处的流速。将式(2-17)代入得

$$dQ = \pi \frac{P_1 - P_2}{2\eta L} (R^2 - r^2) r dr$$

那么, 通过整个管截面的流量为

$$Q = \pi \frac{P_1 - P_2}{2\eta L} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr$$

积分后得

$$Q = \frac{\pi R^4 (P_1 - P_2)}{8 \eta L}$$

泊肃叶定律还可以写成如下形式

$$Q = \frac{\Delta P}{R_f} \quad (2-18)$$

式中  $R_f = 8\eta L / \pi R^4$ ，当管子的长度、半径以及流体的粘度确定时， $R_f$  是一定值。式(2-18)表明粘性流体在等截面水平细圆管中稳定流动时，流量  $Q$  与管两端的压强差  $\Delta P$  成正比，与  $R_f$  成反比。这与电学中的欧姆定律极为相似，所以可将  $R_f$  称为流阻（在循环系统中称为外周阻力）。值得注意的是，流阻与管半径的四次方成反比，半径的微小变化就会对流阻造成很大影响。血管可以收缩和舒张，其管径的变化对血液流量的影响是很显著的。

如果流体流过几个“串联”的流管，则总流阻等于各流管流阻之和。若几个流管相“并联”，则总流阻与各个流阻的关系与电阻并联的情形相同。

[例题 2-3] 成年人主动脉的半径约为  $1.3 \times 10^{-2} \text{ m}$ ，问在一段  $0.2 \text{ m}$  距离内的流阻  $R_f$  和压强降落  $\Delta P$  是多少？设血流量为  $1.00 \times 10^{-4} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ ， $\eta = 3.0 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ 。

$$\text{解：} \quad R_f = \frac{8\eta L}{\pi R^4} = \frac{8 \times 3.0 \times 10^{-3} \times 0.2}{3.14 \times (1.3 \times 10^{-2})^4} = 5.97 \times 10^4 \text{ (Pa} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-3}\text{)}$$

$$\Delta P = R_f Q = 5.97 \times 10^4 \times 1.0 \times 10^{-4} = 5.97 \text{ (Pa)}$$

可见在主动脉中，血压的下降是微不足道的。

### 三、斯托克司定律

当物体在粘性流体中作匀速运动时，物体表面附着一层流体，此层流体随物体一起运动，因而与周围流体之间存在内摩擦力，所以物体在运动过程中必须克服这一阻力。如果物体是球形的，且流体对于球体作层流运动，则球体所受的阻力为

$$f = 6\pi\eta v R \quad (2-19)$$

式中  $R$  是球体的半径， $v$  是球体相对于流体的速度， $\eta$  是流体的粘度，式(2-19)称为斯托克司定律。

设在粘性液体内有一半径为  $R$  的小球，它受重力作用而下沉，小球所受合力为

$$F = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho g - \frac{4}{3} \pi R^3 \sigma g - 6\pi\eta v R$$

其中  $\rho$  是球体密度， $\sigma$  是液体密度， $\frac{4}{3} \pi R^3 \sigma g$  为向上的浮力， $6\pi\eta v R$  为向上的阻力。

在此合力作用下，小球以加速度下沉，但随着速度  $v$  的增加，阻力愈来愈大，最后当合力  $F = 0$  时，它将匀速下降。此时有

$$\frac{4}{3} \pi R^3 (\rho - \sigma) g = 6\pi\eta v R$$

所以

$$v = \frac{2}{9} R^2 (\rho - \sigma) g \quad (2-20)$$

该速度  $v$  称为收尾速度或沉降速度。由式(2-20)可知，当小球(空气中的尘粒、粘性液体中的细胞、大分子、胶粒等)在粘性流体中下沉时，沉降速度与颗粒大小、密度差以

及重力加速度  $g$  成正比，与流体的粘度成反比。对于颗粒很小的微粒，我们利用高速离心机来增加有效  $g$  值，就可以加快它的沉降速度。

式(2-20)也常被用来测定液体的粘度，方法是把一个已知  $R$  值和  $\rho$  值的小球放入待测液体中下沉，测出它的沉降速度  $v$  值，就可计算出液体的粘度  $\eta$ 。

## 第五节 生物材料的粘弹性

生物材料包括天然生物材料和人工合成生物材料。天然生物材料即活体器官、组织、部件及体液等，人工合成生物材料是用化学合成方法制成的人造生物材料，它能用于与人体活组织或生物流体直接相接触的部位，具有天然器官组织或天然器官部件的功能。如人工血管、心脏、关节、血液代用品等等。研究生物材料的力学性质，对判断人体器官组织的疾病及研究制作人工器官组织等生物材料都有重要意义。

许多物质虽然具有弹性特征，但并不是一个单纯的弹性体，既表现有弹性，也表现有粘性，被称之为粘弹体，其特性称为粘弹性。沥青是有弹性的固体，但放置时间长了它会流动，表现有粘性，所以沥青是一种粘弹性固体。又如，蛋清是一种粘性液体，但在受到搅动以后，它有回缩现象，表现出弹性，因而蛋清是一种粘弹性液体。生物材料中的液体和固体几乎都是粘弹体，如血液、呼吸道粘液、关节液、软骨、血管、食管以及人工关节、瓣膜、皮肤等。只不过有的弹性较强，有的粘性较强，在程度上有所差别。下面仅对生物材料的结构特点、粘弹性材料的基本性质及力学模型作简要介绍。

### 一、生物材料的结构特点

生物材料多数是高分子聚合物，其分子间可以形成多种不同的三维结构，大致可分为三类。其一，分子不交联的无定形聚合态。这种聚合态的分子可互相分开，分子间可互相滑动，材料能拉长或无规则地相变，但不能恢复原状，所以是非弹性的，如体液等。其二，分子交联的无定形聚合态。这类分子因交联而不能互相滑动，当生物材料拉长时，长分子可在拉长方向上伸直，可拉长到原来的3倍，当被放松时，又能卷紧和弹开，分子能恢复到接近原来的尺寸，如弹性蛋白就具有这种性质。其三，分子交联成定形的结构。此类生物材料具有较高的弹性模量( $1 \sim 10\text{MN}\cdot\text{m}^{-2}$ )，如胶原纤维、骨骼等。所有组成人体器官的生物材料都是由上述三种聚合物和其他掺合物(无机盐、水、空气等)构成的复杂结构，除生物金属材料外，大多数合成生物材料也是高分子聚合物，它们的力学性质介于弹性固体和粘性液体之间，即同时具有弹性固体的弹性和粘性液体的粘性，所以生物材料是粘弹性材料。

### 二、生物材料的粘弹性

弹性体的特点是其内部任一点、任一时刻的应力，完全取决于当地当时的应变，与应变的历史过程无关，即因外力而引起的变形是瞬间发生的。当外力去掉后，弹性体将立刻恢复它的形状和大小。而粘弹性材料则与此不同，其中任一点任一时刻的应

力状态，不仅取决于当时当地的应变，而且与应变的历史过程有关，即材料是具有“记忆”的。粘弹性材料应力与应变、应变率的关系极为复杂，下面仅介绍一些基本性质。

**1. 延迟弹性** 对弹性体，应变对应力的响应是即时达到平衡，而粘弹性材料，其应变对应力的响应，并不即时达到平衡，因而应变滞后于应力。如图 2-13 (a) 所示，粘弹性材料在恒定压力作用下，应变随时间逐渐增加，最后趋近于恒定值，当外力祛除后，应变只能逐渐减小到零，即应变总是落后于应力的变化，这种表现就是延迟弹性。其原因在于大分子链运动困难，以及回缩过程中需克服内摩擦力。

**2. 应力松弛** 在对粘弹性材料维持应变恒定不变的情况下，应力随时间的增加而缓慢减小，如图 2-13 (b) 所示，这种现象称为应力松弛，如血管和血液就具有此特性。其原因仍与生物材料的分子结构和粘性有关。

**3. 蠕变** 若粘弹体维持应力恒定，应变随时间增加而增大的现象称为蠕变，如图 2-13 (c)。生物材料的应变通常由弹性应变、延迟弹性应变、粘性应变叠加形成，后两种应变决定其蠕变性。如关节软骨就具有这种特点。

**4. 滞后** 如果对粘弹体周期性加载和卸载，则卸载时的应力-应变曲线同加载时的应力-应变曲线不重合，如图 2-13 (d) 所示，这种现象称为弹性滞后。滞后现象的原因是大分子构型改变的速度跟不上应力变化，构型改变时有内摩擦力作用。血液、红

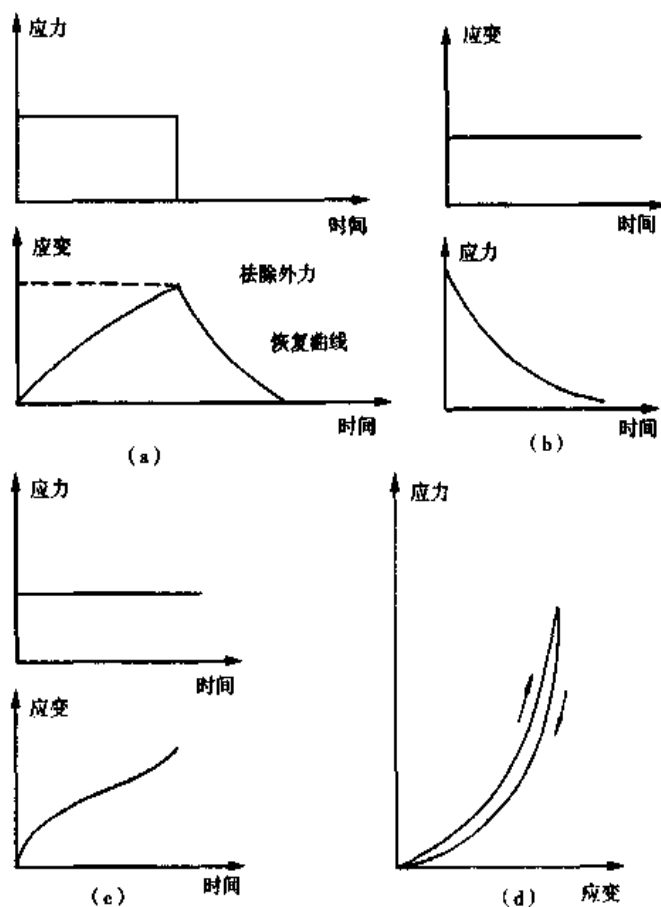


图 2-13 粘弹性材料的应力和应变

细胞等存在滞后现象。

以上是粘弹性材料的基本性质。但对具有粘弹性的每一种生物材料而言，由于分子构型不同，还有自己的特性，有关内容在生物力学中有详细介绍。

### 三、粘弹性材料的力学模型

粘弹性材料的力学模型比较复杂，这里仅介绍几种简单的力学模型。模型由线性弹簧和阻尼器组成，弹簧服从胡克定律，即应变  $\gamma$  与应力  $\tau$  成正比， $\gamma = \tau/G$ ，其中  $G$  为切变模量；阻尼器服从牛顿粘滞定律，即  $\dot{\gamma} = \tau/\eta$ 。

**1. Maxwell II 模型** 此模型用来表示应力松弛特性，由弹簧和阻尼器串联组成，如图 2-14 (a) 所示，此模型中的两个元件有相同的应力，而应变  $\gamma$  是两元件应变  $\gamma_1$  与  $\gamma_2$  的总和，即  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ 。因而得出

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{G} \frac{d\tau}{dt} + \frac{\tau}{\eta}$$

若应变  $\gamma = \gamma_0$  为常量，则  $d\gamma/dt = 0$ ，代入上式得

$$\frac{d\tau}{dt} = -\frac{G\tau}{\eta}$$

对上式求解并代入初始条件整理后得

$$\tau = \gamma_0 G e^{-\frac{t}{\lambda}} \quad (2-21)$$

式中  $\lambda = \eta/G$ ，称为松弛时间。上式反映了在应变保持常量的条件下，应力随时间而松弛的效应。

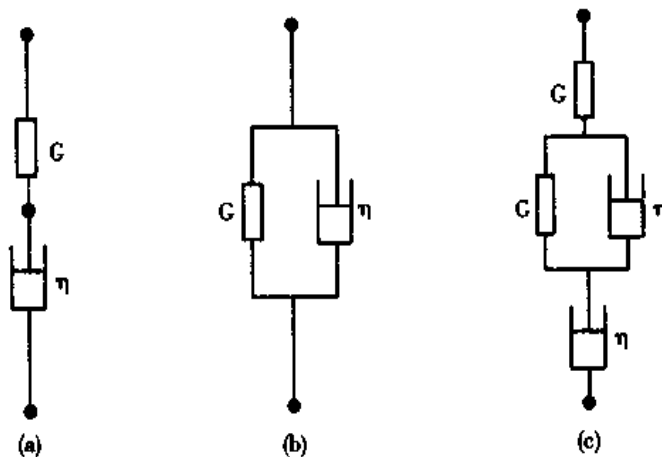


图 2-14 粘弹性材料的力学模型

**2. Voigt 模型** 它是表示延迟弹性的模型，由弹簧和阻尼器两个元件并联组成，如图 2-14 (b) 所示。因为两个元件有相同的应变，而模型的应力  $\tau$  是两元件的应力  $\tau_1$  与  $\tau_2$  的总和，即  $\tau = \tau_1 + \tau_2$ ，因此有

$$\tau = G\gamma + \eta \frac{d\gamma}{dt}$$

若应力  $\tau = \tau_0$  为常量，则上式为

$$\tau_0 = G\gamma + \eta \frac{d\gamma}{dt}$$

解此微分方程，代入初始条件整理后得

$$\gamma = \frac{\tau_0}{G}(1 - e^{-\frac{t}{\lambda'}}) \quad (2-22)$$

式中  $\lambda' = \eta/G$ ，称为延迟时间。应变是由于阻尼器的粘性而滞后，Voigt 模型直观地反映出延迟弹性变形的时间效应。

**3. 四元模型** 用来反映蠕变的时间效应，由弹簧、Voigt 模型和阻尼器串联组成，如图 2-14 (c) 所示。该模型中的应变由三部分组成，即为弹性应变、延迟应变和粘性应变的总和，即

$$\gamma = \frac{\tau_0}{G} + \frac{\tau_0}{G}(1 - e^{-\frac{t}{\lambda'}}) + \left(\frac{t}{\eta}\tau_0\right) \quad (2-23)$$

以上三种力学模型反映了粘弹性材料的基本性质，对生物材料粘弹性的理解很有帮助，但都不能代表正常状态下的实际特性。为了较好地描述粘弹性材料的力学性质，还可用这两种元件以不同形式的组合建立各种模型。

研究生物材料的粘弹性是很有意义的。如对活体生物材料进行测量，可用于临床诊断某些疾病。另外，在判断人工生物材料性能好坏时，常把粘弹性及其他力学性质作为重要技术指标。

## 第六节 血液在循环系统中的流动

血液在循环系统中的流动是比较复杂的。这是因为：① 血液是含有多种血细胞的非牛顿液体；② 心脏、血管都具有弹性，并受神经控制。下面仅利用流体运动的基本规律来分析血液流动的一般情况。

### 一、心脏做功

血液循环由心脏做功来维持。为了讨论问题方便，把整个心血管系统简化为如图 2-15 所表示的物理模型。左右两心室相当于两个唧筒，当左(右)心室收缩(即唧筒容积减小)时瓣膜开放，血液从左(右)心室射入主(肺)动脉；舒张时(即唧筒容积增大)瓣膜关闭，停止射血。整个循环系统由体循环和肺循环两部分组成，血流方向如图中箭头所示。左心室供血给体循环，右心室供血给肺循环。计算心脏做功有两种方法。

其一，心脏做功等于左、右两心室做功之和。设左心室每收缩一次做功为  $A_L$ 、平均压强为  $P_L$ 、容积变化为  $\Delta V_L$ ；右心室每收缩一次做功为  $A_R$ 、平均压强为  $P_R$ 、容积变化为  $\Delta V_R$ ；则心脏做功。

$$A = A_L + A_R = P_L \Delta V_L + P_R \Delta V_R$$

其二，根据功能关系，心脏所作的功应等于血液流经心脏前后的能量变化。设单位体积的血液进入左心时的能量为  $E_{11}$ ，离开左心时的能量为  $E_{12}$ ，则左心对单位体积血液所作的功应为  $A_L$ 。



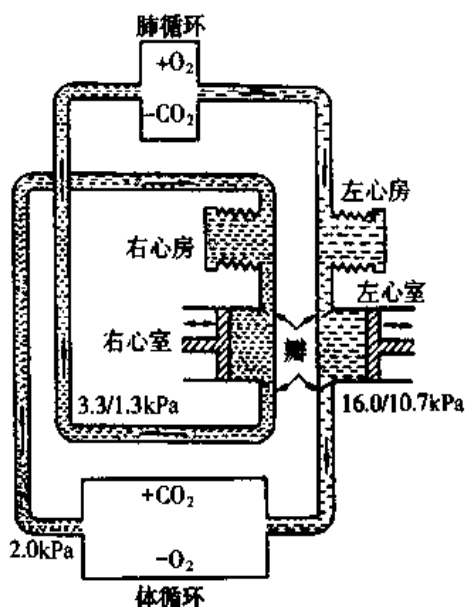


图 2-15 心脏做功的物理模型

$$A_L = E_{L2} - E_{L1}$$

同理，右心对单位体积血液所作的功  $A_R$  与单位体积血液进入右心室的能量  $E_{R1}$  和离开右心室的能量  $E_{R2}$  之间的关系为

$$A_R = E_{R2} - E_{R1}$$

心脏对单位体积血液所作的功  $A$  应为

$$A = A_L + A_R = (E_{L2} - E_{L1}) + (E_{R2} - E_{R1})$$

进入心脏时的血流速度和血压都很小，可视为零，并忽略血液进出心脏时的高度变化，则有

$$A = P_L + \frac{1}{2} \rho v_L^2 + P_R + \frac{1}{2} \rho v_R^2$$

式中  $\rho$  代表血液的密度， $P_L$  代表血液离开左心室时的平均压强(即主动脉平均血压)， $v_L$  代表离开左心室时的血流速度， $P_R$  代表血液离开右心室时的平均压强(即肺动脉平均血压)， $v_R$  代表离开右心室时的血流速度。因肺动脉平均血压大约是主动脉平均血压的  $1/6$ ，并且血液离开左、右心时的流速相同，所以

$$A = P_L + \frac{1}{2} \rho v_L^2 + \frac{1}{6} P_L + \frac{1}{2} \rho v_L^2 = \frac{7}{6} P_L + \rho v_L^2 \quad (2-24)$$

若测出主动脉血压及血液流速，可根据上式求出心脏做功多少，从而了解心功能的情况。

## 二、血流速度分布

我们知道，心脏的射血是断续的，但由于血管的弹性、血流本身的惯性以及内外摩擦等原因，使血液在血管中的流动基本上是连续的。当心脏收缩时，有相当数量的血液进入原已充满血液的主动脉内，使得该处的弹性管壁被撑开。此时，心脏推动血液所作的功转化为血管的弹性势能。心脏停止收缩，扩张了的那部分血管也跟着收缩，驱使血液向前流动，结果又使前面血管的管壁跟着扩张，如此类推。这种过程与波动在弹性介质中的传播类似，因此常称之为脉搏波。脉搏波的传播速度约为  $8 \sim 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ，应该注意，脉搏波的传播速度和血液的流速是不同的。

血液在循环系统中可近似视为不可压缩液体在管中作稳定流动。由于血管的垂直总截面从动脉到毛细血管逐渐增大，而从毛细血管到静脉又逐渐减小，由连续性原理可知，血流速度从动脉

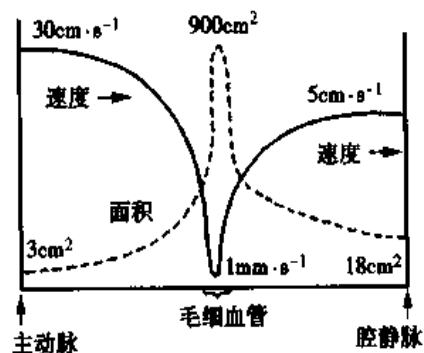


图 2-16 人体各类血管的总截面积和血液的平均流速间的关系

到毛细血管逐渐减慢，而从毛细血管到静脉又逐渐加快，如图 2-16 所示。但需要说明的是：①由于血管有分支，因而截面积  $S$  指的是同类血管的总截面积；②由于血液是粘性液体，血管中同一截面上靠近管壁和靠近轴心处的流速并不相等，因而流速  $v$  指的是截面上的平均流速。

### 三、血流过程中的血压分布

血压是血管内血液对管壁的侧压强，主动脉中的血压随着心脏的收缩和舒张周期性变化。当左心室收缩而向主动脉射血时，主动脉中的血压达到的最高值，称为收缩压。在左心室舒张期，主动脉回缩，将血液逐渐注入分支血管，血压随之下降达到的最低值称为舒张压。收缩压与舒张压之差，称为脉压。脉压随着血管远离心脏而减小，到了小动脉几乎消失。一个心动周期中动脉血压的平均值  $\bar{P}$  称为平均动脉压，常用来说明主动脉中血压的平均

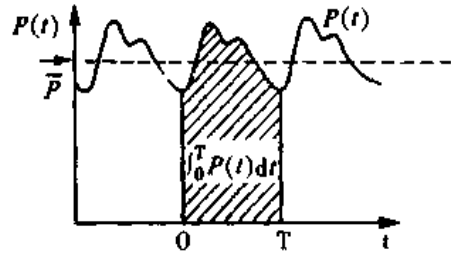


图 2-17 平均动脉压

情况，如图 2-17 所示， $\bar{P} = (1/T) \int_0^T P(t) dt$ ，平时常使用舒张压加上 1/3 脉压来估算。需要注意的是平均动脉压并不是收缩压和舒张压的平均值。

血压的高低与流量、流阻及血管的柔软程度有关。用生理学上的术语来说，就是与心输出量、外周阻力及血管的顺应性有关。由于血液是粘性流体，有内摩擦力做功消耗机械能，因此血压在体循环过程中不断下降。图 2-18 代表全部血液循环系统的血压变化曲线。

心脏内的血流情况比在血管中复杂的多，一是它的形态结构较特殊，另外它还受神经系统控制和外周血流的影响。近几年，有人利用磁共振成像技术，观察心流场的流线及涡旋，由此了解心脏的血流规律，为心脏内血液流动的研究提供一种新的方法。

血液的粘弹性和血液循环方面的知识在生理学和医学中十分重要，这方面的许多问题并不能只用物理学来解释，涉及生理学和医学方面的问题，这里不进行讨论。

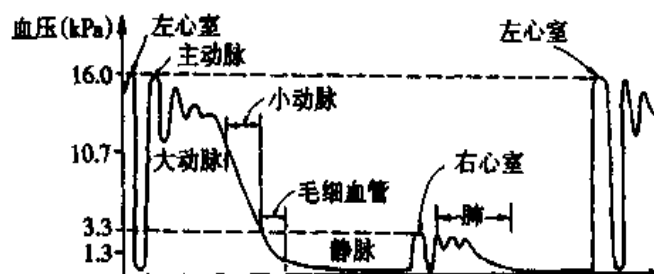


图 2-18 心血管系统的血压变化

## 思考题与习题二

2-1 有人认为从连续性方程来看管子愈粗流速愈小, 而从泊肃叶定律来看管子愈粗流速愈大, 两者似有矛盾, 你认为如何? 为什么?

2-2 水在粗细不均匀的水平管中作稳定流动, 已知截面  $S_1$  处的压强为  $110 \text{ Pa}$ , 流速为  $0.2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ , 截面  $S_2$  处的压强为  $5 \text{ Pa}$ , 求  $S_2$  处的流速(内摩擦不计)。 ( $0.5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ )

2-3 水在截面不同的水平管中作稳定流动, 出口处的截面积为管的最细处的 3 倍, 若出口处的流速为  $2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ , 问最细处的压强为多少? 若在此最细处开一小孔, 水会不会流出来? ( $85 \text{ kPa}$ )

2-4 在水管的某一点, 水的流速为  $2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ , 高出大气压的计示压强为  $10^4 \text{ Pa}$ , 设水管的另一一点的高度比第一点降低了  $1 \text{ m}$ , 如果在第二点处水管的横截面积是第一点的  $1/2$ , 求第二点处的计示压强。 ( $13.8 \text{ kPa}$ )

2-5 一直立圆柱形容器, 高  $0.2 \text{ m}$ , 直径  $0.1 \text{ m}$ , 顶部开启, 底部有一面积为  $10^{-4} \text{ m}^2$  的小孔, 水以每秒  $1.4 \times 10^{-4} \text{ m}^3$  的快慢由水管自上面放入容器中。问容器内水面可上升的高度? 若达到该高度时不再放水, 求容器内的水流尽需多少时间。 ( $0.1 \text{ m}; 11.2 \text{ s}$ )

2-6 试根据汾丘里流量计的测量原理, 设计一种测气体流量的装置。提示: 在本章第三节图 2-5 中, 把水平圆管上宽、狭两处的竖直管连接成 U 形管, 设法测出宽、狭两处的压强差, 根据假设的其他已知量, 求出管中气体的流量。

2-7 用皮托管插入流水中测水流速度, 设两管中的水柱高度分别为  $5 \times 10^{-3} \text{ m}$  和  $5.4 \times 10^{-2} \text{ m}$ , 求水流速度。 ( $0.98 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ )

2-8 一条半径为  $3 \text{ mm}$  的小动脉被一硬斑部分阻塞, 此狭窄段的有效半径为  $2 \text{ mm}$ , 血流平均速度为  $50 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-1}$ , 试求:

- (1) 未变窄处的血流平均速度; ( $0.22 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ )
- (2) 会不会发生湍流;
- (3) 狭窄处的血流动压强。 ( $133 \text{ Pa}$ )

2-9  $20^\circ\text{C}$  的水在半径为  $1 \times 10^{-2} \text{ m}$  的水平均匀圆管内流动, 如果在管轴处的流速为  $0.1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ , 则由于粘滞性, 水沿管子流动  $10 \text{ m}$  后, 压强降落了多少? ( $40 \text{ Pa}$ )

2-10 设某人的心输出量为  $0.83 \times 10^{-4} \text{ m}^3\cdot\text{s}^{-1}$ , 体循环的总压强差为  $12.0 \text{ kPa}$ , 试求此人体循环的总流阻(即总外周阻力)是多少  $\text{N}\cdot\text{S}\cdot\text{m}^{-5}$ ? ( $1.44 \times 10^8 \text{ N}\cdot\text{S}\cdot\text{m}^{-5}$ )

2-11 设橄榄油的粘度为  $0.18 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ , 流过管长为  $0.5 \text{ m}$ 、半径为  $1 \text{ cm}$  的管子时两端压强差为  $2 \times 10^4 \text{ Pa}$ , 求其体积流量。 ( $8.7 \times 10^{-4} \text{ m}^3\cdot\text{s}^{-1}$ )

2-12 假设排尿时, 尿从计示压强为  $40 \text{ mmHg}$  的膀胱经过尿道后由尿道口排出, 已知尿道长  $4 \text{ cm}$ , 体积流量为  $21 \text{ cm}^3\cdot\text{s}^{-1}$ , 尿的粘度为  $6.9 \times 10^{-4} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ , 求尿道的有效直径。 ( $1.4 \text{ mm}$ )

2-13 设血液的粘度为水的 5 倍, 如以  $72 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-1}$  的平均流速通过主动脉, 试用临界雷诺数为 1000 来计算其产生湍流时的半径。 ( $0.46 \text{ cm}$ )

2-14 一个红细胞可以近似的认为是一个半径为  $2.0 \times 10^{-6} \text{ m}$  的小球, 它的密度是  $1.09 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ 。试计算它在重力作用下在  $37^\circ\text{C}$  的血液中沉淀  $1 \text{ cm}$  所需的时间。假设血浆的粘度为  $1.2 \times 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ , 密度为  $1.04 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ 。如果利用一台加速度( $\omega^2 r$ )为  $10^5 g$  的超速离心机, 问沉淀同样距离所需的时间又是多少? ( $2.8 \times 10^4 \text{ s}; 0.28 \text{ s}$ )

(真 敬)

## 第三章 振动、波动和声波

---

学习本章后，你应：

1. 掌握简谐振动的基本规律，能求解有关简谐振动方程，掌握简谐振动的合成求法。
  2. 掌握波的传播规律，理解波动方程的物理意义，掌握波的干涉现象和规律，了解驻波的形成及规律。
  3. 了解声学的基本概念，理解声强级和响度级，了解超声波的特性及在医学中的应用。
- 

本章主要讨论振动和波动的基本规律，介绍声和超声的一些物理性质和规律，以及它们在医学中的应用。

### 第一节 简谐振动

简谐振动是一种最简单、最基本的振动，任何复杂的振动都可以看成是若干个简谐振动的合成。

#### 一、简谐振动方程

对于质量为  $m$  的物体与轻弹簧组成的弹簧振子，根据胡克定律，物体所受到的弹性力  $F$  与物体的位移成正比，即

$$F = -ks \quad (3-1)$$

根据牛顿第二定律，物体的运动方程表示为

$$m \frac{d^2s}{dt^2} = -ks$$

其中  $k$  为轻弹簧的劲度系数，负号表示弹性力  $F$  与物体位移  $s$  的方向相反。式中  $k$  和  $m$  均为正量，令  $k/m = \omega^2$ ，上式可写为

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \omega^2 s = 0 \quad (3-2)$$

这是二阶线性微分方程，其解可表示为

$$s = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (3-3)$$

这种用时间的余弦(或正弦)函数来描述的运动，称为简谐振动。式(3-2)或式(3-3)称

为简谐振动方程。

将式(3-3)对时间求一阶、二阶导数,得简谐振动物体的速度和加速度为

$$v = \frac{ds}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi) \quad (3-4)$$

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 s \quad (3-5)$$

## 二、简谐振动的特征量

对一定的简谐振动来说,  $A$ 、 $\omega$ 、和  $\varphi$  为常量, 它们是决定一具体简谐振动的特征量。

1. 振幅 振动物体离开平衡位置的最大位移  $A$  称为振幅。

2. 周期和频率 振动物体完成一次振动所需要的时间  $T$ , 称为振动周期。在单位时间内所完成的振动次数  $\nu$ , 称为频率。振动物体在  $2\pi$  秒内所完成的振动次数  $\omega$ , 称为角频率。显然  $\omega$ 、 $\nu$  和  $T$  三者的关系为

$$\begin{aligned} \nu &= 1/T \\ \omega &= 2\pi\nu = 2\pi/T \end{aligned} \quad (3-6)$$

$T$ 、 $\nu$  和  $\omega$  的单位分别是 s (秒)、Hz (赫兹) 和  $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$  (弧度/秒)。考虑到  $k/m = \omega^2$ , 并联系式(3-6)可知, 无阻尼自由振动的  $\omega$ 、 $\nu$  和  $T$  完全决定于振动系统本身的性质, 称为系统的固有角频率、固有频率和固有周期。

3. 相位和初相位 式(3-3)中的  $(\omega t + \varphi)$  称为简谐振动的相位。相位中的  $\varphi$  称为初相位, 单位是 rad (弧度)。在  $A$  和  $\omega$  已知的情况下, 振动物体在初始时刻的运动状态  $s_0$  和  $v_0$  完全取决于  $\varphi$ 。在式(3-3)和式(3-4)中令  $t=0$

$$\begin{aligned} s_0 &= A \cos \varphi \\ v_0 &= -\omega A \sin \varphi \end{aligned}$$

由以上两式可得

$$A = \sqrt{s_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \quad (3-7)$$

$$\varphi = \text{arctg} \frac{-v_0}{\omega s_0} \quad (3-8)$$

## 三、简谐振动的矢量图示法

简谐振动可以用一个旋转矢量来描绘。如图 3-1 所示, 在  $x$  轴上任取一点  $o$  为原点, 自  $o$  点起作一矢量  $A$ 。若矢量  $A$  以匀角速度  $\omega$  绕原点  $o$  逆时针旋转, 则矢量末端  $M$  在  $x$  轴上的投影点  $P$  就在  $x$  轴上作简谐振动。设在  $t=0$  时,  $A$  与  $x$  轴的夹角为  $\varphi$ , 经过时间  $t$  后,  $A$  与  $x$  轴的夹角变为  $(\omega t + \varphi)$ , 则投影点  $P$  相对于原点  $o$  的位移为

$$s = A \cos(\omega t + \varphi)$$

用一个旋转矢量末端在一条轴线上的投影点的运动来表示简谐振动, 这种方法称为简

谐振动的矢量图示法(见图 3-1)。

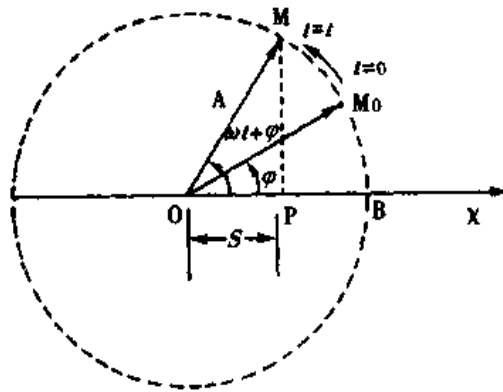


图 3-1 简谐振动的矢量图示法

#### 四、简谐振动的能量

现在以弹簧振子为例来讨论简谐振动中能量的转换和守恒问题。弹簧振子的位移和速度分别由式(3-3)和式(3-4)给出。在任意时刻,系统的动能和弹性势能分别为

$$E_k = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \quad (3-9)$$

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \varphi) \quad (3-10)$$

可见系统的动能和势能都随时间作周期性变化。位移(绝对值)最大时,势能达最大值,动能为零;物体通过平衡位置时,势能为零,动能达最大值。

考虑到  $k = m\omega^2$ , 由式(3-9)和式(3-10)得弹簧振子的总机械能为

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} k A^2 \quad (3-11)$$

即振动系统的总机械能在振动过程中守恒,该结论对任一简谐振动系统都是正确的。

### 第二节 阻尼振动、受迫振动和共振

#### 一、阻尼振动

任何实际的振动都必然要受到摩擦和阻力的阻尼作用而损失能量,因而振幅也随之减小。振幅随时间减小的振动,称为阻尼振动。

实验表明,当物体以不太大的速度运动时,阻力与物体的速度大小成正比,而与物体速度的方向相反,阻力的大小用阻尼因子  $\beta$  来描述。在阻尼较小的情况下,阻尼振动的周期可表示为

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \quad (3-12)$$

式中的  $\omega_0$  称为振动系统的固有角频率。可见,由于阻尼的存在,周期变长了,频率

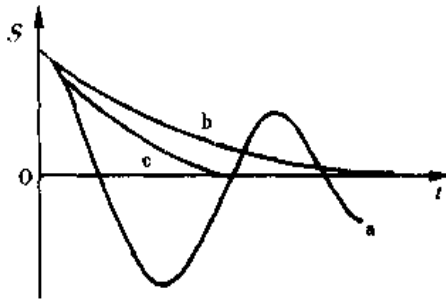


图 3-2 阻尼振动曲线

如图 3-2 曲线 c 所示。

变小了，即振动变慢了。阻尼振动的振幅按指数曲线衰减，如图 3-2 曲线 a 所示。

如阻尼较大，以致  $\beta^2 > \omega_0^2$ ，这时运动已不是周期性的了。偏离平衡位置的距离随时间按指数规律衰减，以致需要较长时间系统才能到达平衡位置，这种状态称为过阻尼状态，如图 3-2 曲线 b 所示。

如阻尼的影响介于前两者之间，且  $\beta^2 = \omega_0^2$ ，系统很快的回到平衡位置并停下来，称为临界阻尼状态，如图 3-2 曲线 c 所示。

## 二、受迫振动

在驱动力(周期性外力)作用下发生的振动，称为受迫振动。受迫振动是物体在阻尼力、弹性力和驱动力的共同作用下进行的。当受迫振动达到稳定状态时，振幅保持不变。驱动力对系统作正功，输入的能量恰好补偿因阻尼所损失的能量。设驱动力为  $F = F_m \cos \omega' t$ ，其中  $F_m$  为力幅， $\omega'$  为驱动力的角频率。理论证明，受迫振动的稳态方程为

$$s = A \cos(\omega' t + \varphi) \quad (3-13)$$

其中

$$A = \frac{F_m}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega'^2)^2 + 4\beta^2 \omega'^2}} \quad (3-14)$$

$$\varphi = \arctg \frac{-2\beta\omega'}{\omega_0^2 - \omega'^2} \quad (3-15)$$

式中  $m$  为振动体的质量。可见，稳定状态的受迫振动是一个与简谐驱动力同频率的简谐振动。

## 三、共振

当驱动力角频率接近系统的固有角频率时，受迫振动振幅急剧增大的现象，称为共振。利用式(3-14)求振幅的极大值，令变量  $\omega'$  等于共振角频率  $\omega_r$ ，可求得

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \quad (3-16)$$

代入式(3-14)，得共振时最大振幅值

$$A_r = \frac{F_m}{2\beta m \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \quad (3-17)$$

可见， $\beta$  越大，共振角频率越低，共振振幅也越小； $\beta$  越小，共振频率越接近系统的固有频率，共振振幅也越大(见图 3-3)。

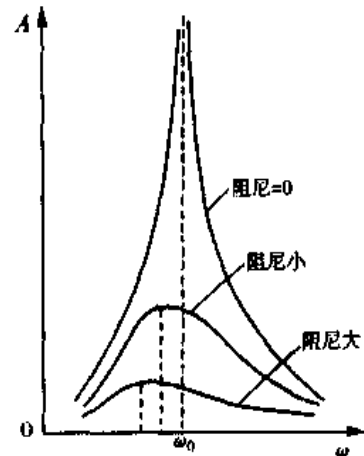


图 3-3 共振曲线

不同频率的振动能激起人体不同部位的共振，对人体造成危害。共振的概念在声学、原子过程、磁共振等方面有着广泛的应用。

### 第三节 简谐振动的合成

#### 一、两个同方向、同频率简谐振动的合成

设两个在同一直线上进行的同频率的简谐振动，在任一时刻  $t$  的位移分别为

$$s_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$s_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

由于这两个位移在同一直线上，因此合位移  $s$  是  $s_1$  和  $s_2$  的代数和，它们的合振动可以应用简谐振动的矢量图示法求得，如图 3-4 所示。两个分振动分别与旋转矢量  $A_1$  和  $A_2$  相对应，在  $t=0$  时， $A_1$ 、 $A_2$  与  $x$  轴的夹角分别为  $\varphi_1$ 、 $\varphi_2$ 。由于  $A_1$ 、 $A_2$  以相同的角速度  $\omega$  逆时针旋转，所以它们之间的夹角不变，因而合矢量  $A$  的大小亦不变。从图中可以看出，任一时刻合矢量  $A$  在  $x$  轴上的投影  $s$  正好等于该时刻  $A_1$  和  $A_2$  在  $x$  轴上的投影  $s_1$  和  $s_2$  的代数和。因此，矢量  $A$  就是合振动所对应的旋转矢量，合振动的运动方程为

$$s = A \cos(\omega t + \varphi)$$

可见，合振动是一简谐振动，频率与分振动频率相同。利用矢量合成法按几何关系，由图 3-4 可以求得合振动的振幅  $A$  和初相位  $\varphi$  分别为

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \quad (3-18)$$

$$\varphi = \arctg \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} \quad (3-19)$$

由式(3-18)和式(3-19)可知，合振动的振幅和初相位都与两个分振动的振幅和初相位有关。对于  $k=0, 1, 2, \dots$ ，得

- (1) 若相位差  $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2k\pi$  时， $A = A_1 + A_2$ ，合振幅最大。
- (2) 若相位差  $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm (2k+1)\pi$  时， $A = |A_1 - A_2|$ ，合振幅最小。
- (3) 当相位差取其他值时， $|A_1 - A_2| < A < A_1 + A_2$ 。

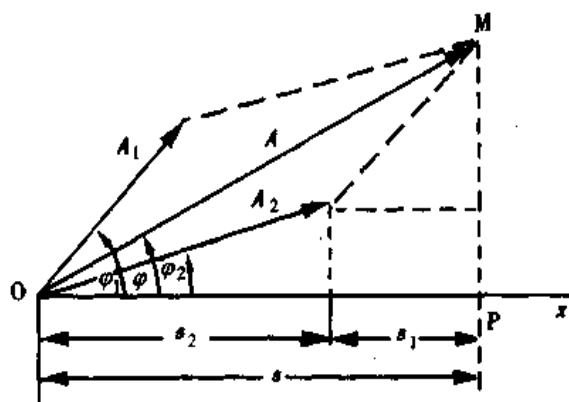


图 3-4 同方向、同频率简谐振动的合成  
(矢量图示法)



## 二、同方向、不同频率的简谐振动的合成

如果两个同方向简谐振动的频率不同，则在矢量图中两个旋转矢量间的夹角或相位差将随时间变化，因而合矢量的长度和转动角速度都将随时间而变化，合矢量的投影不再是简谐振动。图 3-5 表示两个频率比为 1:3，振幅一定的两个简谐振动的合成，虚线和点状线分别代表分振动，实线代表它们的合振动。图 3-5 (a)、(b)、(c)，分别表示三种不同的初相位差所对应的合振动，由于初相位差的不同，合成结果就不一样。合振动不再是简谐振动，但仍然是周期性振动，而且合振动的频率与分振动中的最低频率相等。不难理解，合振动的形式由分振动的频率、振幅及初相位差而定。两个以上的简谐振动合成时，若它们的频率又都是最低频率的整数倍，上述结论仍然正确。其中最低的频率称为基频，其他分振动的频率称为倍频。

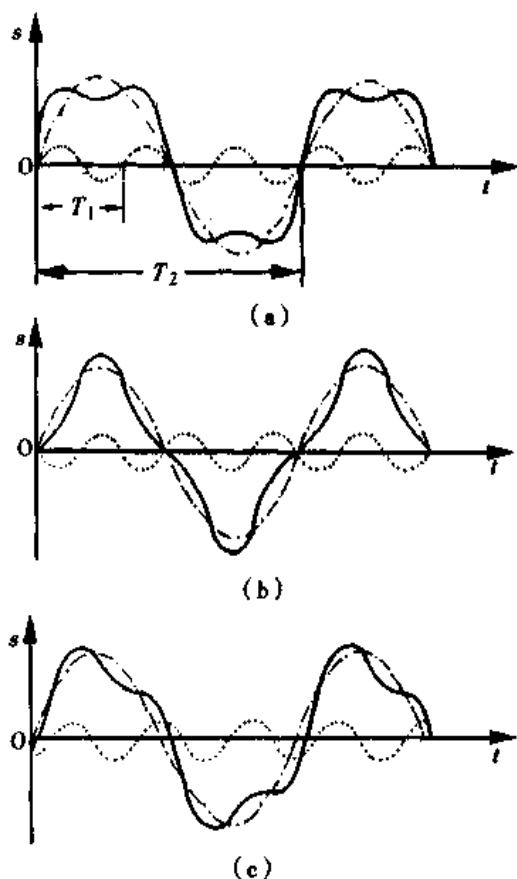


图 3-5 两个频率之比为 1:3 的简谐振动的合成

这些振动的角频率分别为  $\omega$  (基频) 和  $\omega$  的整数倍 (倍频  $2\omega$ 、 $3\omega$ …), 可用傅里叶级数表示为

$$s(t) = A_0 + A_1 \cos \omega t + A_2 \cos 2\omega t + \dots + B_1 \sin \omega t + B_2 \sin 2\omega t + \dots \quad (3-20)$$

式中系数  $A_1$ 、 $A_2$ … 及  $B_1$ 、 $B_2$ …，就是各简谐振动的振幅， $A_0$  为  $s(t)$  在一周期内的平均值。这种将一个复杂的周期性振动分解为一系列简谐振动的办法，称为频谱分析。频谱分析可借助于频谱分析仪来完成。在进行频谱分析时，所取级数的项数越多，其合成情况与实际情况就越接近。

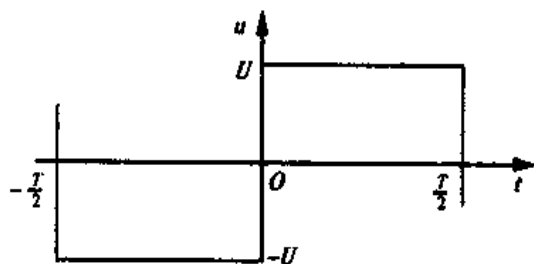
例如，某电压  $u(t)$  随时间作周期为  $T$ 、振幅为  $U$  的矩形振动 (方波)，如图 3-6 (a) 所示。按傅里叶级数展开为

$$u(t) = \frac{4U}{\pi} \left( \sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots \right)$$

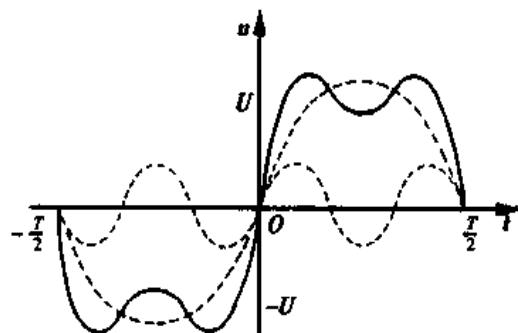
上式表明：方波是有一系列不同频率的正弦波叠加而成的，这些正弦波的频率依次为基频的奇数倍。图 3-6 (b) 和图 3-6 (c) 是取前 2 项和前 4 项合成时的方波波形。

## 三、振 动 谱

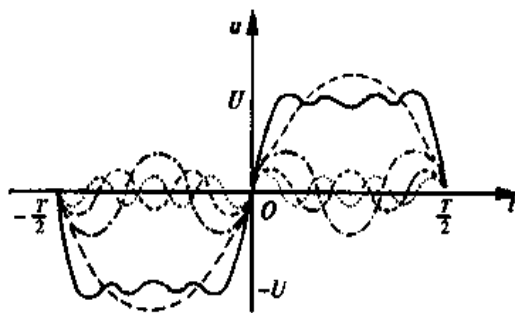
与振动的合成相反，任一角频率为  $\omega$  的复杂周期性振动  $s(t)$  都能被分解为不同频率及不同振幅的一系列简谐振动，



(a) 方波  $u(t)$  的图像



(b)  $u(t) = \frac{4U}{\pi}(\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t)$  的图像



(c)  $u(t) = \frac{4U}{\pi}(\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \frac{1}{7} \sin 7\omega t)$  的图像

图 3-6 方波  $u(t)$  的图像

将一周周期性振动展开为傅里叶级数的结果，可以直观地表示为：以角频率  $\omega$  为横坐标，相应的振幅为纵坐标作出的频谱图。图 3-7 画出了方波的频谱图，其中每一条线称为谱线，长度代表相应频率的分振动的振幅值。一般来说，频率越高的简谐振动的振幅就越小，对合振动的贡献也越小。实际应用中，可根据要求精度取有限项数即可。

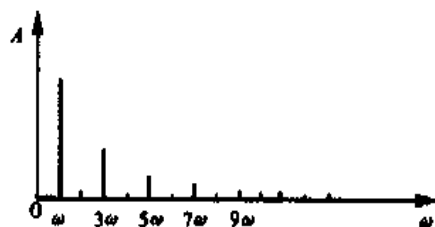


图 3-7 方波的频谱

频谱分析在理论研究和实际应用中都有着十分重要的意义，如在医学上，对发声、听觉、心电图和脑电图等进行定量分析，绘出频谱图，可为诊断各种疾病提供依据。

#### 四、两个同频率、互相垂直的简谐振动的合成

设两个频率相同的简谐振动在相互垂直的  $x$ 、 $y$  轴上进行，振动方程为

$$x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

合并两式，消去  $t$  得合成振动的轨迹方程

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (3-21)$$

一般来说，这是个椭圆方程。图 3-8 表示相位差为某些值时合成振动的轨迹。可见，合振动在一直线、椭圆或圆上进行。轨迹的形状和运动方向由分振动振幅的大小和相位差决定。

如果两个分振动的频率接近，其相位差将随时间缓慢地变化，合振动轨迹将不断按图 3-8 所示的顺序变化，即在图中所示的矩形范围内由直线变成椭圆再变成直线，并不断重复下去。

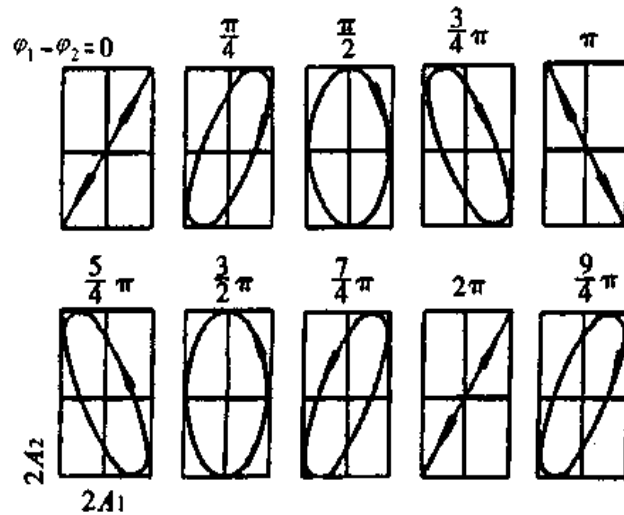


图 3-8 两个同频率、互相垂直的简谐振动的合成

## 第四节 机械波

### 一、机械波的产生

在弹性介质中，由于弹性力的联系，某个质点因外界扰动而引起振动时，周围的质点也会跟着振动起来。这样，振动由近及远地传播出去。机械振动在弹性介质中的传播过程，称为机械波。由此可见，机械波的产生，首先要有机械振动的物体作为波源，其次要有能够传播这种机械振动的弹性介质。简谐振动的传播，称为简谐波。

质点振动方向与波的传播方向垂直的波称为横波。质点振动方向与波的传播方向平行的波称为纵波。在波动过程中，传播的只是振动的状态，介质中各个质点仅在各自的平衡位置附近振动，并不随波前进。

### 二、波面和波线

对波作几何描述时，把某一时刻振动相位相同的点连成的面称为波面。最前面的波面称为波前。

在各向同性的均匀介质中，波动在各个方向的传播速度相同，点波源所产生的波面是一系列同心球面，称为球面波。波面为平面的波，称为平面波。表示波传播方向的线称为波线。波线与波面相垂直(见图 3-9)。

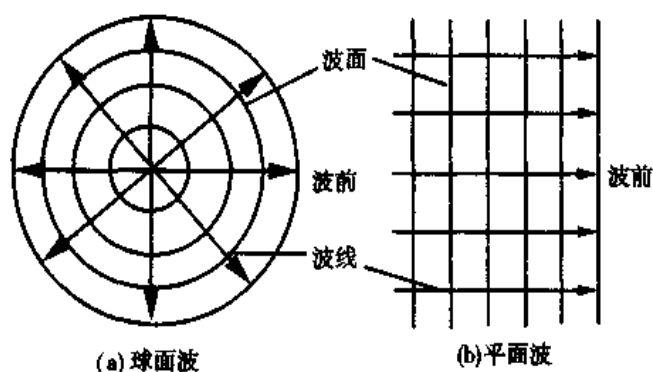


图 3-9 波面与波线

### 三、波速、波长、波的周期和频率

波速是单位时间内振动传播的距离。机械波的波速决定于介质的弹性模量和密度等。弹性模量是介质弹性的反映，密度则是介质质点惯性的反映。固体中既能传播与剪切弹性有关的横波，又能传播与体变或拉伸弹性有关的纵波。在固体中，横波和纵波的波速分别为

$$u = \sqrt{G/\rho} \text{ (横波)}$$

$$u = \sqrt{E/\rho} \text{ (纵波)} \quad (3-22)$$

式中， $G$  和  $E$  分别为介质的切变模量和杨氏模量。液体和气体中只能传播与体变弹性有关的纵波。在液体和气体中，纵波的波速为

$$u = \sqrt{K/\rho} \quad (3-23)$$

式中  $K$  为体积模量。

在波动中，同一波线上两个相位差为  $2\pi$  的点之间的距离称为波长，用  $\lambda$  表示。一个完整的波通过波线上某点所需的时间称为波的周期，用  $T$  表示。周期的倒数称为波的频率，即单位时间内通过波线上某点的完整波的数目，用  $\nu$  表示。因为在一个周期内波前进一个波长的距离，所以波速

$$u = \lambda/T = \lambda\nu \quad (3-24)$$

同一波在不同介质中波速不同，而周期(或频率)不变，所以波长随介质而改变。

## 第五节 波动方程

简谐波是最简单最基本的波。一切复杂的波都可看成是由多个简谐振动的传播所构成的波合成的。

如图 3-10 所示，设波以速度  $u$  沿  $ox$  方向无衰减的传播。令在  $o$  点的质点振动初相位为  $\varphi$ ，则  $o$  点的振动方程为

$$s_o = A \cos(\omega t + \varphi)$$

现在来考虑  $x$  轴上距原点  $o$  为  $x$  的任一点  $P$  的振动情况。振动从  $o$  点传到  $P$  点所需的时间为  $x/u$ ,  $P$  处质点的振动较  $o$  处质点推迟了  $x/u$ ,  $P$  处质点在  $t$  时刻的位移等于  $o$  处质点在  $t-x/u$  时刻的位移。因此,  $P$  点处的质点振动方程应为:

$$s = A \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right] \quad (3-25)$$

上式表示位移  $s$  是时间  $t$  和质点位置  $x$  的函数, 称为平面简谐波的波动方程。由  $\omega$ 、 $\nu$ 、 $T$ 、 $\lambda$ 、和  $u$  诸量之间的关系, 上式可写成其他形式

$$s = A \cos \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + \varphi \right] = A \cos \left[ 2\pi \left( \nu t - \frac{x}{\lambda} \right) + \varphi \right] = A \cos [(\omega t - kx) + \varphi] \quad (3-26)$$

式中  $k = 2\pi/\lambda$ , 称为波数, 表示在  $2\pi$  (m) 内所包含完整波的数目。若将式(3-26)分别对  $t$  和  $x$  求二阶导数, 得

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -A\omega^2 \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right]$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = -A \frac{\omega^2}{u^2} \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right]$$

比较两式, 得 
$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \quad (3-27)$$

上式称为波动方程的微分形式, 式(3-25)是式(3-27)的一个解。

在波动方程中含有  $x$  和  $t$  两个自变量: ①对于给定时刻  $t$  来说, 位移  $s$  仅是  $x$  的函数, 这时波动方程表示在某一时刻在直线  $ox$  上各点的位移分布, 即该时刻的波形。②对一给定距离  $x$  来说, 位移  $s$  仅是  $t$  的函数, 表明该点在各时刻的振动情况。③  $t$  和  $x$  都在变化时, 波动方程表示沿波的传播方向上各个不同点在不同时刻的位移, 反映了波形的传播。

如果波动向  $x$  轴的负方向传播, 图 3-10 中  $P$  质点比  $o$  处质点早开始振动, 因此, 波动方程为

$$s = A \cos \left[ \omega \left( t + \frac{x}{u} \right) + \varphi \right] \quad (3-28)$$

**[例题 3-1]** 一波源以  $s = 0.04 \cos 2.5\pi t$  (m) 的形式作简谐振动, 并以  $100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  的速度在某种介质中传播。试求: ①波动方程; ②在波源起振后  $1.0 \text{ s}$ , 距波源  $20 \text{ m}$  处质点的位移及速度。

解: (1) 根据题意, 波动方程为

$$s = 0.04 \cos 2.5\pi (t - x/100) \quad (\text{m})$$

(2) 在  $x = 20 \text{ m}$  处质点的振动为

$$s = 0.04 \cos 2.5\pi (t - 0.2) \quad (\text{m})$$

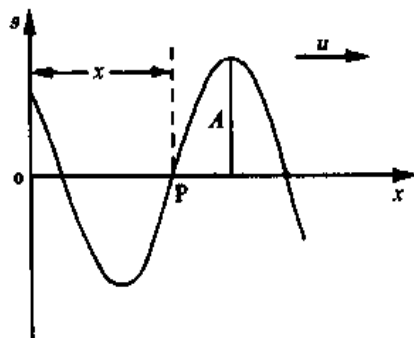


图 3-10 波动方程的推导

在波源起振后 1.0 s, 该处质点的位移为

$$s = 0.04\cos 2.0\pi = 4 \times 10^{-2}(\text{m})$$

该处质点的速度为

$$\begin{aligned}v &= ds/dt = -\omega A \sin 2.5\pi(t - 0.2) \\ &= -2.5\pi \times 0.04 \sin 2.0\pi (\text{m} \cdot \text{s}^{-1}) = 0\end{aligned}$$

由此可见, 质点的振动速度与波的传播速度是两个完全不同的概念。

## 第六节 波的能量

### 一、波的能量

波传播时, 介质中各质点要产生振动, 同时介质要发生形变, 因而具有动能和弹性势能。设一平面简谐波, 以速度  $u$  在密度为  $\rho$  的均匀介质中传播, 其波动方程用式 (3-25) 表示。可以证明, 在任意坐标  $X$  处取体积元  $\Delta V$ , 在时刻  $t$  的动能  $E_k$  和势能  $E_p$  为

$$E_k = E_p = \frac{1}{2} \rho \Delta V A^2 \omega^2 \sin^2 \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right] \quad (3-29)$$

可见, 该体积元的动能和势能完全相同, 都是时间的周期函数, 并且大小相等、相位相同。体积元  $\Delta V$  中的总能量为

$$E = E_k + E_p = \rho \Delta V A^2 \omega^2 \sin^2 \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right] \quad (3-30)$$

上式表明体积元的总能量在零和幅值  $\rho \Delta V A^2 \omega^2$  之间周期性变化。在能量由零增大到幅值的过程中, 该体积元吸收能量; 在能量由幅值减小到零的过程中, 该体积元放出能量, 这就是波动传递能量的机制。

介质中单位体积的波动能量, 称为波的能量密度, 即

$$w = \frac{E}{\Delta V} = \rho A^2 \omega^2 \sin^2 \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right] \quad (3-31)$$

能量密度在一个周期内的平均值, 称为平均能量密度。因为正弦函数的平方在一个周期内的平均值是  $1/2$ , 即

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right] dt = \frac{1}{2}$$

所以平均能量密度为

$$\bar{w} = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 \quad (3-32)$$

上式对横波和纵波都使用。

### 二、波的强度

波的能量是随波传播的。设在介质中垂直于波速  $u$  取面积  $S$ , 则在一个周期内通过该面的能量等于体积  $uTS$  中的能量, 即  $\bar{w}uTS$ 。单位时间内通过与波线垂直的单位

面积的平均能量，称为波的强度，用  $I$  表示

$$I = \frac{\bar{w}TS}{TS} = \bar{w}u = \frac{1}{2} \rho u A^2 \omega^2 \quad (3-33)$$

单位是  $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ 。上式表明，波的强度与振幅的平方、频率的平方成正比。

### 三、波的衰减

机械波在介质中传播时，它的强度将随着传播距离的增加而减弱，振幅也随之减小，这种现象称为波的衰减。导致波衰减的主要原因有：①由于波面的扩大造成单位截面积通过的波的能量减少，称为扩散衰减。②由于散射使沿原方向传播的波的强度减弱，称为散射衰减。③由于介质的粘滞性(内摩擦)等原因，波的能量随传播距离的增加逐渐转化为其他形式的能量，这种现象称为介质对波的吸收。以下主要讨论吸收衰减的规律。

设平面波在均匀介质中沿  $x$  轴正方向传播，在  $x=0$  处入射波的强度为  $I_0$ ，在  $x$  处强度为  $I$ ，通过厚度为  $dx$  的一层介质时，由于介质的吸收，波的强度减弱了  $-dI$ 。实验表明

$$-dI = \mu I dx$$

比例系数  $\mu$  与介质的性质和波的频率有关，称为介质的吸收系数。解这一微分方程，并利用边界条件： $x=0, I=I_0$ ，得

$$I = I_0 e^{-\mu x} \quad (3-34)$$

上式表明平面波的强度在传播过程中按指数规律衰减。

## 第七节 惠更斯原理

### 一、惠更斯原理

在介质中，任何一个质点的振动都将直接引起临近各质点的振动。惠更斯原理表述为：介质中波前上的每一点都可以看作新波源，向各个方向发射子波；在其后的任一时刻，这些子波的包迹就是该时刻的新波前。

应用惠更斯原理，可从已知的波前用几何作图法求出下一时刻的新波前，因而解决了波的传播方向问题。图 3-11 (a) 中，波动从波源  $o$  出发，以速度  $u$  向四周传播，已知  $t$  时刻的波前是半径为  $R_1$  的球面  $S_1$ ，要找出  $t + \Delta t$  时刻的波前  $S_2$ ，先以  $S_1$  上各点为球心(子波源)，以  $u\Delta t$  为半径，画一系列半球形子波，再作这些子波的包迹面，就是新波前  $S_2$ 。平面波的情况，如图 3-11 (b) 所示。

### 二、解释波的衍射

图 3-11 (c) 中，让平面波垂直入射到有狭缝  $AB$  的障碍物上时，应用惠更斯原理作出下一时刻的波前，这个新波前除中央部分仍为平面外，靠近狭缝边缘部分发生弯曲。因为在各向同性的介质中，波线垂直于波面，所以边缘的波线改变了原来的方

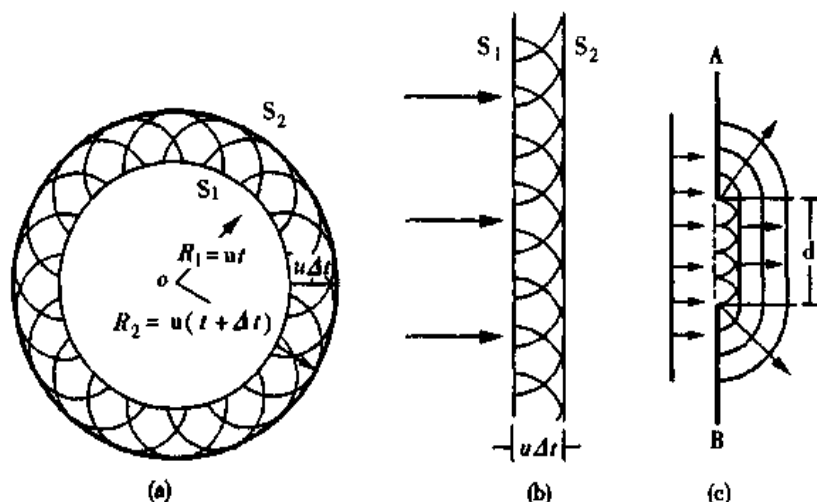


图 3-11 用惠更斯原理求波面

向，这表明波动能绕过障碍物传播，这种现象称为波的衍射。

实践和理论都证明，不是在任何情况下都发生明显的衍射现象。只有当波面上被阻挡部分的线度(即障碍物的线度)或者波面上未被阻挡部分的线度(即孔或缝的线度)比入射波长短或差不多时，才能发生明显的衍射现象。衍射现象是波独具特征之一。

应用惠更斯原理还可解释波的反射和折射。

## 第八节 波的干涉

### 一、波的叠加原理

实验表明：几列波可以互不影响地同时通过某一区域；在相遇处，任一质点的位移是各列波在该点所引起的振动位移的矢量和。这种波动传播的独立性及在相遇处的振动合成，称为波的叠加原理。例如，各种音乐声波传入人耳时，人们仍能分辨，而不混淆。

### 二、波的干涉

一般来说，振幅、频率和相位都不同的几列波在某一点叠加时，引起的合振动是很复杂的。满足频率相同、振动方向相同、初相位相同或相位差恒定的两列波相遇时，在叠加区域的某些位置上，振动始终加强，而在另一些位置上振动始终减弱或完全抵消，这种现象称为波的干涉。满足上述三个条件，能产生干涉现象的波，称为相干波，相应的波源称为相干波源。

设有两个相干波源  $o_1$  和  $o_2$ ，其振动方程分别为

$$s_{o1} = A_{o1} \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$s_{o2} = A_{o2} \cos(\omega t + \varphi_2)$$

若介质是均匀各向同性的，叠加区中任一点 P 到两波源的距离分别为  $r_1$  和  $r_2$ ，两波



在 P 点的振幅分别为  $A_1$  和  $A_2$ , 则 P 点的两个分振动分别为

$$s_1 = A_1 \cos\left(\omega t + \varphi_1 - \frac{2\pi r_1}{\lambda}\right)$$

$$s_2 = A_2 \cos\left(\omega t + \varphi_2 - \frac{2\pi r_2}{\lambda}\right)$$

P 点的合振动方程为

$$s = s_1 + s_2 = A \cos(\omega t + \varphi)$$

式中

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos\left(\varphi_2 - \varphi_1 - 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda}\right)} \quad (3-35)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{A_1 \sin\left(\varphi_1 - \frac{2\pi r_1}{\lambda}\right) + A_2 \sin\left(\varphi_2 - \frac{2\pi r_2}{\lambda}\right)}{A_1 \cos\left(\varphi_1 - \frac{2\pi r_1}{\lambda}\right) + A_2 \cos\left(\varphi_2 - \frac{2\pi r_2}{\lambda}\right)} \quad (3-36)$$

因为两个相干波在 P 点所引起的两个分振动的相位差:  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 - 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda}$  是一个常量, 合振幅  $A$  也是一个常量。由合振幅  $A$  的表达式可知, 适合式(3-37)的各点, 合振幅最大,  $A = A_1 + A_2$ , 称为干涉加强。而适合式(3-38)的各点, 合振幅最小,  $A = |A_1 - A_2|$ , 称为干涉减弱。若  $A_1 = A_2$ , 则  $A = 0$ , 称为干涉相消。

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 - 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} = \pm 2k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3-37)$$

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 - 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} = \pm (2k + 1)\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3-38)$$

如果  $\varphi_1 = \varphi_2$ , 即对于初相位相同的相干波源,  $\Delta\varphi$  只决定于两个波源到点 P 的路程差或称为波程差  $\delta = r_2 - r_1$ 。当

$$\delta = r_2 - r_1 = \pm 2k \frac{\lambda}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3-39)$$

即波程差等于半波长的偶数倍时, P 点为干涉加强; 当

$$\delta = r_2 - r_1 = \pm (2k + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3-40)$$

即波程差等于半波长的奇数倍时, P 点为干涉减弱。

干涉现象是波独有的又一特征。

### 三、调幅波

设两个振幅相等、初相位均为零的波以接近的频率和波长在同一空间区域、沿同方向传播, 由式(3-26), 波动方程可以分别表示为

$$s_1 = A \cos[(k + \Delta k)x - (\omega + \Delta\omega)t]$$

$$s_2 = A \cos[(k - \Delta k)x - (\omega - \Delta\omega)t]$$

合成波为

$$s = s_1 + s_2 = 2A \cos(\Delta kx - \Delta \omega t) \cos(kx - \omega t) \quad (3-41)$$

式(3-41)可以解释为一个高频率  $\omega$  的迅变波, 其振幅被一个频率  $\Delta\omega$  很低的包络所调制(见图 3-12)。调制因子为  $2A \cos(\Delta kx - \Delta \omega t)$ 。合成波振幅本身(合成波的包络)形成一个波, 这个波相对合成波而言是缓慢变化的, 称为调幅波。由式(3-41)可列出两个特征速度来。一个是具有一定相位的点的传播速度  $u = \omega/k$ , 这种振动状态的传播过程也就是相位的传播过程, 因此也称为相速度。另一个是调制包络的运动速度, 即图 3-12 中虚线表示的波的传播速度。由于包络包裹着一群短波, 称为群速度。定义为  $u_g = \Delta\omega/\Delta k \rightarrow d\omega/dk$ 。因为  $\omega = uk$ , 得

$$u_g = u + k \frac{du}{dk}$$

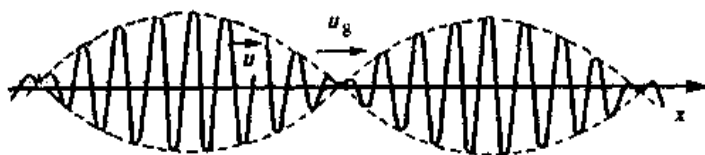


图 3-12 调幅波的相速度、群速度

若相速度  $u$  与频率无关, 则  $du/dk = 0$ , 此时  $u_g = u$ 。因此, 在非色散介质中, 相速度和群速度之间没有差别, 但在色散介质中, 它们可以是不同的。

#### 四、驻 波

当两列振幅相同的相干波沿同一直线相向传播时, 合成波是一种波形不随时间变化的波, 称为驻波。驻波是一种特殊的相干波。

设有两列振幅相同的相干波分别沿  $x$  轴正方向(短虚线)和负方向(长虚线)传播(见图 3-13), 取两波的振动相位始终相同的点作为坐标轴的原点, 并且在  $x = 0$  处振动质点向上移动到最大位移时开始计时, 即使该处质点振动的初相位为零。沿  $x$  轴正、负方向传播的波分别表示为

$$s_1 = A \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

$$s_2 = A \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right)$$

利用三角公式求得合成波方程为

$$s = s_1 + s_2 = \left( 2A \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \right) \cos 2\pi \frac{t}{T} \quad (3-42)$$

上式就是驻波方程。方程中括号内的项与时间无关, 取绝对值就是振幅, 且随位置不同作余弦变化。括号外右边的项是时间的函数, 说明各点都在作简谐振动

振幅最大的位置, 称为波腹。波腹的位置应满足

$$\left| \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \right| = 1, \quad \frac{2\pi x}{\lambda} = \pm k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

波腹位于

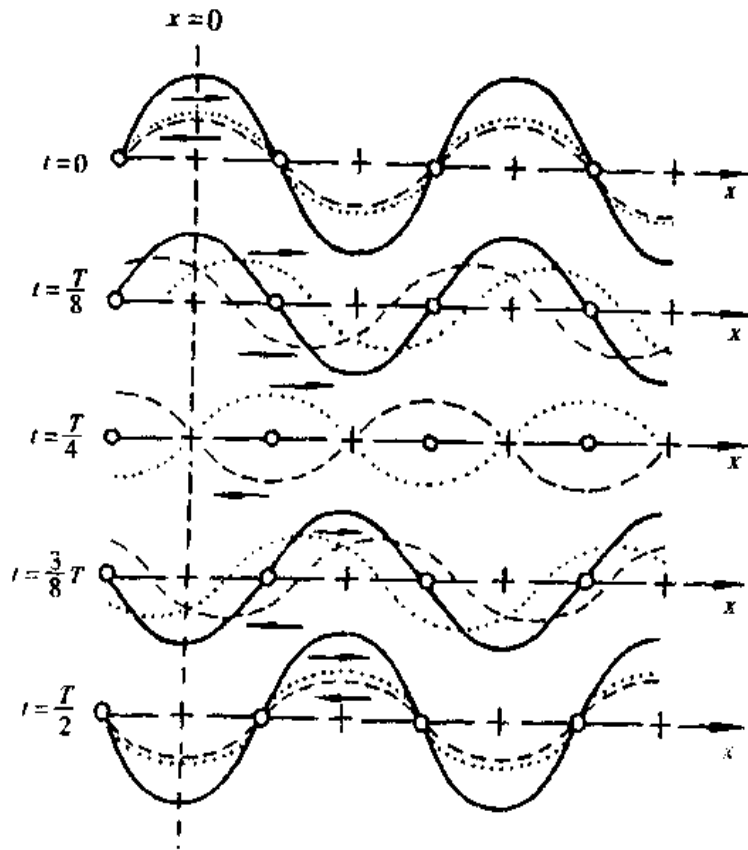


图 3-13 驻波的形成

$$x = \pm k \frac{\lambda}{2}, \quad k=0, 1, 2, \dots \quad (3-43)$$

振幅为零，即静止不动的位置，称为波节。波节的位置应满足

$$\left| \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \right| = 0, \quad \frac{2\pi x}{\lambda} = \pm (2k+1) \frac{\pi}{2}, \quad k=0, 1, 2, \dots$$

波节位于

$$x = \pm (2k+1) \frac{\lambda}{4}, \quad k=0, 1, 2, \dots \quad (3-44)$$

由式(3-43)和式(3-44)可见，相邻两波腹或两波节之间的距离都是半波长。

当驻波形成时，两相邻波节之间各点的振动方向相同、相位相同，故各点必定同时达到最大位移，又同时通过平衡位置。达到最大位移时，各质点的速度为零，即动能为零。波节两侧的点振动方向相反、相位相反，故波节处的形变量大，所以驻波的能量以弹性势能的形式集中于波节附近。当介质质点通过平衡位置时，各处形变都随之消失，弹性势能为零，驻波的能量以动能的形式集中于波腹附近。可见，驻波中没有能量的定向传播，波腹附近的动能与波节附近的势能之间不断进行相互转换和转移。

驻波可以用实验演示，如图 3-14 所示。音叉末端系一水平的细绳 AB，B 处有一尖劈，可以左右移动，调节 AB 间的距离。重物 M 使绳产生张力。音叉振动时，绳上产生波动，向右传播，在 B 点产生反射，反射波向左传播。这样，入射波和反射波在同一绳子上沿相反方向传播，它们相互干涉，就能在绳子上产生驻波。

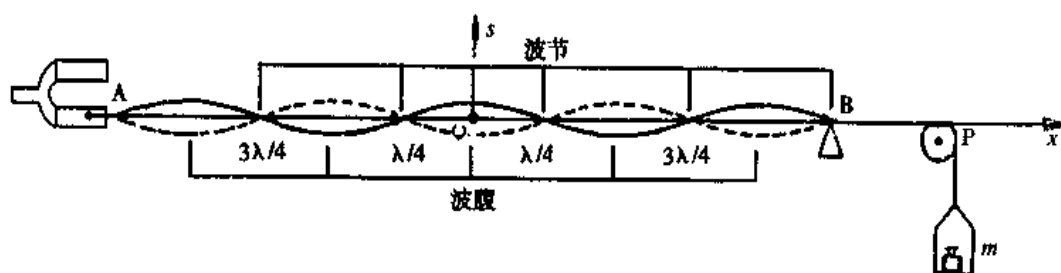


图 3-14 驻波

## 第九节 声 波

频率在 20~20 000Hz 的机械纵波可以引起人的听觉,称为声波。频率低于 20Hz 的机械波称为次声波,频率高于 20 000Hz 的机械波称为超声波。次声波、声波和超声波仅频率不同,无本质上的区别。

### 一、声压和声强

**1. 声压** 当声波在介质中传播时,介质的密度作周期性变化,稠密时压强大,稀疏时压强小。在某一时刻,介质中某一点的压强与无声波通过时的压强之差,称为该点的瞬时声压,单位是  $\text{N}\cdot\text{m}^{-2}$ 。显然,声压是空间和时间的函数。

设声波为平面简谐波,则由式(3-25)可以得出,介质中某点声压  $P$  的变化规律为

$$P = \rho u \omega A \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) + \varphi + \frac{\pi}{2} \right] \quad (3-45)$$

上式称为声压方程。可见,声波既可表示为位移波,也可以表示为压强波,两者之间存在  $\pi/2$  的相位差。令  $P_m = \rho u \omega A$ ,称为声压幅值,简称声幅。

**2. 声阻抗** 介质质点振动速度的幅值  $v_m = \omega A$ ,有

$$\frac{P_m}{v_m} = \frac{\rho u \omega A}{\omega A} = \rho u = Z \quad (3-46)$$

$Z$  称为介质的声阻抗,单位是  $\text{kg}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{s}^{-1}$ 。声阻抗是表征介质声学特性的一个重要物理量。表 3-1 中列出了几种介质的声速、密度和声阻抗。

表 3-1 几种介质的声速和声阻抗

| 介质  | 声速 $u$ ( $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ )   | 密度 $\rho$ ( $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ) | 声阻抗 $\rho u$ ( $\text{kg}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{s}^{-1}$ ) |
|-----|---|---|--|
| 空气  | $3.32 \times 10^2$ ( $0^\circ\text{C}$ )  | 1.29  | $4.28 \times 10^2$   |
|     | $3.44 \times 10^2$ ( $20^\circ\text{C}$ ) | 1.21  | $4.16 \times 10^2$   |
| 水   | $14.8 \times 10^2$ ( $20^\circ\text{C}$ ) | 988.2                                       | $1.48 \times 10^6$   |
| 脂肪  | $14.0 \times 10^2$                        | 970   | $1.36 \times 10^6$   |
| 脑   | $15.3 \times 10^2$                        | 1020  | $1.56 \times 10^6$   |
| 肌肉  | $15.7 \times 10^2$                        | 1040  | $1.63 \times 10^6$   |
| 密质骨 | $36.0 \times 10^2$                        | 1700  | $6.12 \times 10^6$   |
| 钢   | $50.5 \times 10^2$                        | 7800  | $39.4 \times 10^6$   |

3. 声强 单位时间内通过垂直于声波传播方向的单位面积的声波能量, 称为声强。根据式(3-33)和式(3-46), 声强为:

$$I = \frac{1}{2} \rho a \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} Z v_m^2 = \frac{P_m^2}{2Z} \quad (3-47)$$

声波在传播过程中, 遇到两种声阻抗不同的介质界面时, 发生反射和折射。反射波的强度与入射波的强度之比, 称为强度反射系数, 用  $\alpha_{ir}$  表示。透射波的强度与入射波的强度之比, 称为强度透射系数, 用  $\alpha_{it}$  表示。理论证明, 在垂直入射的条件下, 有

$$\alpha_{ir} = \frac{I_r}{I_i} = \left( \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \right)^2 \quad (3-48)$$

$$\alpha_{it} = \frac{I_t}{I_i} = \frac{4Z_2Z_1}{(Z_2 + Z_1)^2} \quad (3-49)$$

由此可知, 当两种介质声阻抗相差较大时, 反射强, 透射弱; 声阻抗相近时, 透射强, 反射弱。

[例题 3-2] 如果超声波经由空气传入人体, 问进入人体的声波强度是入射前强度的百分之几? 如果经由蓖麻油 ( $Z = 1.36 \times 10^6 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ ) 传入, 则进入声波的强度又是入射前强度的百分之几?

解: (1) 经由空气进入时

$$\frac{I_t}{I_i} = \frac{4 \times 4.16 \times 10^2 \times 1.63 \times 10^6}{(4.16 \times 10^2 + 1.63 \times 10^6)^2} = 0.001$$

进入人体的声波强度只为人射强度的 0.001, 即 0.1%。

(2) 经由蓖麻油进入时

$$\frac{I_t}{I_i} = \frac{4 \times 1.36 \times 10^6 \times 1.63 \times 10^6}{(1.36 \times 10^6 + 1.63 \times 10^6)^2} = 0.992$$

进入人体的强度占原来强度的 0.992, 即 99.2%。

这个例子说明为什么在利用超声波进行人体扫描或治疗时, 在探头表面与体表之间要涂抹油类物质或液体等耦合剂。

## 二、听 觉 域

引起人耳听觉的声波, 不仅有频率范围, 而且有声强范围。对每一个给定的可闻频率, 声强都有上下两个限值。下限值是能引起听觉的最低声强, 低于下限值的声强, 不能引起听觉, 这个下限值称为最低可闻声强或听阈。图 3-15 中, 最下面的一条曲线表示正常人的听阈随声波频率而变化, 这条曲线称为听阈曲线。从曲线可以看出, 频率不同时, 听阈可以相差很大, 最敏感的频率约为 1 000 ~ 5 000 Hz, 这与耳的结构有关。上限是人耳所能忍受的最高声强, 高于上限值的声强, 只能引起耳的疼痛, 不能产生听觉, 这个上限值称为痛阈。图 3-15 中最上面的一条曲线表示正常人的痛阈随频率而变化, 称为痛阈曲线。由听阈线、痛阈线、20 Hz 和 20 000 Hz 线所围成的区域, 称为听觉区域。

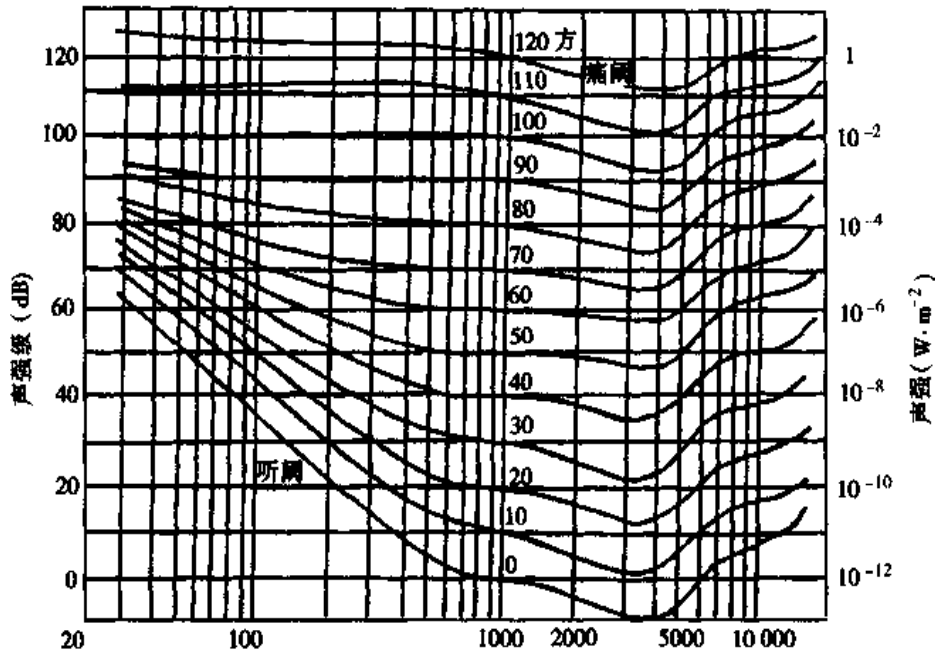


图 3-15 纯音的听觉域和等响曲线

### 三、声强级和响度级

以 1000 Hz 的声波为例，从听阈  $10^{-12} \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$  到痛阈  $1 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$ ，上下限相差  $10^{12}$  倍。由于人的听觉声强范围很大，并且人耳所感觉到的声音响度近似与声强的对数成正比，在声学中通常采用对数标度来量度声强，称为声强级，单位是贝尔 (bel, B)，贝尔的 1/10 称为分贝 (decibel, dB)，通常取 1000 Hz 声音的听阈值  $I_0 = 10^{-12} \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$  作为标准参考声强，任一声波的声强  $I$  与标准参考声强  $I_0$  的比值的对数，即为该声波的声强级，用  $L$  表示。

$$L = \lg \frac{I}{I_0} (B) = 10 \lg \frac{I}{I_0} (\text{dB}) \quad (3-50)$$

无论是声强还是声强级，都是声能的客观描述，它并不反映人耳所听到的响度等级。声强或声强级相同，但频率不同的声音，其响度可能相差很大。为了区分各种不同声音响度的大小，选用 1000 Hz 声音的响度作为标准，将其他频率声音的响度与此标准相比较，只要它们的响度相同，它们就有相同的响度级。显然，对 1000 Hz 的声音来说，它的强度级在数值上等于响度级。响度级的单位是方 (phon)。

将频率不同、响度级相同的各对应点连成一条线，构成等响曲线。图 3-15 中画出了不同响度级的等响曲线。听阈曲线的响度级为 0 方的等响曲线，痛阈曲线是响度级为 120 方的等响曲线。

### 第十节 多普勒效应

当列车鸣笛从我们身旁疾驶而过时，汽笛的音调由高变低。由于波源或观测者相

对于介质运动，造成观测频率与波源频率不同的现象，称为多普勒效应。

假设波源和观测者的运动方向与波传播方向共线，波源和观测者相对于介质的速度分别为  $v_s$  和  $v_o$ ，波在该介质中的传播速度为  $u$ ，波源和观测者观测到的频率分别为  $\nu$  和  $\nu'$ 。

**1. 波源静止观测者运动** 在这种情况下， $v_s = 0$ ， $v_o \neq 0$ 。若观测者向着波源运动，相当于波以速度  $u' = u + v_o$  通过观测者。因此单位时间内通过观测者的完整波数，即观测到的频率为

$$\nu' = \frac{u'}{\lambda} = \frac{u + v_o}{u} \nu \quad (3-51)$$

同理，如果观测者离开波源运动时

$$\nu' = \frac{u - v_o}{u} \nu \quad (3-52)$$

可见，在观测者运动情况下，频率的改变是由于观测者观测到的波数增加或减少造成的。

**2. 观测者静止波源运动** 在这种情况下， $v_o = 0$ ， $v_s \neq 0$ 。当波源以速度  $v_s$  向着观测者运动时，由于一个周期  $T$  内波源已逼近观测者  $v_s T$  的距离（见图 3-16），所以在观测者看来，波长缩短为

$$\lambda' = \lambda - v_s T = (u - v_s) T$$

波在介质中传播的速度不变，所以观测者实际测得的频率为

$$\nu' = \frac{u}{\lambda'} = \frac{u}{u - v_s} \cdot \frac{1}{T} = \frac{u}{u - v_s} \nu \quad (3-53)$$

同理，如果波源远离观测者而去时

$$\nu' = \frac{u}{u + v_s} \nu \quad (3-54)$$

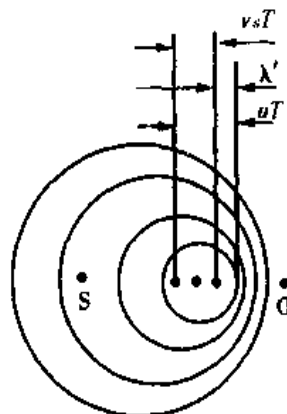


图 3-16 多普勒效应

可见，在波源运动情况下，观测频率的改变是由于波长的缩短或伸长所致。

**3. 波源和观测者同时相对于介质运动** 综合以上两种情况，可以证明观测者实际测得的频率为

$$\nu' = \frac{u'}{\lambda'} = \frac{u + v_o}{u - v_s} \nu \quad (3-55)$$

式中，观测者向着波源运动时， $v_o$  取正值，离开时取负值；波源向着观测者运动时， $v_s$  取正值，离开时取负值。

如果波源速度与观测者速度不共线时，应将  $v_o$  和  $v_s$  在连线上的分量代入以上各式进行计算。设波源的运动方向与连线成  $\alpha$  角，观测者的运动方向与连线成  $\beta$  角，观测者所测得的频率为

$$\nu' = \frac{u + v_o \cos \beta}{u - v_s \cos \alpha} \nu \quad (3-56)$$

上式中正负号的使用情况同式(3-55)。

## 第十一节 超声波及其医学应用

### 一、超声波的特性

通常的超声波频率范围在  $2 \times 10^4 \sim 5 \times 10^9$  Hz 之间，若用激光激发晶体，可产生频率高达  $5 \times 10^8$  以上的超声波。超声波具有声波的通性，由于超声波频率高、波长短，因而还具有一系列的特性。

超声波的方向性好。由于超声波波长比在同一种介质中的声波波长短得多，衍射现象不明显，所以超声波是近似直线传播的，容易得到定向而集中的超声波束。超声波和光线一样，可用适当的方法会聚和发散。

超声波的穿透本领大。由于波的强度正比于频率的平方，所以在相同振幅时，超声波比普通声波具有大得多的能量。近代超声技术已能产生几百乃至几千瓦的超声波功率，压强振幅可达数千大气压。超声波在介质中传播时，其强度按式(3-34)的规律衰减。介质的吸收系数  $\mu$  越小，衰减越慢，即超声波对该介质的穿透本领大。在人体中，超声波容易穿透  $\mu$  值比较小的水、脂肪和软组织，而不易穿透  $\mu$  值较大的空气、骨骼和肺组织。由于介质的  $\mu$  值不仅与介质的性质有关，而且随波的频率的增加而变大，故超声波频率提高时，穿透本领下降。

超声波遇到不同介质的分界面时可产生显著的反射，只有当反射体的线度比波长大数倍时，才能引起明显的反射。超声波波长短，所以较小的反射体，如钢件中的气泡、人体组织中的病变，都能引起明显的反射。在超声诊断中，正是这种回声形成了超声图像。

由于超声波具有以上特性，使之成为诊断、定位等技术的重要工具。

高频大功率超声束通过介质时，还可对介质产生一系列特殊作用。

**1. 机械作用** 高频超声波通过介质时，使介质中粒子作受迫高频振动，其加速度可达重力加速度的几十万至几百万倍，这种强烈的机械振动能破坏物质的力学结构。如高强度超声波在人体中传播时，剪切力会对细胞和组织结构产生直接的效应。机械作用常被利用在凝集、切割、搅拌、钻孔、清洗和乳化等方面。

**2. 空化作用** 高频大功率超声通过液体时，液体中产生疏密变化，稠区受压，稀区受拉。在受拉时，因为液体承受拉力的能力很差，特别是在含有杂质和气泡处，液体将被拉断，形成空腔。紧接而来的是正声压，使空腔在迅速闭合的瞬间，产生局部高压、高温和放电现象，称为空化作用。空化作用可以由于温度升高或通过施加机械力影响生物系统。空化作用常被利用在清洗、雾化、乳化以及促进化学反应等方面。在超声波的许多应用中，空化作用极为重要。

**3. 热作用** 当超声波在介质中传播时，将会有一部分能量被介质吸收而转化为热量，引起介质温度升高，称为热效应或热作用。产生热量的大小决定于介质的吸收系数，以及超声波的强度和辅照时间。在生物组织中，大部分损耗掉的声能由蛋白质分子经各种弛豫过程所吸收。超声的热效应早已用于临床理疗，近年来，它作为加温



治疗癌症的一种热源受到重视。

此外，还有化学作用、生物作用等。超声与物质的作用被广泛应用于超声技术，如清洗、杀菌、制药和治疗等方面。

## 二、超声波的产生与探测

产生超声波的方法很多，在医用的超声波仪器中，常用的超声波发生器主要由高频脉冲发生器和压电式换能器两部分组成(图 3-17)。

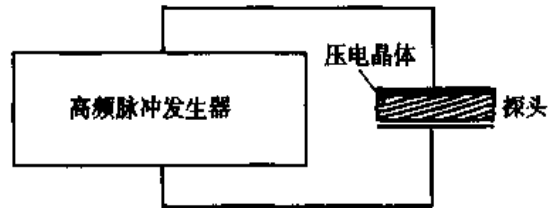


图 3-17 超声波发生器示意图

高频脉冲发生器用以产生超声频电振荡。常用的脉冲回波法频率选择在 1 ~ 15MHz，在满足探测的条件下，尽可能采用较高频率。大多数超声诊断仪中采用脉冲形式，即振荡是间歇地进行的，每隔一定时间重复一次。每秒重复次数，称为重复频率(约 1 000 次/s)，每次振荡持续时间，称为脉冲宽度(约几微秒)。

压电式换能器，也叫探头，它是利用某些晶体的压电效应制成的。当这种晶片相对的两表面受到压力或拉力，使它的厚度发生变化时，这两个面上就出现等量异性电荷。受压或受拉时，在表面上出现的电荷极性相反。在一定范围内，受力越大，所产生的电荷越多。当晶片受到变化的压力和拉力交替作用时，就在晶片两表面上产生同样规律的电压变化，这种现象称为正压电效应。反之，当这两个表面上加上电压时，晶片的厚度将视电场方向而变化，这种现象称为逆压电效应。将该晶片相对的两表面镀上薄银层，焊上导线作为电极，就构成了一个简单的探头，可以发射超声波，也可以接收超声波。

## 三、超声波在医学中的应用

超声波在医学中的应用，有超声诊断、超声治疗和生物组织超声特性研究等三个方面。其中，超声诊断发展最快，现已有多种超声诊断仪供临床应用。超声诊断的物理基础主要是利用超声波在介质分界面上的反射。由于体内不同组织和脏器的声阻抗不同，超声波在界面上形成不同的反射波，称为回波。脏器发生形变或有异物时，由于形状、位置和声阻抗的变化，回波的位置和强弱也发生改变，临床上就可以根据超声图像进行诊断。下面简要介绍医学上常用的超声诊断仪器的原理。

**1. A 型超声诊断仪** 它将接收到的回波信号经放大处理后加于示波管(或显像管)的垂直偏转板上，在水平偏转板上加上一时基电压(锯齿波电压)，就可以把始波和各界面的回波信号以脉冲幅度形式按时间先后在荧光屏上显示出来，如图 3-18 (a)。体内两介质的声阻抗相差越大，反射越强。回波脉冲幅度提供了产生反射的界

面种类的信息，各回波脉冲与始波的时间间隔提供了各反射面的深度信息。A型超声诊断仪提供的仅是体内器官的一维信息，而不能显示整个器官的形状。A型超声，回波信号以脉冲幅度的形式按时间先后在荧光屏上显示，所以A型又称为幅度调制型。

2. B型超声诊断仪 它能得到人体内部脏器和病变的二维断层图像，并且能对运动脏器进行实时动态观察。与A型超声诊断仪不同之处有以下两点：

(1) 辉度调制：脉冲回声信号经放大处理后加于示波管(或显像管)的控制栅极，利用脉冲回声信号改变阴栅极之间的电位差，从而改变辉度。回声信号越强，荧光屏上的光点越亮。所以，这是一种辉度调制型。将深度扫描的时基电压加于垂直偏转板上，回声信号变成明暗不同的光点自上而下按时间先后显示在荧光屏上。

(2) 显示断层声像：通过机械装置与电子学方法使深度扫描线与探头同步移动时，如图3-18(b)，可以得到人体组织内的二维超声断层图像(又称声像图)。

通常用电子开关切换多元线阵探头依次发射、接收回声，或同时激励所有的阵元，而适当地控制加到各阵元上的激励信号的相位(控制延时)，来改变超声的发射方向，形成扇形扫描。

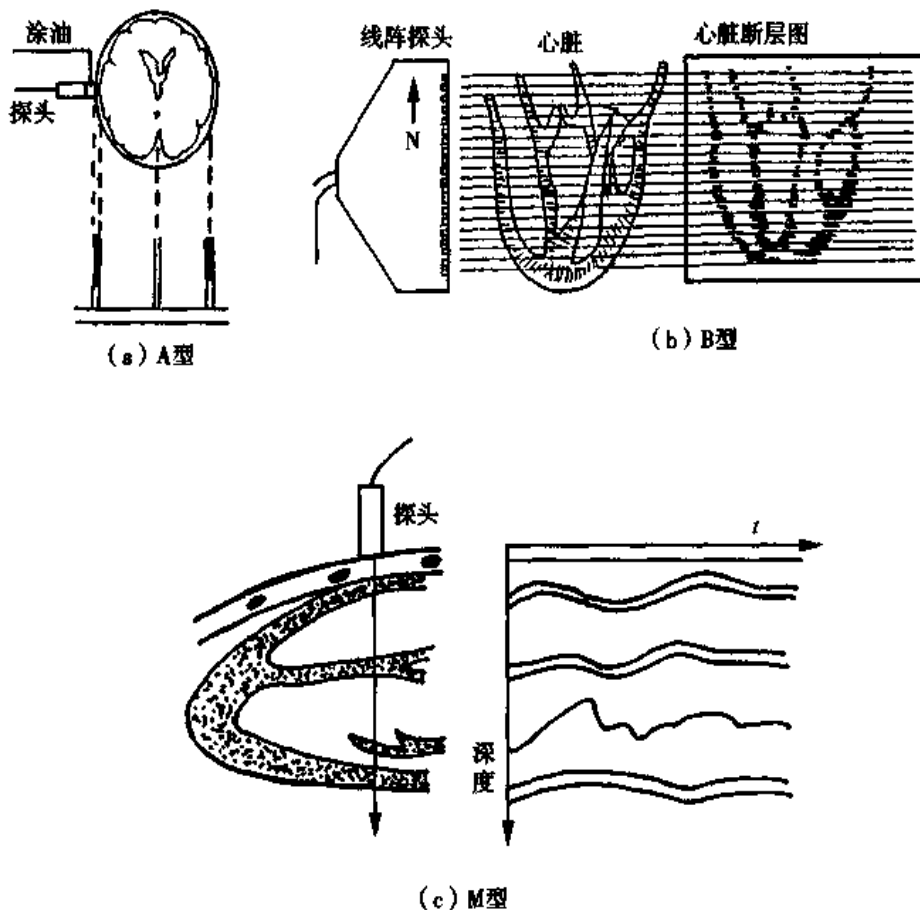


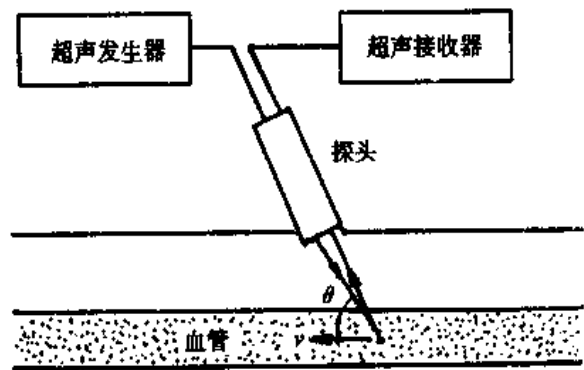
图3-18 A型、B型和M型超声诊断仪原理图

3. M型超声诊断仪 M型也属于辉度调制型，与B型不同之处在于单探头固定在某一探测点不动，示波管的水平偏转板上加一慢扫描锯齿波电压，使深度扫描线沿

水平方向缓慢移动，因此，水平轴代表时间。若所探查处内部组织界面运动，深度随时间改变，则得深度-时间曲线。M型超声诊断仪一般用于观察和记录脏器的活动情况，特别适用于检查心脏功能，称为超声心动图，如图 3-18 (c)所示。在实际应用时，可以将心动图与心电图、心音图同步显示。

许多断层显像仪中，采用数字扫描转换器，扫描切面中各点的脉冲回波信号经模/数转换器变为像素值，建立起数字图像，送入数字存储器中储存。存储器中的数字信号经处理器进行各种处理和分析，最后经数/模转换器把数字图像信号变为视频图像显示。大多数系统都允许观察者根据需要选择像素值范围，并把它转换到全灰度标进行显示，以控制图像的对比度。采用数字扫描转换器后，断层显像仪的功能大大增强。

4. 超声多普勒血流仪 图 3-19 是利用多普勒效应测量血流速度的原理图。图中  $v$  是血流速度， $\theta$  是超声波传播方向与血流方向之间的夹角。探头有发射和接收超声波的两块晶片所组成。设作为静止声源的探头发射超声波的频率为  $\nu$ ，血管中随血流以速度  $v$  运动着的红细胞接收到的频率  $\nu'$  为



$$\nu' = \frac{u + v \cos \theta}{u} \nu \quad (3-57)$$

图 3-19 多普勒效应血流计原理

$u$  为超声波在人体内的传播速度。

由红细胞反射回来的超声波被静止的探头接收，这些红细胞相当于以  $v$  运动着的声源，探头接收到的频率  $\nu''$  为

$$\nu'' = \frac{u}{u - v \cos \theta} \nu' \quad (3-58)$$

将式(3-57)代入式(3-58)，得

$$\nu'' = \frac{u + v \cos \theta}{u - v \cos \theta} \nu \quad (3-59)$$

探头发出的超声波频率与接收的回波频率之差，即多普勒频移  $\Delta \nu$  为

$$\Delta \nu = \nu'' - \nu = \frac{2v \cos \theta}{u - v \cos \theta} \nu \quad (3-60)$$

因为  $u \gg v \cos \theta$ ，式(3-60)可改写为

$$\Delta \nu = \frac{2v \cos \theta}{u} \nu \quad (3-61)$$

或

$$\nu = \frac{u}{2v \cos \theta} \Delta \nu \quad (3-62)$$

根据式(3-62)，可以算出血流速度。

超声多普勒法分为连续多普勒(CW)和脉冲多普勒(PW)。前者的缺点是没有距离

分辨能力,在超声束方向上的所有多普勒信号总是重叠在一起;后者具有距离分辨能力,能够检测出某特定深度的多普勒信号,可用于心腔内部和大血管血流信号的检测。现在的多普勒超声成像装置大多采用将脉冲多普勒与B超相结合的办法,在B超上一边设立多普勒取样,一边输出血流信息,因此可得到正确的血液流速采样位置。

5. 彩色多普勒血流成像仪(简称“彩超”)属于实时二维血流成像技术。仪器设计时用一高速相控阵扫描探头进行平面扫查,以实现解剖结构与血流状态两种显像。探头接收到的信号分为两路:一路经放大处理后按回波强弱形成二维黑白解剖图像;另一路对扫描全程作多点取样,进行多普勒频移检测,信号经自相关技术处理,并用彩色编码法,将彩色显像的三个基色——红(R)绿(G)蓝(B),分别表示流向探头的正向血液流速(R)、离开探头的负向血液流速(B)和方向复杂多变的湍流(G)。其他颜色都是由这三种基本颜色混合而成的。血流速度越大者彩色越鲜亮,速度缓慢者彩色较暗淡,故由彩色的类型、鲜亮程度即可了解血流的状况。这种彩色血流信号显示在相应的二维黑白图像的液性暗区内,既能观察解剖部位、腔室形态大小,又能观察内部血流活动状态,如血流速度、平均速度、加速度、血流量和回波强度等多种指标。彩色多普勒血流成像装置是诊断心脏病的先进工具之一。

### 思考题与习题三

3-1 简谐振动的速度与加速度的表达式中都有个负号,这是否意味着速度和加速度总是负值?是否意味着两者总是同方向?

3-2 一沿  $x$  轴作简谐振动的物体,振幅为  $5.0 \times 10^{-2} \text{ m}$ , 频率  $2.0 \text{ Hz}$ , 在时间  $t = 0$  时, 振动物体经平衡位置处向  $x$  轴正方向运动, 求振动方程。如该物体在  $t = 0$  时, 经平衡位置处向  $x$  轴负方向运动, 求振动方程。  
 $[s = 5.0 \times 10^{-2} \cos(4\pi t + 3\pi/2) \text{ m}; s = 5.0 \times 10^{-2} \cos(4\pi t + \pi/2) \text{ m}]$

3-3 一个运动物体的位移与时间的关系为  $s = 0.10 \cos(2.5\pi t + \pi/3) \text{ m}$ , 试求: (1) 周期、角频率、频率、振幅和初相位; (2)  $t = 2 \text{ s}$  时物体的位移、速度和加速度。

$$[(1) 0.80 \text{ s}; 2.5\pi; 1.25 \text{ Hz}; 0.10 \text{ m}; \pi/3. (2) -5 \times 10^{-2} \text{ m}; 0.68 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}; 3.1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}]$$

3-4 两个同方向、同频率的简谐振动方程为  $s_1 = 4 \cos(3\pi t + \pi/3)$  和  $s_2 = 3 \cos(3\pi t - \pi/6)$ , 试求它们的合振动方程。  
 $[s = 5 \cos(3\pi t + 0.128\pi)]$

3-5 设两个频率相近, 振幅相等, 初相相同和振动方向相同的简谐振动, 运动方程分别为  $s_1 = A \cos(\omega_1 t + \varphi)$ ;  $s_2 = A \cos(\omega_2 t + \varphi)$ 。求合振动方程, 并说明合振幅的变化情况。

$$\left[ s = s_1 + s_2 = 2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \varphi\right) \right]$$

3-6 机械波在通过不同介质时, 它的波长、频率和速度中哪些会发生变化? 哪些不会改变?

3-7 振动和波动有何区别和联系?

3-8 已知波动方程为  $s = A \cos(bt - cx)$ , 试求波的振幅、波速、频率和波长。

$$(A, b/c, b/2\pi, 2\pi/c)$$

3-9 有一列平面简谐波, 坐标原点按  $s = A \cos(\omega t + \varphi)$  的规律振动。已知  $A = 0.10 \text{ m}$ ,  $T = 0.50 \text{ s}$ ,  $\lambda = 10 \text{ m}$ 。试求: (1) 波动方程; (2) 波线上相距  $2.5 \text{ m}$  的两点的相位差; (3) 假如  $t = 0$  时处于坐标原点的质点的振动位移为  $s_0 = +0.050 \text{ m}$ , 且向平衡位置运动, 求初相位并写出波动方程。

$$[(1) s = 0.10 \cos \{2\pi(2.0t - x/10) + \varphi\}; (2) \pi/2; (3) s = 0.10 \cos \{2\pi(2.0t - x/10) + \pi/3\} \text{ m}]$$

3-10 P和Q是两个同方向、同频率、同相位、同振幅的波源所在处,设它们在介质中产生的波列波长为 $\lambda$ ,PQ之间的距离为 $1.5\lambda$ 。R是PQ连线上Q点外侧的任意一点。试求:(1)PQ两点发出的波到达R时的相位差;(2)R点的振幅。 $(3\pi; 0)$

3-11 沿绳子行进的横波波方程为 $s = 0.10\cos(0.01\pi x - 2\pi t)$ m。试求(1)波的振幅、频率、传播速度和波长;(2)绳上某质点的最大横向振动速度。

$[(1)0.10\text{m}; 1.0\text{Hz}; 200\text{m}\cdot\text{s}^{-1}; 200\text{m}。(2)0.63\text{m}\cdot\text{s}^{-1}]$

3-12 设 $s$ 为球面波各质点振动的位移, $r$ 为离开波源的距离, $A_0$ 为距波源单位距离处波的振幅。试利用波的强度的概念求出球面波的波动方程。

$$\left\{ s = \frac{A_0}{r} \cos \left[ \omega \left( t - \frac{r}{u} \right) + \varphi \right] \right\}$$

3-13 弦线上驻波相邻波节的距离为65cm,弦的振动频率为 $2.3 \times 10^2$ Hz,求波的波长 $\lambda$ 和传播速度 $u$ 。 $(1.3\text{m}; 3.0 \times 10^2 \text{m}\cdot\text{s}^{-1})$

3-14 人耳对1000Hz的声波产生听觉的最小声强约为 $1 \times 10^{-12} \text{W}\cdot\text{m}^{-2}$ ,试求空气分子的相应的振幅。 $(1 \times 10^{-11} \text{m})$

3-15 两种声音的声强级相差1dB,求它们的强度之比。 $(1.26:1)$

3-16 用多普勒效应来测量心脏壁运动时,以5MHz的超声波直射心脏壁(即入射角为 $0^\circ$ ),测出接收与发出的波频差为500Hz。已知声波在软组织中的速度为 $1500 \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ,求此时心壁的运动速度。 $(7.5 \times 10^2 \text{m}\cdot\text{s}^{-1})$

(吴明海)

## 第四章 狭义相对论和广义相对论

---

学习本章后，你应：

1. 掌握狭义相对论的基本假设、洛伦兹变换及时间膨胀、洛伦兹收缩、同时性的相对性等概念及相关公式。
  2. 掌握狭义相对论的质速关系、质能关系，理解质点动能公式及能量-动量关系式。
  3. 理解伽利略变换、光多普勒效应，了解因果律和信号速度、退行红移和膨胀宇宙。
  4. 理解广义相对论的等效原理和广义相对性原理，了解引力场的时空特性、引力坍缩与黑洞及引力波。
- 

著名的德国物理学家爱因斯坦(A·Einstein)创立的狭义相对论和广义相对论，以崭新的时空观取代了经典力学的绝对时空观，揭示了物体作高速运动所遵循的规律、物质质量与能量的内在联系、惯性力加速场与引力场的等价性等。为宇宙天体、微观粒子、原子能等研究领域提供了新的理论武器。经典力学是相对论力学在物体速度远小于光速的情况下的近似。本章着重介绍狭义相对论的一些基本原理和主要结论，同时也对广义相对论作简要介绍。

### 第一节 伽利略变换

#### 一、经典力学的绝对时空观和相对性原理

经典力学即牛顿力学，是建立在绝对时空观的基础上的。绝对的时空观认为：时间和空间是可以独立存在的，它们与物体本身的运动方式无关。按照这种绝对时空观，在不同的参考系中有完全相同的时间流逝，任何参考系中空间的大小都可以用固定不变的普适的尺子来量度。牛顿曾经这样描述过绝对空间和绝对时间的概念：“绝对空间，就其性质来说与此外的任何事物无关，总是相似的，不可移动的。绝对、真实及数学的时间本身，从其性质来说，均匀流逝与此外的任何事物无关。”

对于任何惯性参考系，牛顿定律都成立。这也就是说，对于不同的惯性系，力学的基本定律——牛顿定律的形式都是一样的。因此，在任何惯性系统中观察，同一力学现象将按同样的形式发生和演变。即力学规律在所有惯性系中都是相同的，各个惯性系都是等价的，不存在特殊的绝对的惯性系。这个结论称为力学相对性原理，亦称

为伽利略相对性原理。

## 二、伽利略变换

设想有两个作为匀速直线运动的惯性参考系，分别以直角坐标系  $S(o, x, y, z)$  和  $S'(o', x', y', z')$  表示，两者的坐标轴分别平行，且  $x$  轴和  $x'$  轴重合在一起， $S'$  相对于  $S$  沿  $x$  轴正方向以速度  $u$  运动。如图 4-1 所示。

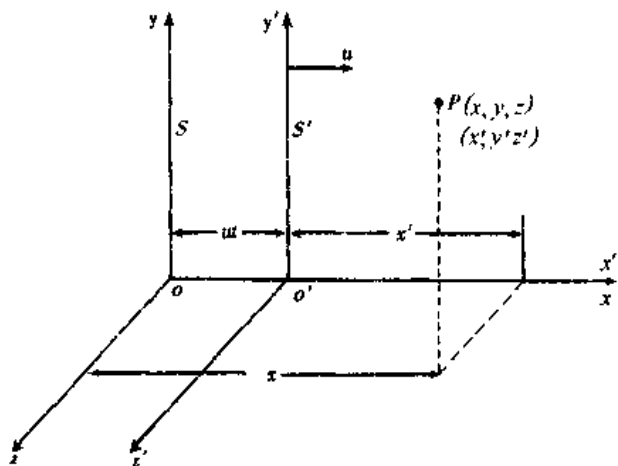


图 4-1 相对作匀速直线运动的两个惯性参考系

为测量时间，设想在  $S$  和  $S'$  系中各处各有自己的时钟，所有的时钟结构完全相同，而且在同一参考系中所有的时钟都是校准好而且是同步的，它们分别指示时刻  $t$  和  $t'$ 。假定两个参考系中的时钟都以原点  $o'$  和  $o$  重合的时刻作为计算时间的零点，即  $t = t' = 0$  时，原点重合。现从两参考系同时观察同一质点  $P$  的运动。设在任一时刻  $t$ ， $P$  点的坐标分别为  $(x, y, z)$  和  $(x', y', z')$ 。由于时间量度的绝对性和空间量度的绝对性，从图 4-1 中可

以得到

$$\begin{cases} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \quad (4-1)$$

上述变换称为伽利略变换。它给出了同一时空点在惯性系  $S'$  和  $S$  中的时空坐标之间的关系。

将式(4-1)的前三式对时间求导，考虑到  $t = t'$ ，可得速度和加速度的相应变换式

$$\begin{cases} v'_x = v_x - u \\ v'_y = v_y \\ v'_z = v_z \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} a'_x = a_x \\ a'_y = a_y \\ a'_z = a_z \end{cases} \quad (4-2)$$

把加速度变换写成矢量式，可得  $\mathbf{a}' = \mathbf{a}$ 。这表明在所有相互作用匀速直线运动的惯性系中观察到的同一质点的加速度是相同的。由此可见，在不同的惯性系中，牛顿第二定律  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  不仅有相同的形式，而且， $\mathbf{F}$ 、 $m$  和  $\mathbf{a}$  各量都保持不变。同时，在伽利略变换下，动量守恒定律以及其他动力学规律的形式也都保持不变。总之，力学规律对于一切惯性系都是等价的。伽利略变换是力学相对性原理和绝对时空观的数学表达式和具体体现。

## 第二节 洛伦兹变换

### 一、迈克耳孙-莫雷实验

在电磁理论发展初期，人们认为光是在所谓“以太”的介质中传播，以太被作为绝对参考系的代表。为了确定这一绝对参考系的存在，历史上有许多物理学家进行过许多实验，其中最著名的是迈克耳孙-莫雷实验。实验的装置是迈克耳孙根据干涉原理自己设计制作的迈克耳孙干涉仪。干涉仪放在地球上，设太阳对“以太”静止；地球相对太阳的速度为  $u$ 。实验时，先将干涉仪一支光臂沿地球绕太阳运动的方向，另外一支光臂与地球运动方向垂直。然后把整个仪器转  $90^\circ$ ，使其另一支光臂沿地球运动方向。计算表明，如果以太确实存在，则地球相对于以太的运动将对光速产生影响，从而使仪器转过  $90^\circ$  所引起的干涉条纹的移动为

$$\Delta N = \frac{2lu^2}{\lambda c^2}$$

尽管  $u^2/c^2$  很小，但是光臂的长度  $l$  与光波长  $\lambda$  的比值却可以很大。在 1881 年迈克耳孙的第一次实验中， $l \approx 1.2 \text{ m}$ ， $\lambda = 590 \text{ nm}$ ，预期应观测到的  $\Delta N$  为 0.04 条，但他并没有观测到条纹的移动。1887 年，迈克耳孙和莫雷使用了一套改进了的系统重复了这个实验。同时用通过多次反射的方法，使光臂的有效长度增至 11 m 左右。他们预期仪器转过  $90^\circ$  时，应观测到的条纹移动数  $\Delta N$  为 0.4 条，这是可观测的最小值的 20~40 倍，但是他们再一次没有观测到条纹的移动。从那以后，这个实验在不同的条件下被很多人重复过，然而始终没有观测到条纹的移动。

迈克耳孙-莫雷实验的零结果表明，似乎地球相对于以太的运动并不存在，或者说以太本身就不存在，正如迈克耳孙所说的“静止以太假说的结果就这样被证明为错误”。这使包括迈克耳孙在内的许多物理学家都感到大失所望，为了在经典时空观的框架内解释迈克耳孙-莫雷实验，当时许多人曾提出不同的假设，但是都未能成功。1905 年，爱因斯坦另辟蹊径，通过对时间空间本性及电磁理论的深刻思考，提出了两个重要假设，创立了狭义相对论，很容易的解释了迈克耳孙-莫雷实验的否定结果。长期以来，迈克耳孙-莫雷实验一直被认为是狭义相对论的主要实验支柱之一。

### 二、狭义相对论的基本假设

1905 年 9 月，德国《物理年鉴》发表了爱因斯坦的《论运动物体的电动力学》一文，首次提出了狭义相对论的两个基本假设。

1. **相对性原理** 物理定律在所有的惯性系中都是相同的。

这一原理是力学相对性原理的推广，它否定了绝对静止参考系的存在。也就是说各个惯性系都是等价的，不存在特殊的绝对的惯性系。

2. **光速不变原理** 在所有的惯性系中，光在真空中的传播速率具有相同的值  $c$ 。

这一原理表明，光速与光源和观察者的运动状态都无关，从而否定了以绝对时空



观为前提的伽利略变换。光速不变原理是相对论时空观的基础。

### 三、洛伦兹变换

狭义相对论否定了牛顿的绝对时空观，因而也否定了伽利略变换，爱因斯坦选择了洛伦兹变换这一新的时空变换关系，作为狭义相对论的时空变换关系。

仍以图 4-1 所示的两个惯性系  $S$  和  $S'$  为例，在这样的两个惯性系中，对同一质点  $P$  的运动的两组时空坐标  $(x, y, z, t)$  和  $(x', y', z', t')$  的洛伦兹变换为

$$\begin{cases} x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \gamma(x - ut) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right) \end{cases} \quad (4-3)$$

式中  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$ 。由此可见，在洛伦兹变换下，空间坐标和时间坐标是相互关联着的，这是与伽利略变换根本不同的。在低速情况下， $u \ll c$ ， $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \rightarrow 1$ ，洛伦兹变换则过渡到伽利略变换，这就是说，经典的伽利略变换是洛伦兹变换在低速情况下的近似。

洛伦兹变换的逆变换为

$$\begin{cases} x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \gamma(x' + ut') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \frac{t' + \frac{u}{c^2}x'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \gamma\left(t' + \frac{u}{c^2}x'\right) \end{cases} \quad (4-4)$$

质点在惯性系  $S'$  和  $S$  中的速度  $(v'_x, v'_y, v'_z)$  和  $(v_x, v_y, v_z)$  之间的相对变换为

$$\begin{cases} v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u}{c^2}v_x} \\ v'_y = \frac{v_y}{1 - \frac{u}{c^2}v_x} \sqrt{1 - u^2/c^2} \\ v'_z = \frac{v_z}{1 - \frac{u}{c^2}v_x} \sqrt{1 - u^2/c^2} \end{cases} \quad (4-5)$$

其逆变换为

$$\begin{cases} v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{u}{c^2} v'_x} \\ v_y = \frac{v'_y}{1 + \frac{u}{c^2} v'_x} \sqrt{1 - u^2/c^2} \\ v_z = \frac{v'_z}{1 + \frac{u}{c^2} v'_x} \sqrt{1 - u^2/c^2} \end{cases} \quad (4-6)$$

由速度的相对论变换式(4-5)可以看出,洛伦兹变换保证了光速  $c$  的不变性;无论是在真空中还是在介质中,无论用什么办法,都不可能使一个信号以大于光速  $c$  的速度传递。在相对论范围内,光速  $c$  是一个极限速率。人们迄今为止尚未发现过任何物体以超过光速  $c$  的速率运动。在  $u \ll c$  的低速情况下,  $\gamma \rightarrow 1$ , 速度的相对论变换式过渡到伽利略速度变换式。

[例 4-1] 在正、负电子对撞机中,电子和正电子以速度  $0.90c$  相向飞行,它们的相对速度是多少?

解:取对撞机为  $S$  系,向右运动的电子为  $S'$  系,于是  $u = 0.90c$ ,  $v_x = -0.90c$ , 相对速度是

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u}{c^2} v_x} = \frac{-0.90c - 0.90c}{1 + 0.90^2} = -0.994c$$

### 第三节 狭义相对论的时空观

狭义相对论的时空观,即时间膨胀、长度收缩、同时性的相对性等,可以通过洛伦兹变换直接得出。

#### 一、时间膨胀

在如图 4-1 所示的惯性参考系  $S$  和  $S'$  中,考虑在  $S'$  系中的同一地点  $x'_0$  处发生两个事件,其时间间隔为  $\tau_0 = t'_2 - t'_1$ 。由于  $S'$  系相对于  $S$  系,以速度  $u$  沿  $x$  轴正方向运动,根据洛伦兹变换的逆变换式(4-4),可以得到  $S$  系中的观察者所记录的上述两个事件发生的时刻分别为  $t_1 = \gamma \left( t'_1 + \frac{u}{c^2} x'_0 \right)$  和  $t_2 = \gamma \left( t'_2 + \frac{u}{c^2} x'_0 \right)$ ,其时间间隔为

$$\tau = t_2 - t_1 = \gamma(t'_2 - t'_1) = \gamma\tau_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \tau_0 > \tau_0 \quad (4-7)$$

$\tau_0$  是  $S'$  系中观测者所测得的时间间隔,这个  $S'$  系相对于发生事件的那个点  $x'_0$  是静止的;  $\tau$  是  $S$  系中的观测者记录的时间间隔,相对于  $S$  系来说,发生事件的那个点是在运动着的,即  $S$  系中的观测者看到的事件发生在空间两个不同的位置上。由此可以得出结论,从惯性系  $S$  中的观测者看来,运动着的物体中发生的过程所费的时

间变长了, 变为静止时间间隔的  $\gamma$  倍, 这就是所谓的时间膨胀, 也称为时间延缓或运动时钟变慢。通常把某一参考系中同一地点先后发生的两个事件之间的时间间隔, 称为固有时或原时, 式(4-7)中的  $\tau_0$  就是固有时。 $\gamma = 1/\sqrt{1-u^2/c^2}$  称为时间膨胀因子, 又称为速度因素或质量增加因子。 $\gamma$  值的大小体现了相对论效应的显著程度。

由此可见, 时间间隔不是不变量, 而是与参考系的运动有关的变量。时间膨胀的来源是光速不变原理, 它是时空的一种属性, 并不涉及时钟的任何机械原因和原子内部的任何过程。

[例 4-2]  $\mu$  子是 1936 年由安德森(C.D.Anderson)等人在宇宙射线中发现的。 $\mu$  子是不稳定的粒子, 它能自发地衰变为一个电子和两个中微子。对  $\mu$  子静止的坐标系而言,  $\mu$  子自发衰变的平均寿命为  $2.15 \times 10^{-6}$  s。假设来自太空的宇宙射线, 在离地面 6000 m 的高空所产生的  $\mu$  子, 以相对于地球  $0.995c$  的速率垂直向地面飞来, 试问: (1) 在地面上看来,  $\mu$  子的平均寿命应为多少? (2) 它能否在衰变前到达地面?

解: (1) 设地面参考系为  $S$ ,  $\mu$  子参考系为  $S'$ , 据题意  $S'$  系相对于  $S$  系的运动速率  $u = -0.995c$ ,  $\mu$  子在  $S'$  系中的平均寿命即为固有时  $\tau_0 = 2.15 \times 10^{-6}$  s, 根据时间膨胀公式(4-7), 对于地面来说,  $\mu$  子的平均寿命为

$$\tau = \gamma\tau_0 = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{2.15 \times 10^{-6}}{\sqrt{1-\frac{(-0.995c)^2}{c^2}}} = 2.15 \times 10^{-5}(\text{s})$$

(2)  $\mu$  子在时间  $\tau$  内运动的距离为

$$s = u\tau = 0.995c \times 2.15 \times 10^{-5} = 6418(\text{m})$$

而  $\mu$  子产生时离地面只有 6000 m, 所以它在衰变前可以达到地面。

## 二、洛伦兹收缩

当待测物体相对于观测者静止时, 一个物体的长度是所测得的物体两个端点位置之间的距离。然而, 当待测物体相对于观测者运动时, 一个物体的长度就必须是同时记录下来的物体两个端点位置之间的距离。在图 4-1 中, 假设有一直杆沿  $x'$  轴静止放置在  $S'$  系中, 杆在其中的固有长度为  $L_0 = |x'_2 - x'_1|$ 。在  $S$  系中的观测者看来, 杆沿  $x$  轴以速度  $u$  运动, 为了测量杆的长度  $L$ , 观测者必须在同一时刻  $t$  测量杆两端的坐标  $x_1$  和  $x_2$ , 从而得到杆的长度  $L = |x_2 - x_1|$ , 由洛伦兹变换式(4-3)可知,  $x'_1 = \gamma(x_1 - ut)$ ,  $x'_2 = \gamma(x_2 - ut)$ , 则

$$L_0 = |x'_2 - x'_1| = \gamma|x_2 - x_1| = \gamma L$$

所以 
$$L = \frac{1}{\gamma}L_0 = \sqrt{1-u^2/c^2}L_0 < L_0 \quad (4-8)$$

由此可见, 在惯性系  $S$  中的观测者看来, 运动着的物体, 在运动方向上的长度缩短了, 变为固有长度的  $1/\gamma$ , 这就是所谓的洛伦兹收缩或长度收缩。 $\frac{1}{\gamma}$  称为长度收缩因子。

洛伦兹收缩也是时空的一种属性，并不是由于运动引起物质之间的相互作用而产生的实在的收缩。洛伦兹收缩完全是相对的。例如，如果有两个人分别坐在两列相向而过的火车上，每人手里都拿着一根相同的米尺，尺身沿着火车开行的方向，则两个人都将“看到”（指同时测量米尺两端的位置）对方手上的米尺缩短了相同的尺度；而当他们测量自己手上拿着的米尺时，米尺并没有缩短。

### 三、同时性的相对性

在图 4-1 所示的惯性系  $S$  系和  $S'$  系中，假设在  $S$  系中有两个事件在不同的地点  $x_1$  和  $x_2$  处，于同一时刻  $t$  同时发生，即两事件的时空坐标分别为  $(x_1, t)$  和  $(x_2, t)$ 。据洛伦兹变换式(4-3)，在  $S'$  系中，这两件事发生的时间分别为  $t'_1 = \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x_1\right)$  和  $t'_2 = \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x_2\right)$ 。这就是说，在  $S'$  系中的观测者看来，这两个事件发生的时间是不同的，其间隔为

$$t'_2 - t'_1 = \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x_2\right) - \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x_1\right) = \gamma u \frac{x_1 - x_2}{c^2} \quad (4-9)$$

由此可见，只有两个事件同时发生在同一地点时，即当  $x_1 - x_2 = 0$  时，总有  $t'_2 - t'_1 = 0$ ，同时性才有绝对意义。在一般情况下，对于一个观测者是同时发生的两个事件，对于另一个观测者就不一定是同时发生了，这就是同时性的相对性。同时性的相对性否定了各个惯性系具有统一时间的可能性，否定了牛顿的绝对时空观。

### 四、因果率和信号速度

如果在惯性系  $S$  中，在  $t_p$  时刻有一事件  $P$  发生在  $x_p$  处，引起事件  $Q$  在  $t_Q$  时刻发生在  $x_Q$  处，即事件  $P(x_p, t_p)$  引起事件  $Q(x_Q, t_Q)$ ，它们有因和果的关系。信息或相互作用从  $x_p$  传到  $x_Q$  (假定  $x_p < x_Q$ ) 的速度为

$$v_s = \frac{x_Q - x_p}{t_Q - t_p} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

在  $S'$  系中的观察者记录到的时间间隔  $t'_Q - t'_p$  为

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x\right) = \gamma\Delta t\left(1 - \frac{u}{c^2}\frac{\Delta x}{\Delta t}\right) = \gamma\Delta t\left(1 - \frac{u v_s}{c^2}\right)$$

如果  $u v_s > c^2$ ，则时间顺序将改变(即  $\Delta t > 0$ ，而  $\Delta t' < 0$ )。如果  $v_s$  是信号传播速度，则它联系着相关事件，时间顺序不能反转，在  $u$  不大于  $c$  的条件下，只有  $v_s \leq c$  才能保证时间次序不颠倒。由于光速是物体运动或信息传递速度的极限，因而事件的因果顺序决不会因为参考系的不同而颠倒。在不相关的两件事之间， $v_s$  只是具有  $LT^{-1}$  的量纲而已， $v_s$  完全可以大于  $c$ ，于是以速率  $u$  运动的观察者，将可以看到不相关事件的次序颠倒。

### 五、光多普勒效应

在图 4-1 所示的惯性系  $S$  系和  $S'$  系中，若在  $S'$  系的原点的某一闪烁光源先后发

出两个光信号，即事件 $(o, o)$ 和 $(t', o)$ 。在  $S$  系中的观测者看来，它们是事件 $(o, o)$ 和 $(t, x)$ ，根据洛伦兹变换的逆变换式(4-4)

$$t = \gamma \left( t' + \frac{u}{c^2} x' \right) = \gamma t'$$

在  $S$  系的原点收到第二个信号的时刻是

$$t_1 = t + x/c = t + ut/c = (1 + \beta)t = (1 + \beta)\gamma t', \beta = \frac{u}{c}$$

两个光信号之间的时间差为

$$\Delta t = (1 + \beta)\gamma \Delta t'$$

时间间隔可以用周期表达为

$$T = (1 + \beta)\gamma T'$$

发射频率  $\nu_e$  和观察频率  $\nu_o$  的关系为

$$\nu_o = \frac{1}{(1 + \beta)\gamma} \nu_e = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \nu_e \quad (4-10)$$

式(4-10)表明，光源离去时，观察到的频率会减小，即退行时存在红移。

若  $S'$  系以  $u$  沿  $x$  轴向  $S$  系运动，用同样的方法可以推得：

$$\nu_o = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \nu_e \quad (4-11)$$

式(4-11)表明，光源趋近时，观察到的频率会增加，即趋近时存在紫移。

光是一种周期性的移动过程，所以对于任何光源，以上公式都是正确的。

## 六、退行红移和膨胀宇宙

用波长来表达，退行红移是

$$c = \lambda \nu, \lambda_o = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \lambda_e$$

或

$$\frac{\lambda_o - \lambda_e}{\lambda_e} = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} - 1 \approx \beta$$

宇宙学起源的红移包括多普勒效应和背景引力的影响，哈勃发现

$$\frac{\lambda_o - \lambda_e}{\lambda_e} = H_0 \frac{L}{C} \quad (4-12)$$

这就是哈勃定律，姑且用多普勒红移以及上述近似代入有

$$u = H_0 L$$

相隔越远的星体以越高的速度  $u$  分离，构成了一幅膨胀宇宙的图像。理论证明经验定律式(4-12)只是近似，类星体红移很大，虽然很多天文学家相信其速度和距离有类似关系，但以上结果显然用了太多的近似。

## 第四节 相对论动力学

在相对论中，动力学的一系列概念都面临着重新定义的问题。定义新物理概念的

重要原则，首先是满足对应原理，即当  $v \ll c$  时，新定义的物理量必须趋于经典物理学中的相应量；其次是，尽量保持基本守恒定律继续成立。

## 一、动量和质量

在相对论中，仍定义一个质点的动量  $p$  是一个与它的速度  $v$  同方向的矢量，即

$$p = mV \quad (4-13)$$

上式中动量与速度的比例系数  $m$  仍定义为该质点的质量。不过在数量上  $p$  不一定与  $v$  有正比关系，质量  $m$  是速度的函数， $m$  只依赖于速度的大小  $v$ ，而不与它的方向有关，即

$$m = m(v) \quad (4-14)$$

根据质量、动量守恒定律，由洛伦兹变换，可以得出

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma m_0 \quad (4-15)$$

这是相对论中非常重要的质速关系， $m$  称为相对论质量，简称质量，它与质点的运动速率  $v$  有关，同一质点对于不同的参考系有不同的速率时，在这些参考系中所测得的这一质点的质量也不同。 $m_0$  是质点在它静止的参考系中的质量，称为静质量。

当  $v \ll c$  时，由式(4-15)得  $m \approx m_0$ ，这就是经典力学所讨论的情况；实际上在一般宏观物体所能达到的速度范围内，正是属于这种情况。而在微观粒子的实验中，粒子的速率经常会达到接近光速的程度，这时  $m$  随  $v$  的变化就很明显了。当  $v/c \rightarrow 1$  时，质量  $m$  迅速趋向于无穷大。这就是说物体的速度愈接近于光速，它的质量就愈大，因而就愈难加速，当物体的速率趋近于光速时，质量和动量一起趋于无穷大，所以光速  $c$  是一切物体速率的上限。如果  $v$  超过  $c$ ，质速公式(4-15)将给出虚质量，这在物理上是没有意义的，也是不可能的。

应当强调的是，这里的相对论的质量只是以式(4-15)为定义引出的辅助量，它并不是物体惯性的量度。

根据式(4-13)，动量的完整表达式为

$$p = m v = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma m_0 v \quad (4-16)$$

可以证明，相对论的动量表达式(4-16)满足爱因斯坦狭义相对性原理。此外，还可以看出当质点运动速率  $v \ll c$  时，相对论的动量表达式与经典力学中的相同。

## 二、力和动能

在经典力学中把力定义为动量的时间变化率，即

$$F = \frac{dp}{dt} \quad (4-17)$$

由于质量  $m$  是常量，上式等价于  $F = ma$ 。然而，在相对论中，动量  $p$  和质量  $m$  都随质点的运动速率  $v$  而变化，因而也都随时间  $t$  而变化， $F = dp/dt$  与  $F = ma$  两式不再等价，即直接用加速度表示的牛顿第二定律不再成立，但是，经典力学对力的定义

即式(4-17), 可直接推广到相对论中, 即

$$F = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 \boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = \frac{d}{dt} (\gamma m_0 \boldsymbol{v}) \quad (4-18)$$

上式是牛顿第二定律在相对论中的推广, 是相对论动力学的基本方程。在  $v \ll c$  时, 该方程还原为经典力学的牛顿第二定律。

在相对论中, 我们假定功能关系仍具有经典力学中的形式, 质点的动能  $E_k$  等于外力使它由静止状态到运动状态所作的功

$$\begin{aligned} E_k &= \int_0^t \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^t \frac{d}{dt} (m\boldsymbol{v}) \cdot d\boldsymbol{r} \\ &= \int_0^v d(m\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{v} \\ &= \int_0^v \boldsymbol{v} \cdot d \left( \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \boldsymbol{v} \right) \\ &= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0 c^2 \end{aligned}$$

$$\text{即} \quad E_k = mc^2 - m_0 c^2 \quad (4-19)$$

这就是相对论的质点动能公式。在相对论中, 质点的动能等于质点因运动而引起的质点的质量的增量  $\Delta m = m - m_0$  乘以光速的平方。

相对论的动能公式, 与经典力学的动能公式在形式上有很大的不同。然而, 在  $v \ll c$  的极限情况下, 由

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}$$

$$\text{可得} \quad E_k \approx \frac{1}{2} m_0 v^2$$

即经典力学的动能表达式是其相对论表达式的低速近似, 对于高速情况,  $(1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$  展开式的高次项不能忽略。

### 三、质能关系

爱因斯坦把式(4-19)中的  $m_0 c^2$  这一恒量, 解释为质点因静质量  $m_0$  而具有的能量, 称为静能  $E_0$ , 即

$$E_0 = m_0 c^2 \quad (4-20)$$

在式(4-19)中,  $mc^2$  在数值上等于质点的动能  $E_k$  和静能  $m_0 c^2$  之和, 爱因斯坦把它称之为质点的总能量, 用  $E$  表示, 即

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma m_0 c^2 \quad (4-21)$$

这就是著名的质能关系。这一关系的重要意义就在于, 它把粒子的质量和它的能量直接联系起来。这就是说, 一定的质量, 相应于一定的能量, 两者的数值只差一个恒

定的因子  $c^2$ 。

质能关系把能量守恒和质量守恒这两条相互独立的自然规律完全统一起来了，按照相对论的概念相互作用的几个粒子的能量守恒关系式可表示为

$$\sum E_i = \sum m_i c^2 = \text{常量}$$

由上式可以直接得出质量守恒关系式

$$\sum m_i = \text{常量}$$

应该强调，在相互作用过程中，系统的相对论质量  $\sum m_i$  是守恒的，但其静质量  $\sum m_{0i}$  并不守恒。在科学史上，所谓的质量守恒实际上只是涉及到粒子的静质量，因此它只是相对论质量守恒在粒子能量变化很小时的近似。如果一个系统的质量发生变化，那么能量也必定发生相应的变化，质能变化的关系为

$$\Delta E = \Delta m c^2 \quad (4-22)$$

根据质能关系，科学家们找到了释放原子能的途径和方法，使人类跨入了利用原子能的新时代，这是爱因斯坦相对论的伟大成就之一。

#### 四、能量和动量的关系

由相对论的能量和动量的定义式

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad P = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

可以直接得到

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4 \text{ 或 } E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} \quad (4-23)$$

这就是相对论的能量-动量关系式，由上述定义式还可以得到

$$v = \frac{c^2 p}{E} \quad (4-24)$$

相对论的能量-动量关系式指出了存在“无质量”粒子的可能性，这些微观粒子具有动量和能量，但是它们没有静止质量 ( $m_0 = 0$ )，因而也没有静能。这时，对于所有的动量  $p$ ，式(4-23)化为

$$E = cp \quad (4-25)$$

将式(4-25)代入式(4-24)，我们可以得出结论：一个静止质量为零的粒子，在任一惯性系中都只能以光速运动，永远不会停止。迄今为止，光子是物理学中的主要的静止质量为零的粒子。

[例 4-3] 静止质量为  $m_{01}$  速度为  $v$  的粒子，与静止质量为  $m_{02}$  的静止粒子碰撞，碰后组成复合粒子，求复合粒子的速度  $u$  和静质量  $M$ 。

解：在高速空间，无论是弹性碰撞，非弹性碰撞或完全弹性碰撞都要遵守动量守恒定律和能量守恒定律，以  $m_{01} + m_{02}$  为系统

$$\text{动量守恒} \quad \frac{m_{01}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} v = \frac{M}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} u$$



$$\text{能量守恒} \quad \frac{m_{01}c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + m_{02}c^2 = \frac{Mc^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

由以上两式可求得

$$u = \frac{m_{01}v}{m_{01} + m_{02}\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$M = \sqrt{m_{01}^2 + m_{02}^2 + \frac{2m_{01}m_{02}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}$$

## 第五节 广义相对论简介

1915年爱因斯坦在惯性质量和引力质量等效的基础上，提出了等效原理，创立了广义相对论。广义相对论是近代引力场理论，在理论上具有重大意义。本节将对广义相对论的基本原理和有关结论作简要介绍。

### 一、等效原理

**1. 惯性质量和引力质量** 出现在牛顿第二定律中的质量，是物体惯性大小的量度，叫惯性质量。出现在万有引力定律中的质量，是物体在引力场所受引力大小的量度，叫引力质量。二者的概念是不相同的。

惯性质量用  $m$  表示，引力质量用  $m'$  表示。将某物体置于引力场中，物体所受的引力就是它改变运动状态的外力

$$F_{\text{引}} = -G \frac{Mr_0}{r^2} m' = m'g = ma \quad (4-26)$$

$g = -G \frac{Mr_0}{r^2}$ ，是引力场强度，简称引力场强。 $r_0$  是产生引力场的质点  $M$  到场点的单位矢量。实验测定物体的加速度

$$a = g \quad (4-27)$$

它与物体的质量无关。这样，由式(4-26)还可得到

$$m = m' \quad (4-28)$$

式(4-27)说明物体在引力场中某点的加速度与该处的引力场强相等。式(4-28)说明，同一物体的惯性质量和引力质量相等。反映它们同等性的一个实验事实，是伽利略的自由落体实验。爱因斯坦将惯性质量和引力质量相等的这一事实，推广为等效原理。

**2. 等效原理** 爱因斯坦设计了一个理想的电梯(爱因斯坦电梯)，在电梯里装着各种实验仪器，还有一位实验物理学家在里面安心地进行着各种测量，不论外面发生什么事情，在这个电梯里什么也看不到。当电梯相对于地球静止时，实验家将看到，电梯里的一切落体都将以重力加速度  $g$  落向地板，如图 4-2(a)所示。这表明电梯里的物体受到了地球引力的作用；如果让电梯本身也作自由下落运动，由于惯性质量和引力质量相等，实验家将发现，电梯里的所有物体，无论是苹果还是羽毛，包括实验家

自己都可以自由停留在空间而不“下落”，即处于完全失重的状态，如图 4-2 (b)所示。这时电梯里的物体不再表现出任何受引力作用的迹象。也就是说实验家观测任何物体的任何力学现象都不能看到任何引力作用的迹象。

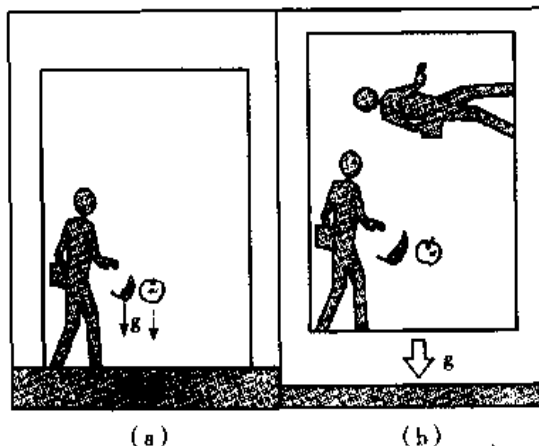


图 4-2 爱因斯坦理想电梯实验

接着，爱因斯坦对此作了进一步的引伸，他认为，在上述电梯里的实验家，不仅通过任何力学现象看不到引力的迹象，而且通过其他任何物理实验也看不到引力的迹象。即是说，在这种电梯的参考系中，引力全部消

除了。电梯中的实验家不能通过自己电梯中的物理现象，来判断他的电梯之外是不是有一个地球这样的引力作用源，他也测不出自己的电梯是否有加速度。这样的电梯，即一个在引力作用下自由下落的参考系叫局域惯性系。

爱因斯坦把这个关于引力的假设称为等效原理。他写到：在一个局域惯性系中，重力效应消失了；在这样一个参考系中，所有物理定律和在一个在太空中远离任何引力物体的真正惯性系中的一样。反过来说，在一个在太空中加速的参考系中，将会出现表观的引力；在这样的参考系中，物理定律就和该参考系静止于一个引力物体附近一样。简单来说等效原理可以表述为：对一切物理过程，匀加速运动的参考系与引力场局域等效，惯性力和引力局域等效。

## 二、广义相对性原理

狭义相对论指出一切惯性系都是等价的，但惯性系与非惯性系却不等效。在广义相对论中，由于惯性质量与引力质量等价，惯性系与非惯性系之间的差别可看作是有无引力场的差别，一个作加速运动的非惯性系可以与有引力作用的惯性系等效。选择一个在引力场中自由下落的加速参考系，可将引力消除而成为局域惯性系。据此，爱因斯坦把相对性原理推广到一切惯性系和非惯性系。他提出，所有参考系都是平权的。即无论是惯性系还是非惯性系，物理定律的表达形式都相同。这一原理称为广义相对性原理。

等效原理、广义相对性原理是爱因斯坦提出的广义相对论的基本原理。在此基础上，爱因斯坦采用了黎曼(Rimann)几何来描述具有引力场的时间和空间，写出了正确的引力场方程，进而精确地解释了水星近日点的反常旋进，预言了光线的引力偏折、引力红移和引力辐射等一系列新的效应，并对宇宙结构进行了开创性的研究。

## 三、引力场的时空特性

1. 光线弯曲 广义相对论由等效原理得到一个重要结论，即光线在引力场中弯曲。如图 4-3 所示，设在地球引力场中有一自由下落的升降机，从升降机左边的 A 点

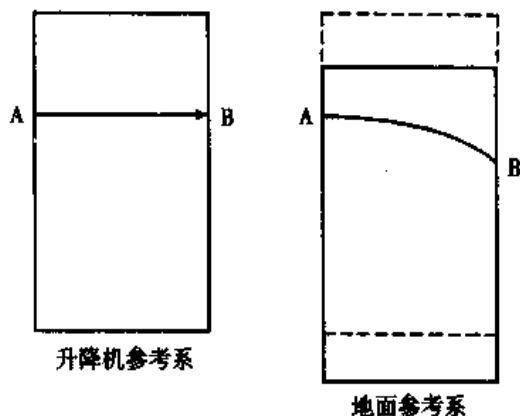


图 4-3 光线在引力场中弯曲

水平向右射出一束光线，由于自由下落的升降机与局域惯性系等价，升降机中的观测者看到的光线和在惯性系中的情形一样，以光速  $c$  沿直线传播到升降机右端的 B 点。从地面参考系看，在光线由 A 点传到 B 点的过程中，升降机在引力场中自由下落了一段距离，地面观测者看到光线传播的路径为一抛物线。由此可见，在引力场中光线将发生弯曲。

牛顿万有引力定律似乎也可以解释光在引力场中的弯曲现象：光子有质量，要受到引力的作用，产生指向引力场的加速度，从而使光的运动方向发生偏折。

但对于偏向角的计算，如光线经过太阳表面时，广义相对论的预言值比万有引力的计算值大 2 倍。许多天文观测证明，广义相对论的预言值与实验的测量值符合得很好。

**2. 空间弯曲** 在牛顿力学中，认为时间和空间的测量与参考系无关，空间两点间的距离即线元  $dl$  为一不变量，即  $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \text{恒量}$ 。在狭义相对论中，时间和空间的测量与参考系有关，一维时间和三维空间构成一个四维的时空整体。在四维空间的  $S$  系和  $S'$  系中，可以用洛伦兹变换证明

$$c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) = c^2 dt'^2 - (dx'^2 + dy'^2 + dz'^2) = \text{恒量}$$

上式称为闵科夫斯基(H. Minkowski)公式。牛顿力学的三维空间和狭义相对论的四维空间(即惯性系中的空间)都是平直的欧几里德(Euclid)空间。光线在这样的空间里作直线传播，可理解为是由惯性系的平直空间特性决定的。

等效原理指出：在局域惯性系中，光在真空中的传播速度仍然是  $c$ 。引力场可以用无数多个加速度不同的局域惯性系取代。因此，光在真空中的引力场中弯曲不会改变光的传播速度  $c$ 。光在引力场中弯曲，同样是由引力时空的特性决定的：引力场中的时空是四维弯曲时空，即引力场使空间产生弯曲，或者说质量使空间产生弯曲。

引力来源于空间的弯曲，如太阳的质量使其周围空间发生弯曲，这种弯曲将影响光和行星的运动。光和行星在弯曲空间的运动要遵守“最短路径”原理(如自由粒子在惯性系中作直线运动的路径最短一样)，从而形成现在的运动方式。爱因斯坦认为：太阳对光和行星没有任何力的作用，它只是使空间发生弯曲，而光和行星只是沿这一弯曲空间中的“最短”路径运动而已。

**3. 引力时间膨胀效应** 如图 4-4 所示，自由空间(惯性空间)是平直空间。光在平直空间作直线传播，从 A 到 B 用的时间为  $\Delta t_0 = \overline{AB}/c$ 。引力场空间是弯曲空间。光在弯曲空间中作曲线传播，从 A 到 B 用的时间  $\Delta t = \widehat{AB}/c$ 。由于  $\widehat{AB} > \overline{AB}$ ，所以  $\Delta t > \Delta t_0$ 。这就是引力引起的时间膨胀效应(又称时间弯曲)。引力时间膨胀是引力空间弯曲的必然结果。

物体质量引起的空间弯曲，是越靠近物体的地方空间弯曲得越厉害，时间膨胀效应越显著。以太阳为例，靠近太阳的空间比远离太阳的空间弯曲得更厉害，则靠近太阳的钟比远离太阳的钟将走得更慢一些。

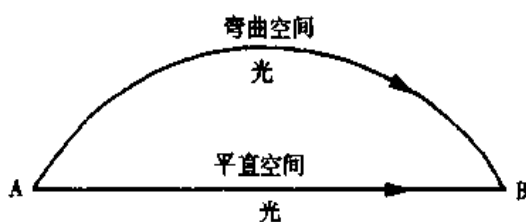


图 4-4 引力时间膨胀

引力时间膨胀效应可以用引力红移现象来证明。由于引力效应，在太阳表面上原子发出的光的频率比远离太阳同种原子发出的光的频率要低。这种由于引力作用使光谱频率向红光方向移动的现象，称为引力红移。实验已经测定，太阳表面钾原子的发光频率比地面钾原子的发光频率减小了  $2/10^6$ ，与理论预言值符合得很好。

#### 四、引力坍缩与黑洞

维持恒星处于平衡状态有两种力：一种是引力，引力使恒星收缩；另一种是星体内部热核反应产生的压力，它抵抗引力引起的收缩。当二者平衡时，形成稳定的恒星。太阳就是处于这一阶段的热星。

当恒星内部的核能用尽之后，它将逐渐演变成一颗冷星。恒星从普通的热星变为冷星过程中，压力不足以抗衡引力的收缩而导致星体的坍缩，这一现象称为引力坍缩。坍缩的星体成为一颗致密星。致密星大体分为白矮星、中子星和黑洞三类。

黑洞是体积为“无限小”而密度为“无限大”的奇态星体，其周围存在着极强的引力场，空间极其弯曲，时间无限膨胀而形成无底洞。任何物质(包括光子)一旦进入黑洞就永远不可能以原物态形式从黑洞中逃离出来。因此黑洞是看不见的，只能凭引力去感知它。

现代天文学家认为有些星体可能就是黑洞，其中最出名的有天鹅座 X-1，其次还有天蝎座 V861 的 X 射线伴星、圆规座 X-1 和 GX339-4 等，有关黑洞的现象和理论还正在观察研究中。

#### 五、引力波

和电荷作加速运动会产生电磁波一样，在引力场中作加速运动的物体也会激发出引力波。据此，爱因斯坦提出广义相对论时，预言了引力波的存在，并指出引力波是一种圆柱波。在地球范围内，引力波极其微弱，探测十分困难。但在近几年对脉冲双星的引力研究中，不但证明了广义相对论的正确性，还间接证明了引力波的存在。

#### 思考题与习题四

- 4-1 洛伦兹变换与伽利略变换的本质差别是什么？二者有何关系？
- 4-2 一列行进中的火车前、后两处遭雷击，车上的人看来是同时发生的，地面上的人看来是否同时？何处雷击在先？
- 4-3 站台两侧各有一列火车以相同的速率南北对开，站台上的人看两火车上的钟走得一样快

吗? 两火车上的人彼此看对方的钟呢?

4-4 一短跑选手, 在地球上以 10 s 的时间跑完了 100 m。在飞行速度为  $0.98c$ , 飞行方向与跑动方向相反的飞船中的观测者看来, 这选手跑了多长时间和多远? ( $50.25 \text{ s}$ ;  $1.48 \times 10^{10} \text{ m}$ )

4-5 一艘以  $0.9c$  的速率离开地球的宇宙飞船, 以相对于自己  $0.9c$  的速率向前发射一枚导弹, 求该导弹相对于地球的速率。 ( $0.994c$ )

4-6 两艘宇宙飞船 A 和 B 沿一直线作相向运动, 一个地球上的观测者测得飞船 A 的速度大小为  $0.75c$ , 而 B 的速度大小为  $0.85c$ , 求 B 相对于 A 的速度。 ( $-0.9771c$ )

4-7 一宇宙飞船以  $0.99c$  的速度相对地球运动, 在飞船上有一高强度的脉冲光讯号, 脉冲延续的时间为  $2 \times 10^{-6} \text{ s}$ 。在某一时刻, 一个地球上的观测者发现, 飞船正好在他头顶上方 1000 km 的高处。问: (1) 在地球上的观测者看来, 光脉冲延续的时间是多长? (2) 在脉冲延续的这段时间里, 飞船相对于地面飞行了多少路程? ( $1.42 \times 10^{-5} \text{ s}$ ;  $4.22 \text{ km}$ )

4-8 一观测者测出运动着的米尺的长度为 0.5 m, 问此米尺以多大的速度接近观测者? ( $0.87c$  或  $2.61 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ )

4-9 太阳每秒钟向周围空间辐射出的能量约为  $5 \times 10^{26} \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}$ , 由于这个原因, 太阳每秒钟减少多少质量? 把这个质量同太阳目前的质量  $2 \times 10^{30} \text{ kg}$  作比较, 其比值为多少? ( $5.6 \times 10^9 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ ;  $2.8 \times 10^{-21}$ )

4-10 静质量为 0.511 Mev 的电子, 具有 5 倍于它的静能的总能量, 试求它的动量和速率。 ( $2.50 \text{ Mev}/c$ ;  $0.980c$ )

4-11 粒子的静止质量为  $m_0$ , 当其动能等于其静能时, 其质量和动量各为多少? ( $2m_0$ ;  $\sqrt{3}m_0c$ )

4-12 (1) 把电子自速度  $0.9c$  增加到  $0.99c$  所需的能量是多少? 这时电子质量增加了多少? (2) 某加速器把质子加速到 1 Gev 的能量, 求该质子的速度, 这时其质量为其静质量的几倍? [(1)  $2.46 \text{ Mev}$ ;  $4.37 \times 10^{-30} \text{ kg}$ 。(2)  $0.875c$ ; 2.066 倍]

(杨海珉)

## 第五章 分子动理论

---

学习本章后，你应：

---

1. 掌握理想气体分子的状态方程、压强公式、能量公式和液体曲面的附加压强。
  2. 理解理想气体分子的微观模型、分子动理论的统计方法和液体的表面现象。
  3. 了解物质微观结构的基本观点、气体分子的速率分布规律、输运过程及表面活性物质的作用。
- 

宏观物体通常是由大量的分子或原子组成，它们都是微观粒子。微观粒子有大小、质量、速度、能量等，用来表示单个微观粒子状态的物理量称为微观量。一般在实验室中测得的是表示大量分子集体特性的物理量，它们称为宏观量。单个粒子的运动具有很大的偶然性，因此粒子的微观量很难测量，但就大量微观粒子集体表现来看，却存在一定的统计规律。分子动理论从物质的微观结构出发，应用微观粒子运动的力学定律和统计方法，求出微观量的统计平均值，以了解宏观规律的本质。

生命过程中有很多与热现象有关的过程，分子动理论及其研究方法，对于生命科学具有重要意义。本章介绍分子动理论的一些基本知识。

### 第一节 物质的微观结构

宏观物体的分子或原子都处在永不停息的、无规则的运动之中，物体的温度愈高，运动就愈剧烈。大量分子的这种无规则运动称为热运动。

分子之间存在力的作用。分子能够结合成物体的凝聚态(液态和固态)，说明分子间有引力。但固体或液体即使在巨大的压力作用下，其体积的改变也十分微小，这又说明分子之间还存在强大的斥力。分子间的引力和斥力统称分子力。根据实验和近代理论分析，物体分子间作用力  $F$  与分子中心间距离  $r$  的关系可用下式表示：

$$F = \frac{C_1}{r^m} - \frac{C_2}{r^n} \quad (5-1)$$

式中  $C_1$ 、 $C_2$ 、 $m$ 、 $n$  都是正数，根据实验数据确定。式(5-1)第一项是正的，代表斥力；第二项是负的，代表引力。由于  $m$  和  $n$  都比较大，所以分子力随着分子间距离的增加而急剧减小，故称为短程力。短程力只作用于很短距离，超过有效作用距离后，作用力实际上可以完全忽略。由于  $m > n$ ，所以斥力的有效作用距离比引力小。分子力  $F$  与分子中心间距离  $r$  的关系如图 5-1(a)所示。当  $r = r_0$  时，斥力与引力恰

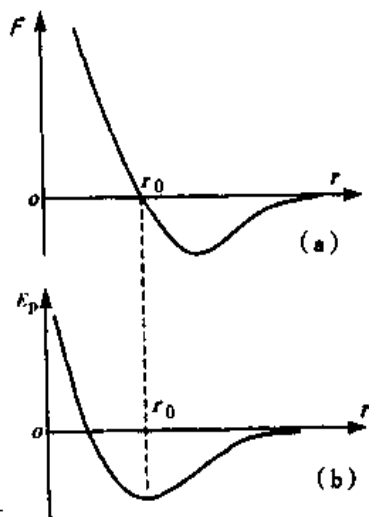


图 5-1

(a) 分子间作用力  $F$  与分子间距离  $r$  的关系

(b) 分子间作用势能  $E_p$  与分子间距离  $r$  的关系

好平衡,  $F=0$ , 这个位置称为平衡位置。 $r_0$  的数量级约为  $10^{-10}\text{m}$ 。当  $r < r_0$  时,  $F-r$  曲线很陡, 相当于分子紧挨在一起, 彼此间的斥力很大。当  $r > r_0$  时( $r$  的数量级约为  $10^{-10} \sim 10^{-8}\text{m}$ ), 分子间有一定的引力, 随着分子间距离的增大, 引力渐趋于零。气体分子间的距离一般情况下是相当大的, 因此, 气体分子间的引力极为微小, 可以忽略不计。

分子间的相互作用也可以用分子间的势能曲线来描述。分子间的作用势能  $E_p$  与分子间距离  $r$  的关系如图 5-1 (b) 所示。由图可知, 当  $r=r_0$  时, 势能最低, 分子处于稳定状态。这一位置正好是图 5-1 (a) 中  $F=0$  的位置。当分子的位置偏离了  $r_0$  时, 势能增加, 分子处于不稳定状态, 这时分子就试图回到势能最低的状态。

综上所述, 一切物体都是由大量的分子组成; 所有分子都处在不停的、无规则的运动之中; 分子间存在力的互相作用。这就是物体微观结构的基本概念。

分子力的作用使分子聚集在一起, 在空间形成某种有规则分布(有序排列), 而分子的无规则热运动将破坏这种排列, 使分子分散开来。物质的聚集态通常有气态、液态、固态、液晶态、等离子态等。不同的温度下, 物体之所以会表现为不同的聚集态, 是由分子力的作用来决定的。

## 第二节 理想气体分子动理论

本节从分子热运动的基本观点出发, 采用统计的方法, 推导出理想气体应该遵循的宏观规律, 揭示理想气体宏观特性的微观本质。

### 一、理想气体状态方程

一定质量的气体在一确定的容器中, 只要它与外界没有能量的交换, 内部也没有任何形式的能量交换(如化学变化或原子核反应), 那么不论气体的原始状态如何, 经过相当长的时间后, 终将达到气体内各部分具有相同的温度和压强的状态, 并且长期维持这一状态不变。在不受外界影响的条件下, 一个系统的宏观性质不随时间改变的状态称为平衡态。平衡态只是一种宏观上的寂静状态, 在微观上, 分子的热运动是永不停息的, 系统的平衡态是一种动态平衡。原来处于非平衡态的气体, 最终都会由于分子的热运动和分子间的相互碰撞达到平衡态。

系统的平衡态可以用一组表示系统特性的宏观参量来描述, 这些宏观参量称为态参量。对于平衡态下的一定量的气体, 一般用它的体积  $V$ 、压强  $p$  和温度  $T$  来表示其

宏观状态，它们就是气体的态参量。

实验表明，平衡态下气体的态参量之间存在着一定的关系式，称为气体的状态方程。在任何情况下绝对遵守玻意耳-马略特定律、盖-吕萨克定律和查理定律的气体称为理想气体。从三条实验定律可以导出理想气体态参量之间的关系式，即理想气体状态方程

$$PV = \frac{M}{\mu} RT \quad (5-2)$$

式中  $R = 8.314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  称为摩尔气体常量， $\mu$  是分子量， $M$  为容器中气体的质量，单位为  $\text{kg}$ ，容器体积  $V$  的单位为  $\text{m}^3$ ，压强  $P$  的单位为  $\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$  或  $\text{Pa}$ 。

理想气体实际上是不存在的，它只是真实气体的近似。一般气体，在压强不太大和温度不太低的实验范围内，遵从上述三条实验定律。

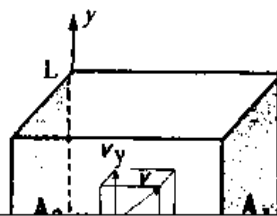
## 二、理想气体微观模型

在标准状态下，气体分子间的平均距离大约是其本身大小的 10 倍，因此，可以把气体看作是分子间有很大距离的分子的集合。根据这一事实，我们提出理想气体的微观模型：①分子本身的大小与分子之间的平均距离比较起来，可以忽略不计；②除了气体分子相互碰撞和气体分子与容器壁碰撞的瞬间外，气体分子之间以及气体分子与容器壁之间的作用力可以忽略不计；③气体分子之间的碰撞和气体分子与容器壁的碰撞都是完全弹性的。以上微观模型在具体使用时，还必须作出统计性假设。即认为：同种气体分子的大小和质量完全相同；气体分子的动能，平均说来远比它们在重力场中的势能要大，所以分子所受的重力可以忽略不计；平衡态时，在容器内气体分子的运动是完全紊乱的，分子按位置的分布是均匀的，分子速度按方向的分布也是均匀的。统计性假设只适用于大量分子的集体运动。

以上假设都有一定的实验基础，由它们所推得的结果是符合理想气体性质的，在一定范围内可以解释真实气体的基本性质。

## 三、理想气体的压强公式

装于容器中的理想气体分子，在作无规则运动时，将不断地与容器壁碰撞。就任一分子来说，它碰在器壁的什么地方，给予器壁多大的冲量，都是偶然的，碰撞也是断续的。但就大量分子整体来说，每一时刻都有大量的分子和器壁碰撞。可以认为，容器中的气体施于器壁的宏观压强就是大量分子碰撞器壁的结果。根据理想气体分





种气体分子,  $N$  很大, 忽略重力的作用, 且不受其他外场的作用, 系统处于热平衡状态, 各分子速度不等, 分别为  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_N$ 。首先考虑分子 1 在一次碰撞中对器壁的作用。设分子 1 的速度在  $x, y, z$  方向的分量分别为  $v_{1x}, v_{1y}$  和  $v_{1z}$ , 此分子与  $A_1$  面碰撞时, 它的  $x$  方向的分速度由  $v_{1x}$  改变为  $-v_{1x}$ , 而与  $A_2$  面碰撞时, 再由  $-v_{1x}$  改变为  $v_{1x}$ 。在  $y$  和  $z$  方向的分速度  $v_{1y}$  和  $v_{1z}$  则不受影响。所以这个分子每与  $A_1$  面碰撞一次, 动量的改变为  $-2mv_{1x}$ , 动量改变的方向垂直于  $A_1$  面。分子与  $A_1$  面连续 2 次碰撞之间, 在  $x$  方向所经过的距离为  $2L$ , 所需的时间为  $2L/v_{1x}$ 。单位时间内, 分子 1 与  $A_1$  面碰撞的次数为  $v_{1x}/2L$ , 所以, 分子 1 在单位时间内与  $A_1$  面作用的动量改变为

$$\frac{v_{1x}}{2L} \times (-2mv_{1x}) = -\frac{mv_{1x}^2}{L}$$

单位时间内  $N$  个分子与  $A_1$  面作用的总的动量改变为

$$-\frac{m}{L}(v_{1x}^2 + v_{2x}^2 + v_{3x}^2 + \dots + v_{Nx}^2)$$

这也就是器壁给分子的力  $F$ 。由牛顿第三定律可知, 分子给器壁的力  $F' = -F$ 。故分子施加给器壁  $A_1$  面的压强为

$$P = \frac{F'}{L^2} = \frac{m}{L^3}(v_{1x}^2 + v_{2x}^2 + v_{3x}^2 + \dots + v_{Nx}^2) \quad (5-3)$$

又因单位体积的分子数  $n = N/L^3$ , 故式(5-3)可写为

$$P = mn \left( \frac{v_{1x}^2 + v_{2x}^2 + v_{3x}^2 + \dots + v_{Nx}^2}{N} \right) \quad (5-4)$$

式中  $(v_{1x}^2 + v_{2x}^2 + v_{3x}^2 + \dots + v_{Nx}^2)/N$  是容器中所有分子的  $v_x^2$  的平均值, 用  $\overline{v_x^2}$  表示。对任一分子来说,  $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ , 且平衡状态下气体的性质与方向无关, 所以三个速度分量平方的平均值彼此相等, 即  $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \overline{v^2}/3$ , 于是式(5-4)可写成

$$P = \frac{1}{3} mn \overline{v^2} = \frac{2}{3} n \cdot \left( \frac{1}{2} m \overline{v^2} \right) = \frac{2}{3} n \cdot \bar{\epsilon} \quad (5-5)$$

式中  $\bar{\epsilon} = m \overline{v^2}/2$  表示气体分子的平均平动动能。上式说明, 气体的压强正比于单位体积内的分子数  $n$  和分子的平均平动动能  $\bar{\epsilon}$ ,  $n$  和  $\bar{\epsilon}$  越大, 压强也越大。式(5-5)称为理想气体的压强公式, 它把宏观量压强  $P$  与分子的平均平动动能  $\bar{\epsilon}$  联系了起来。实际上压强是大量分子在足够长的时间内对足够大的面积碰撞所产生的平均效果, 是一个统计平均值, 离开了“大量分子”和“统计平均”, 压强就失去了意义。 $P$  可以由实验测定, 而  $\bar{\epsilon}$  不能直接测定, 但从这个公式出发能够满意地解释或推证许多实验定律。

#### 四、理想气体的能量公式

从压强公式与理想气体状态方程中消去压强  $P$ , 得

$$\frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} \frac{1}{n} \frac{MRT}{\mu V} \quad (5-6)$$

因为  $n = N/V$ , 而  $N = (M/\mu)N_A$ ,  $N_A$  是阿伏伽德罗常量,  $N_A = 6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ ,

代入式(5-6)得分子的平均平动动能 $\bar{\epsilon}$ 为

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 = \frac{3}{2} \frac{R}{N_A} T = \frac{3}{2} kT \quad (5-7)$$

式中  $k = R/N_A$  称为玻耳兹曼常量, 其值为  $k = 1.381 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ 。式(5-7)说明气体分子的平均平动动能只与温度有关, 并与绝对温度成正比, 而与气体的性质无关。即在相同的温度下, 一切气体分子的平均平动动能都相等。温度越高表示物体内部分子热运动越剧烈。式(5-7)称为理想气体的能量公式, 它揭示了宏观量  $T$  和微观量的平均值 $\bar{\epsilon}$ 之间的联系。由于温度是与大量分子的平均平动动能相联系的, 所以温度是大量分子热运动的集体表现, 也是有统计意义的。对于单个分子来说, 温度是没有意义的。

决定一个物体在空间的位置所需要的独立坐标的数目, 称为物体的自由度。气体分子的自由度随其结构而异。单原子气体分子可视为质点, 它在空间的位置可用三个独立的坐标  $x$ 、 $y$ 、 $z$  来确定, 故有三个自由度。对于多原子分子, 若忽略分子内原子之间的振动, 则可视为刚性分子。刚性双原子分子可视为一直线, 描述其质心的位置需要三个独立坐标, 另外需要两个坐标来确定直线的方位, 共有五个自由度。刚性三原子或三原子以上气体分子, 需要三个平动自由度和三个转动自由度, 共六个自由度。

因为  $\bar{v}_x^2 = \bar{v}_y^2 = \bar{v}_z^2 = \bar{v}^2/3$ , 代入式(5-7)得每个自由度的平均平动动能为

$$\frac{1}{2} m \bar{v}_x^2 = \frac{1}{2} m \bar{v}_y^2 = \frac{1}{2} m \bar{v}_z^2 = \frac{1}{6} m \bar{v}^2 = \frac{1}{2} kT \quad (5-8)$$

可见分子在每一个运动自由度上的平均平动动能都是  $kT/2$ 。这一结论虽然是对分子平动说的, 但在平衡态下, 由于气体分子无规则运动的结果, 使得任何一种可能的运动都不会比另一种可能的运动更占优势, 机会是完全均等的。因此, 平均说来, 不论气体分子的何种运动, 相应于每一个可能自由度的平均动能都应相等, 这一结论称为能量按自由度均分原理。如果气体分子有  $i$  个自由度, 则平均每一个分子的总动能为  $ikT/2$ 。1 摩尔自由度为  $i$  的气体的总动能为

$$E_{\text{mol}} = \frac{i}{2} RT \quad (5-9)$$

## 五、理想气体定律的推导

从理想气体的压强公式和能量公式出发, 可以导出理想气体的一些实验定律。作为例子, 我们推导阿伏伽德罗定律和道尔顿定律。

1. 阿伏伽德罗定律 将式(5-7)代入式(5-5)可得

$$P = \frac{2}{3} n \cdot \frac{1}{2} m \bar{v}^2 = \frac{2}{3} n \cdot \frac{3}{2} kT = nkT \quad (5-10)$$

由上式可知, 在相同的温度和压强下, 各种气体在相同的体积内所含的分子数相等, 这就是阿伏伽德罗定律的另一种表达。

在标准状态下, 即  $P = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$ ,  $T = 273 \text{ K}$  时, 任何气体在  $1 \text{ m}^3$  中所含的分子数都等于  $n_0 = 2.6871 \times 10^{25} / \text{m}^3$ 。这个数称为洛施密特常量。

**2. 道尔顿定律** 设在同一容器中有几种彼此不起化学作用的气体, 各气体分子的质量和单位体积中的分子数分别为  $m_1$ 、 $m_2$ 、……和  $n_1$ 、 $n_2$ 、……。则在单位体积中混合气体的分子数为  $n = n_1 + n_2 + \dots$ , 因在相同温度条件下, 各种气体以及混合气体分子的平均平动动能都相等, 即

$$\frac{1}{2} m_1 \overline{v_1^2} = \frac{1}{2} m_2 \overline{v_2^2} = \dots = \bar{\epsilon}$$

设  $P_1$ 、 $P_2$ 、……分别代表各种气体单独存在于容器内时的压强, 即所谓分压强,  $p$  代表混合气体的压强, 则根据式 (5-5) 有

$$\begin{aligned} P &= \frac{2}{3} (n_1 + n_2 + \dots) \cdot \bar{\epsilon} = \frac{2}{3} n_1 \frac{1}{2} m_1 \overline{v_1^2} + \frac{2}{3} n_2 \frac{1}{2} m_2 \overline{v_2^2} + \dots \\ &= P_1 + P_2 + \dots \end{aligned} \quad (5-11)$$

上式表明: 混合气体的压强等于组成该混合气体各成分的分压强的和, 称为道尔顿分压定律, 或称道尔顿定律。

[例题 5-1] 有一真空管, 在  $0^\circ\text{C}$  时其真空度为  $1.33 \times 10^{-3} \text{ Pa}$ , 求真空管内单位体积中的分子数和总平均平动动能。

解: 根据式 (5-10) 得  $n = p/kT$

已知  $k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$ ,  $T = 273 \text{ K}$ ,  $P = 1.33 \times 10^{-3} \text{ Pa}$  代入上式得

$$n = \frac{1.33 \times 10^{-3} \text{ Pa}}{1.38 \times 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1} \times 273 \text{ K}} = 3.53 \times 10^{17} \text{ m}^{-3}$$

即真空管内气体在每  $\text{m}^3$  中有  $3.53 \times 10^{17}$  个分子。

又  $P = \frac{2}{3} n \bar{\epsilon}$ , 所以单位体积内气体分子的总平动动能为

$$\bar{\epsilon} = \frac{3P}{2n} = \frac{3}{2} P = \frac{3}{2} \times 1.33 \times 10^{-3} = 1.995 \times 10^{-3} \text{ J}\cdot\text{m}^{-3}$$

### 第三节 气体分子速率分布律和能量分布律

理想气体处于热动平衡时, 由于气体分子的相互碰撞, 每个分子的速率都在不断地发生变化。在某一时刻, 各个分子速率或能量的大小不同, 运动的方向也不一致。对某一特定的分子来说, 它的速率或能量的大小完全是偶然的, 而就大量分子组成的分子整体来说, 分子的速率或能量的分布却遵循一定的统计规律。1859 年麦克斯韦首先用统计方法从理论上解决了气体分子运动的速率分布问题, 并且不久就为实验所证实。

#### 一、麦克斯韦速率分布定律

设容器中的气体处于平衡状态, 气体的绝对温度为  $T$ , 分子数为  $N$ , 分子的质量为  $m$ 。麦克斯韦速率分布定律告诉我们, 速率介于  $v$  和  $v + dv$  区间内的分子数  $dN_v$  可以用下式表示:

$$dN_v = 4\pi N \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \cdot e^{-\left(\frac{mv^2}{2kT}\right)} \cdot v^2 dv \quad (5-12)$$

式(5-12)的物理意义是：速率在  $v$  与  $v + dv$  之间的分子数  $dN_v$  与总分子数  $N$  成正比；与速率间隔  $dv$  成正比；并和下式成正比。

$$4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \cdot e^{-\left(\frac{mv^2}{2kT}\right)} \cdot v^2$$

上式对于一定的气体在一定温度下是  $v$  的函数，可用  $f(v)$  表示，即

$$f(v) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \cdot e^{-\left(\frac{mv^2}{2kT}\right)} \cdot v^2 \quad (5-13)$$

由式(5-12)得

$$f(v) = \frac{dN_v}{Ndv} \quad (5-14)$$

而  $dN_v/(N \cdot dv)$  是单位速率间隔内的分子数对于总分子数的百分比，所以  $f(v)$  的数值愈大就表示在这一单位速率间隔内，分子具有这样速率的百分比愈高。函数  $f(v)$  定量地反映出一定气体的分子在一定温度下按速率分布的具体情况，称为速率分布函数。很显然，速率分布函数应该满足归一化条件

$$\int_0^{\infty} f(v)dv = 1$$

图 5-3 (a) 是根据式(5-12)计算出来的  $O_2$  和  $H_2$  在不同温度时的分子速率分布曲线。横轴表示速率  $v$ ，纵轴代表  $f(v)$ 。例如图 5-3 (a) 中阴线部分的面积就代表速率区间  $dv$  内的分子数占总分子数的百分比。

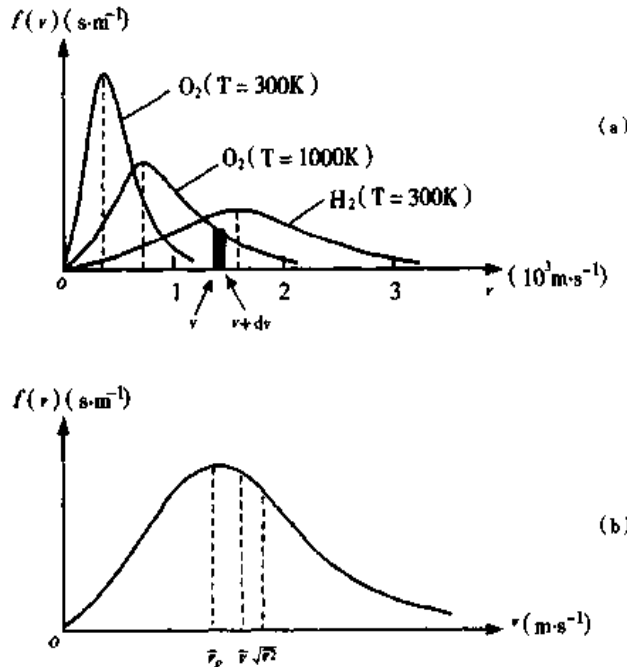


图 5-3 麦克斯韦气体分子速率分布定律

从图中的曲线可以看出分子速率分布的一些特点：

(1) 每条曲线都是从原点开始，逐渐上升，到达某一最高点然后下降。这说明在

某一速率  $v_p$  处函数有一极大值,  $v_p$  为最概然速率, 其物理意义是: 若把整个速率范围分成许多相等的小区间, 则  $v_p$  所在的区间内的分子数占总分子数的百分比最大。

$v_p$  可由  $\left. \frac{df(v)}{dv} \right|_{v_p} = 0$  求出

$$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} \approx 1.41\sqrt{\frac{RT}{\mu}} \quad (5-15)$$

(2) 速率与  $v_p$  相差愈远的分子数目愈少, 但总存在着一些速率比  $v_p$  快得多或是慢得多的分子。

(3) 当温度升高时,  $v_p$  的值增大,  $f(v_p)$  减少, 整个气体中速率快的分子数目增加, 速率慢的分子数目减少。这就是通常说的温度越高, 分子运动越剧烈的真正含义。

(4)  $v_p$  随分子质量增加而减小。

已知速率分布函数, 可以求得分子的平均速率  $\bar{v}$ , 它定义为

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \left( \sum v_i \right) / N = \int v dN_v / N = \int_0^{\infty} v f(v) dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \\ &= \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}} \approx 1.60\sqrt{\frac{RT}{\mu}} \end{aligned} \quad (5-16)$$

还可以利用速率分布函数求  $v^2$  的平均值  $\overline{v^2}$

$$\overline{v^2} = \left( \sum v_i^2 \right) / N = \int v^2 dN_v / N = \int_0^{\infty} v^2 f(v) dv = \frac{3kT}{m}$$

它的平方根称为方均根速率  $v_{rms}$

$$v_{rms} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} \approx 1.73\sqrt{\frac{RT}{\mu}} \quad (5-17)$$

以上三种速率中, 方均根速率最大, 平均速率次之, 最概然速率最小, 它们的大小次序不因温度及气体的种类而变化, 见图 5-3 (b)。三种速率有不同的应用, 例如, 讨论速率分布时要用最概然速率, 计算分子的平均平动动能时要用方均根速率, 讨论分子的碰撞次数时要用平均速率。

[例题 5-2] 求  $0^\circ\text{C}$  时氢气和氧气的方均根速率。

解: 已知  $\mu_{\text{H}_2} = 0.2 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ ,  $\mu_{\text{O}_2} = 3.2 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ , 代入式(5-17), 分别得氢的方均根速率为

$$\sqrt{\frac{3RT}{\mu_{\text{H}_2}}} = \sqrt{\frac{3 \times 8.314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \times 273\text{K}}{0.2 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}}} = 1845 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

氧的方均根速率为

$$\sqrt{\frac{3RT}{\mu_{\text{O}_2}}} = \sqrt{\frac{3 \times 8.314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \times 273\text{K}}{3.2 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}}} = 461 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

## 二、平均自由程和平均碰撞频率

由上例可知, 气体分子运动速率的数量级约为  $10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 。但是实际上每个分子在单

位时间内的位移却远没有这样大。气体分子在运动中经常互相碰撞，在碰撞后它们的速率和运动方向都要发生变化，分子实际上是沿着曲折的路线运动的。一个分子在两次连续碰撞之间所走的自由路程有长有短，但是在一定条件下，这些路程的平均值是一定的。这一数值称为分子运动的平均自由程，以  $\bar{\lambda}$  表示。单位时间内一个分子的平均碰撞次数，称为平均碰撞频率，以  $\bar{z}$  表示

$$\bar{z} = \frac{v}{\bar{\lambda}} \quad (5-18)$$

气体单位体积内的分子数目愈多，或分子的直径愈大，引起的碰撞愈频繁，使平均自由程缩短。理论分析表明，分子运动的平均自由程  $\bar{\lambda}$  与分子直径  $d$  及单位体积内的分子数  $n$  之间有如下关系：

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} \quad (5-19)$$

因为  $P = nkT$ ，上式又可改写成

$$\bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 P} \quad (5-20)$$

这说明：当温度一定时，平均自由程与压强成反比。表 5-1 列出在标准状态下几种气体分子的有效直径和平均自由程。表 5-2 列出在 0°C 时，不同压强下空气分子的平均自由程的数量级。

表 5-1 几种气体在标准状态下的有效直径和平均自由程

| 气 体             | $d(\text{m})$         | $\bar{\lambda} (\text{m})$ |
|-----------------|-----------------------|----------------------------|
| H <sub>2</sub>  | $2.7 \times 10^{-10}$ | $11.6 \times 10^{-8}$      |
| N <sub>2</sub>  | $3.7 \times 10^{-10}$ | $6.12 \times 10^{-8}$      |
| O <sub>2</sub>  | $3.6 \times 10^{-10}$ | $6.5 \times 10^{-8}$       |
| CO <sub>2</sub> | $4.6 \times 10^{-10}$ | $3.98 \times 10^{-8}$      |
| 空气              | $3.5 \times 10^{-10}$ | $6.88 \times 10^{-8}$      |

表 5-2 0°C 不同压强下空气分子的平均自由程

| $p(\text{Pa})$         |                   | $\bar{\lambda} (\text{m})$ |
|------------------------|-------------------|----------------------------|
| $1.013 \times 10^5$    | (1atm)            | $7.0 \times 10^{-8}$       |
| 133.3                  | (1mmHg)           | $5.4 \times 10^{-5}$       |
| 1.333                  | ( $10^{-2}$ mmHg) | $5.4 \times 10^{-3}$       |
| $1.333 \times 10^{-2}$ | ( $10^{-4}$ mmHg) | $5.0 \times 10^{-2}$       |
| $1.333 \times 10^{-4}$ | ( $10^{-6}$ mmHg) | 50                         |

在标准状态下，如果取  $\bar{v}$  的数量级为  $10^2 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ，由表 5-1 可知， $\bar{\lambda}$  的数量级为  $10^{-7} \text{m}$ ，则平均碰撞频率  $\bar{z}$  的数量级为  $10^9 \text{s}^{-1}$ ，即在 1 秒内一个分子将和其他分子平均碰撞约几十亿次。由此我们可以得出：气体分子的平均自由程要比分子的有效直径约大 1000 多倍，气体分子的运动是相当自由的，且永不停息地运动着。每当分子行进千万分之一米

左右的极短路程,就要与其他分子相碰撞而改变运动的速率和方向,可见气体分子总是在不停地作无规则的热运动。

[例题 5-3] 氮气分子的有效直径  $d = 3.7 \times 10^{-10} \text{m}$ , 在标准状态下, 求氮气分子的平均碰撞频率。

$$\begin{aligned} \text{解: } \quad \bar{\lambda} &= \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 P} = 6.12 \times 10^{-8} \text{ m}, \quad \bar{v} = 1.60 \sqrt{\frac{RT}{\mu}} = 455.5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\ \bar{z} &= \frac{\bar{v}}{\bar{\lambda}} = \frac{455.5}{6.12 \times 10^{-8}} = 7.4 \times 10^9 \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$

即氮气分子在标准状态下, 每秒碰撞 70 多亿次。

### 三、玻耳兹曼能量分布定律

气体分子在不受外力作用下达到平衡状态时, 尽管分子的速率很不一致, 但是每单位体积内的平均分子数目是相等的。如果气体处于重力场中, 或者带电的分子处于电场中, 则分子除了动能以外还具有势能, 分子的分布就不会再是均匀的了。这时单位体积中的分子数目与分子的势能有关, 服从玻耳兹曼分布定律:

$$n = n_0 e^{-E_p/kT} \quad (5-21)$$

式中  $n$  表示单位体积中的分子数,  $n_0$  是在势能为零处的单位体积中的分子数,  $E_p$  是分子的势能。分子所处的位置不同,  $E_p$  不同, 气体分子的密度也不相同。

作为一个例子, 我们来了解大气分子在重力场中的分布情况。大气分子在重力作用下具有势能  $E_p = mgh = \frac{\mu}{N_A} gh$ , 代入式(5-21), 得

$$\begin{aligned} n &= n_0 e^{-\mu gh/N_A kT} \\ &= n_0 e^{-\mu gh/RT} \end{aligned} \quad (5-22)$$

式中  $n_0$  是  $h = 0$  处, 即海平面大气分子的  $n$  值。可见大气分子的浓度(单位体积中的分子数)是随海拔高度增高作指数衰减的。由于气体的压强  $p$  和浓度  $n$  成正比关系, 故有

$$\frac{P}{P_0} = \frac{n}{n_0} = e^{-\mu gh/RT}$$

或 
$$P = P_0 e^{-\mu gh/RT} \quad (5-23)$$

式中  $P_0$  是海平面的大气压强,  $P$  是海拔高度为  $h$  处的大气压强。这个公式给出大气压强与海拔高度的关系。

玻耳兹曼分布定律不仅适用于气体, 也可以用来计算溶液中的离子分布情况。

应该指出, 上面的推导没有考虑大气温度随海拔高度的变化, 但是在温差不大的低空范围内, 用式(5-22)和式(5-23)计算所得的结果与实际情况能较好地符合。

## 第四节 输 运 过 程

前两节讨论的都是气体在平衡态下的性质, 这时物体各处的温度、压强、密度和

浓度等都是均匀的，系统处于动态平衡状态。但是，当物体(特别是气体和液体)远离平衡态时，其内部各处的温度、压强、密度等就各不相同，这时将发生物质粒子、能量或动量在物体内各部分间的迁移现象。例如，气体或液体各部分的密度不均匀时，就会出现分子从高密度处向低密度处迁移，形成质量迁移的现象，称之为扩散。当物体各部分的温度不均匀时，发生高温处能量较大的分子与低温处能量较小的分子交换，出现能量迁移的现象，称为热传导。而当流体内部各层流速不相同，会发生粘滞现象。这些都是典型的从非平衡态趋向平衡态的变化过程。在从非平衡态趋向于平衡态的过程中，物体内出现的质量、能量或动量的转运过程，称为输运过程。

从表面上看，扩散、热传导和粘滞现象似乎互不相关，但实际上这三种现象具有共同的宏观特征和微观机构，它们产生的原因都是由于分子的热运动和分子间的频繁碰撞。从分子运动的观点可以推导出输运过程的基本规律，并确定扩散系数、导热系数和粘滞系数与物体结构参量之间的关系。粘性在第二章中已作了介绍。本节将着重介绍有关能量和质量转运过程的物理基础。

## 一、热传导

当物体内部的温度不均匀时，就会有能量从温度较高处传递到温度较低处，这种现象称为热传导。设温度  $T$  沿  $z$  轴正向逐渐升高，如图 5-4 所示。在时间  $dt$  内，通过与  $z$  轴垂直的截面  $dS$  的从 B 部传递到 A 部的能量  $dQ$  与温度梯度  $dT/dz$ 、面积  $dS$  和时间  $dt$  成正比：

$$dQ = -K \left( \frac{dT}{dz} \right) \cdot dS \cdot dt \quad (5-24)$$

式中导数  $dT/dz$  是温度梯度，它表示温度在单位距离中的变化量。负号表示能量传递的方向与温度梯度的方向相反，即能量沿温度逐渐降低的方向传递。K 称为导热系数，它由物体的性质决定，其单位为  $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$ 。

热传导过程起源于分子的热运动。温度较高处的分子动能较大，温度较低处的分子动能较小。温度较高处的分子有可能进入温度较低处，使该处分子的平均动能增加，温度较低处的分子也有可能进入温度较高处，使该处分子的平均动能减小。在分子相互碰撞时，虽然两个分子运动速度的改变与碰撞时的具体情况有关，但平均起来总是来自高温处的分子损失能量，而来自低温处的分子获得能量。因此，热传导过程是微观粒子输运能量的过程，是使物体的温度均匀化而趋于热平衡的过程。

根据气体分子运动论，可以推出气体的导热系数为

$$K = \frac{1}{3} \rho \cdot \bar{v} \cdot \bar{\lambda} \cdot C_v \quad (5-25)$$

式中  $C_v$  是气体的等体摩尔热容。气体分子的运动速率虽然很大，但平均自由程很短，

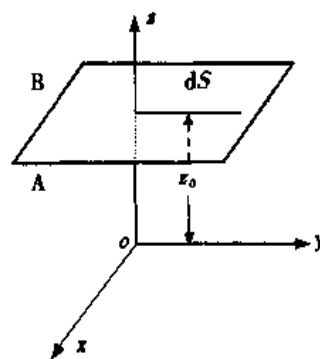


图 5-4 物体内输运过程定律的推导图



而且气体的密度小，运输能量的粒子少，所以气体的导热系数是很小的。

非金属的液体和固体的导热系数也都不大，因为它们主要是通过分子碰撞而运输能量。但是金属的导热系数却很大，其能量运输过程主要是借助自由电子来实现，因为自由电子的平均自由程很大。气体和液体中的能量运输，宏观对流比传导所起的作用更大。稀疏多孔的棉毛衣服之所以保温，就是由于它抑制了空气的对流。

## 二、扩 散

当物体内部的成分不均匀时，该成分将从密度高处向密度低处转移，这就是扩散现象。设某种物质的密度沿  $z$  轴正方向增加，密度梯度为  $d\rho/dz$ ，如图 5-4 所示，该物质将从 B 部扩散到 A 部，在时间  $dt$  内通过垂直于  $z$  轴的截面  $dS$  的该物质的质量  $dm$  和密度梯度  $d\rho/dz$ 、面积  $dS$ 、时间  $dt$  成正比，即：

$$dm = -D \frac{d\rho}{dz} \cdot dS \cdot dt \quad (5-26)$$

式中  $D$  称为扩散系数，负号表示质量沿密度梯度减小的方向运输。式(5-26)称为菲克第一定律。

扩散过程也是分子热运动的结果。由于分子热运动和分子间的不断碰撞，从高密度处进入低密度处的分子数要比从低密度处进入高密度处的分子数多一些，密度差愈大，这种差别也愈大。扩散现象是物体内部消除密度差使其趋于均匀分布的一种倾向。如果只有各种成分的密度差别而没有压强和温度的差别，则气体中的扩散过程进行得很快，当容器不很大时，达到平衡态的时间通常以秒计；液体中则以日计；而固体中在室温下经过很多年也不一定能达到平衡态。

气体的扩散系数由理论可以推得

$$D = \frac{1}{3} \bar{v} \cdot \bar{\lambda} \quad (5-27)$$

上式说明，分子运动的平均速率  $\bar{v}$  愈大，则密度不同区域中的分子交换愈快；平均自由程  $\bar{\lambda}$  愈大，则这些分子在每次自由飞行中愈能深入到密度差别较大的区域。升高温度可以增大分子运动的平均速率，加快扩散过程。

理论还可证明，分子在液体中的扩散系数与液体的温度  $T$ 、分子半径  $r$ ，以及液体的粘性系数  $\eta$  有关

$$D = \frac{kT}{6\pi r\eta} \quad (5-28)$$

上式称为爱因斯坦-斯托克斯关系式。由式可知，温度越高、分子半径越小、液体的粘性系数越小，扩散就进行得越快。

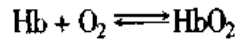
## 三、透膜运输

扩散是分子在无限介质中由于密度不均匀而引起的运输过程。在生物体中，分子的运输过程更多的是通过生物膜进行的。生物膜，例如细胞膜或毛细血管壁，一般具有能让某些物质分子通过而不让另外一些分子通过的特性，具有这种特性的膜称为半透膜。分子和离子透过生物膜的运输是最基本的生理过程。例如胃粘膜细胞分泌盐酸

透过细胞膜进入胃腔消化食物；营养物质或药物透过肠粘膜而被吸收，再由血液转运并透过毛细血管进入组织；肺泡中的空气透过肺泡膜和毛细血管壁与血液交换氧气和二氧化碳；二氧化碳和废料则透过细胞膜排出体外等。这些分泌、吸收、排泄过程都是物质透过生物膜的输运过程。

肺中氧和二氧化碳的输运和交换，是气体通过生物膜扩散的一个很好的例子。在肺中两种气体的交换都是在肺泡和毛细血管中进行的。在肺泡周围有许多毛细血管，肺泡膜和毛细血管壁的厚度不到  $1\mu\text{m}$ ，且能让脂溶性的氧、二氧化碳和氮气等气体分子自由通过，故肺泡与血液间的气体交换是由扩散过程来完成的。

通过呼吸运动，肺泡中氧气的浓度高于毛细血管中氧气的浓度，因此，氧气从肺泡经过肺泡膜和毛细血管壁进入血液中，然后与血红蛋白(Hb)结合形成氧合血红蛋白( $\text{HbO}_2$ )存在于红细胞内。氧气和血红蛋白的结合和解离是可逆的，可以用下式表示



当红细胞流经氧分压较高的肺部时，血红蛋白就迅速与从肺泡扩散到血液中的氧气结合形成氧合血红蛋白，而在氧分压较低的组织中，血液中的氧合血红蛋白又迅速解离释放出氧气，扩散到组织中，以供各组织的氧气需求。组织吸收氧气进行氧化后所产生的二氧化碳，又扩散到血液中，一部分以  $\text{KHCO}_3$  的形式存在于红细胞中，另一部分则以  $\text{NaHCO}_3$  的形式存在于血浆中，经血液循环后输运到肺部。由于肺泡中二氧化碳的分压低于静脉血中二氧化碳的分压，故血液中的  $\text{KHCO}_3$  和  $\text{NaHCO}_3$  迅速解离释放出二氧化碳，再扩散到肺泡中，经呼吸排出体外。

带电粒子(如溶液中的各种离子)的扩散与中性粒子的扩散规律基本上是相同的，差别在于带电粒子扩散的结果将在不同浓度区域累积电荷，产生电场，带电粒子在这个电场中所受到的电力是使它有一个与扩散方向相反的漂移运动，最后达到平衡状态，即通过任何一个截面，每秒正向扩散的某种带电粒子数与每秒反向漂移的该种带电粒子数相等，浓度差不再改变。溶液中通常有多种离子，每种离子都应当达到平衡态，但是反抗扩散的是一个公共电场，因此，在平衡时各种离子浓度的比例是受到严格限制的。

人体细胞内  $\text{K}^+$  浓度比细胞外高，而  $\text{Na}^+$  浓度则比细胞外低。由于  $\text{K}^+$  扩散的结果，细胞膜的内侧带负电荷，外侧带正电荷。这个电势差基本上可以阻止  $\text{K}^+$  的继续扩散，维持细胞内外一定的浓度差，但却使  $\text{Na}^+$  从细胞外向细胞内漂移，与  $\text{Na}^+$  的扩散方向相同，使细胞内的  $\text{Na}^+$  愈来愈多，不能维持细胞内外  $\text{Na}^+$  一定的浓度差。因此，机体必须有一种途径把  $\text{Na}^+$  从细胞内运送到细胞外去，正如水泵把水从低处逆着重力的方向运送到高处一样，我们把机体从细胞内运送  $\text{Na}^+$  到细胞外的机制称为钠泵，其具体过程将在生理学中学习。

机体中很多过程，包括输运过程，都可以逆着无机界物理、化学过程的方向进行，这种过程称为主动过程。主动过程并不违反自然规律，但它必须消耗能量才能完成。

## 第五节 液体的表面现象

从气体到液体，一个很大的变化是分子间的距离缩短，分子力的作用显著增加，表现出气体所没有的分子间的内聚力和自由表面。液体内部由于分子的紊乱运动，各个方向的物理性质是完全相同的，即各向同性。但是在液体的表面，无论是液体与空气之间的自由表面，或是两种不能混合的液体之间的界面，或是液体与固体之间的界面，各个方向的性质就不很相同。例如沿着界面各个方向的性质与沿着界面法线方向的性质就不相同。这一节主要讨论与生命过程密切相关的表面层的张力及其影响。

### 一、表面张力和表面能

液体的表面如紧张的薄膜，有收缩成表面积最小的趋势。例如荷叶上的小水滴和玻璃板上的水银小滴都收缩成球形，说明液体表面存在着张力，这种张力称为表面张力。表面张力产生的原因是由于分子力的作用。

已知分子间的平衡距离  $r_0$  的数量级约为  $10^{-10}$  m，当两分子间的距离大于  $r_0$  而在  $10^{-10} \sim 10^{-9}$  m 时，分子间的作用力表现为引力，而当分子间的距离大于  $10^{-9}$  m 时，引力很快趋于零。可以认为，以  $10^{-9}$  m 为半径作一球面，则只有在这个球面内的分子才对位于球心的分子有作用力。因此，分子引力作用的范围是半径为  $10^{-9}$  m 的球形，称为分子作用球，球的半径称为分子作用半径。

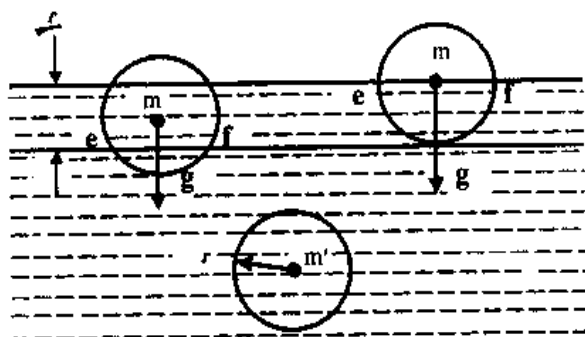


图 5-5 液体表面层分子所受的力

在图 5-5 中的液体表面取厚度等于分子作用半径的一层，称为液体的表面层。在表面层内的分子  $m$  与液体内部的分子  $m'$  受力的情况不一样。以分子  $m$  和  $m'$  为球心作分子作用球，可以看出，液体内部的分子  $m'$  所受周围分子的引力在各个方向大小相同，合力为零。而在表面层的分子  $m$ ，下部分子对它的引力大于上部分子对它的引力，其合力等于图中  $efg$  部分分子

对  $m$  引力的矢量和，合力垂直于表面层指向液体内部，而且分子  $m$  愈接近液面合力愈大。由此可见，处于液体表面层的分子都受到一个指向液体内部的力的作用。在这些力的作用下，液体表面就处于一种特殊的紧张状态，在宏观上表现为一个被拉紧的弹性薄膜而具有表面张力。

表面张力的大小可以用表面张力系数  $\alpha$  来描述。设想在液面上作一长为  $L$  的线段，则张力的作用表现在线段两边液面以一定的拉力  $F$  相互作用，而力的方向恒与线段垂直，大小与线段的长度  $L$  成正比，即

$$F = \alpha L \quad (5-29)$$

比例系数  $\alpha$  就是液体的表面张力系数。

应该指出，液面的张力与弹性膜的张力在本质上是不同的。弹性膜的张力随面积的增加而增加，而液面的张力却不受面积变化的影响。这是因为弹性膜分子间的距离随膜的面积的增加而变大，而对液膜来说，尽管它的面积增大，液面分子间的距离却由于液内分子的补充而维持不变。

由上述可知，所有位于表面层的液体分子，都要受到垂直液面并指向液体内部的分子引力的作用，这些引力分别被一些十分靠近的分子的斥力所平衡，使其能够停留在液体的表面层。如果要把液体内部的分子移到表面层，就必须反抗表面层下面的分子对它的引力做功，从而增加了这一分子的势能。可见表面层内的分子比液体内部的分子具有更多的势能。由于系统的势能有减到最小的趋势，因此，只要可能，表面层的分子就要往液体内部迁移，使表面积缩到最小。反之如果要增加液体的表面积，就得做功把更多的液体分子提到液面上来，从而增加液体表面的势能。液体的表面能又称为表面自由能，是在等温条件下能转变为机械能的表面内能部分。

下面从外力做功的角度考察表面张力系数与液体表面能的关系。图 5-6 为 U 形金属框 ABCD，上面有一层液体薄膜，金属框的一边 BC 长为  $L$ ，可以自由滑动。由于表面张力的作用，薄膜要收缩。要加大液体表面，就得做功。如果图 5-6 中的金属丝 BC 在力  $F$  的作用下向右移动一段距离  $\Delta x$ ，达到图中 B'C' 的位置，由于液膜有上下两个表面，则增加的液膜表面积  $\Delta S = 2L \cdot \Delta x$ ，外力  $F = 2\alpha L$ ，这时外力所作的功为  $A = F \cdot \Delta x$ ，增加液体单位面积所作的功为

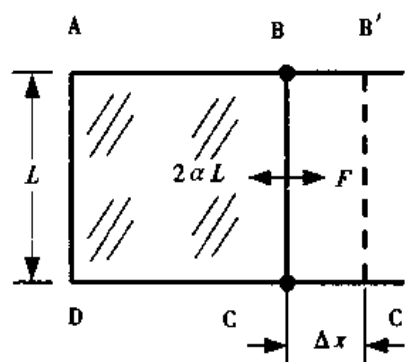


图 5-6 表面张力系数与表面能

$$\frac{A}{\Delta S} = \frac{F \cdot \Delta x}{2L \cdot \Delta x} = \frac{2\alpha L}{2L} = \alpha (\text{J} \cdot \text{m}^{-2}) \quad (5-30)$$

这也就是增加单位液面积所增加的势能。由式(5-30)可知，表面张力系数在数值上等于增加单位液面积时外力所作的功，从能量的角度看，其大小等于增加单位液面积时所增加的表面自由能。

不同的液体  $\alpha$  值不同，密度小的、容易蒸发的液体的表面张力系数较小，同一种液体的  $\alpha$  值随温度的升高而减小。表 5-3 给出了一些液体的  $\alpha$  值。

表 5-3 不同液体与空气接触时的表面张力系数  $\alpha$

| 液 体 | 温 度(°C) | $\alpha(\text{J} \cdot \text{m}^{-2} \text{或} \text{N} \cdot \text{m}^{-1})$ |
|-----|---------|--|
| 丙酮  | 20      | 0.0237   |
| 甲醇  | 20      | 0.0226   |
| 苯   | 20      | 0.0228   |
| 氯仿  | 20      | 0.0271   |
| 甘油  | 20      | 0.0634   |
| 水银  | 15      | 0.487  |

续表

| 液 体 | 温 度(°C) | $\alpha$ (J·m <sup>-2</sup> 或 N·m <sup>-1</sup> ) |
|-----|---------|---|
| 肥皂液 | 20      | 0.025   |
| 溴化钠 | 熔点      | 0.103   |
| 水   | 0       | 0.0756  |
| 水   | 20      | 0.0278  |
| 水   | 30      | 0.0712  |
| 水   | 100     | 0.0589  |

## 二、曲面下的附加压强

液体表面层相当于一个拉紧的膜，如果液面是水平的，则表面张力也是水平的。若液体表面是曲面，则表面张力有拉平液面的趋势，致使液面内和液面外有一压强差，此即为附加压强。

我们来研究球形液面下的附加压强。如图 5-7 (a) 所示，在液面处隔离出一个球帽状的小液块，分析它的受力情况。

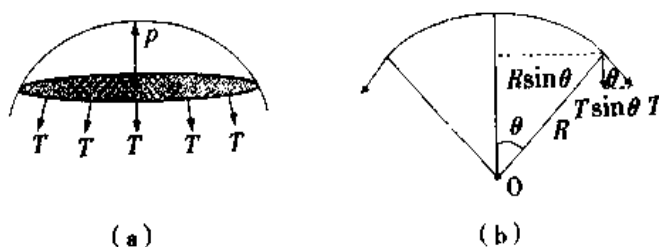


图 5-7 球形液面的张力和压强

可以看出，小液块受到三部分力的作用：一部分是通过小液块的边线，作用在液块上的大致向下的表面张力；第二部分是由附加压强引起的，通过底面(见图中阴影部分)作用于液块的向上的压力，其中外部媒质(如大气)通过球形液面对液块的压力已包括在附加压强的作用中了；第三部分就是小液块的重力，它比起前两部分力来，要小得多，可以忽略不计。设球形液面半径为  $R$ ，单位长度液体表面的张力为  $T$  (大小即为液体的表面张力系数  $\alpha$ )，液体内外的压强差为  $p$ ，即附加压强，各量关系见图 5-7 (b)。则小液块边线所具有的总张力的向下分量为

$$2\pi R \sin\theta \times T \sin\theta = \alpha \times 2\pi R \sin^2\theta$$

这部分小液块所受的压力的向上的分量为：

$$P \times \pi R^2 \sin^2\theta$$

这两部分力方向相反，在平衡时它们的大小应该相等。所以

$$\alpha \times 2\pi R \sin^2\theta = P \times \pi R^2 \sin^2\theta$$

$$P = \frac{2\alpha}{R} \quad (5-31)$$

上式称为球形液面的拉普拉斯公式。公式对于凸、凹的球形液面都是适用的，如果液

面是凸的， $P$  取正值，液面内的压强比液面外的压强大；如果液面是凹的， $P$  取负值，说明液面内的压强小于液面外的压强。

图 5-8 是一个球形液膜(如肥皂泡)。液膜具有内外两个表面层，图中 B 点的压强  $P_B$  比 C 点的压强  $P_C$  低  $2\alpha/R_1$ ，而比 A 点的压强  $P_A$  高  $2\alpha/R_2$ ， $R_1$  和  $R_2$  分别是液膜内、外表面的半径。因为液膜很薄，可以认为  $R_1 \approx R_2 = R$ ，所以液膜内外的压强差为  $P_C - P_A = 4\alpha/R$ ，这就是球膜的附加压强。

图 5-9 是在一个管子的两端吹两个大小不等的肥皂泡。打开中间活塞，使两泡相通。我们会看到小泡不断变小，而大泡却不断变大。这是因为小泡中的空气压强比大泡中的空气压强大的缘故。球面附加压强对了解肺泡的物理性质和呼吸是很重要的。

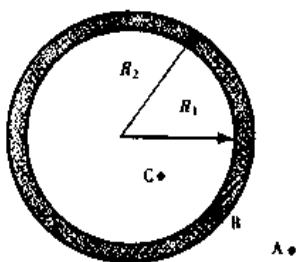


图 5-8 球形液膜的附加压强

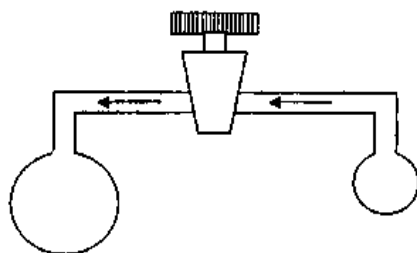


图 5-9 球形液膜附加压强实验

### 三、毛细现象和气体栓塞

**1. 毛细现象** 在玻璃板上放一小滴水银，它总是近似球形而不附着在玻璃板上，这时我们说水银不润湿玻璃。在无油脂的玻璃板上放一滴水，水会沿着玻璃面向外扩展，附着在玻璃上，这时我们说水润湿玻璃。液体和固体接触时，有时液体能润湿固体，有时则不能。这种差别是由液体分子之间的吸引力(称为内聚力)小于或大于液体分子与固体分子之间的吸引力(称为附着力)所决定的。如果内聚力小于附着力，则液体与固体的界面有尽量扩大的趋势，固体上的液滴将展开成薄膜，固体被润湿；如果内聚力大于附着力，则液体与固体的界面有尽量缩小的趋势，固体上的液滴不会展开，不发生润湿现象。当平衡时，在固体和液体的界面处，液体表面切面经液面内部与固体表面间的夹角  $\theta$  称为接触角，其值介于  $0^\circ \sim 180^\circ$  之间，具体由附着力和内聚力的大小而定。附着力越大， $\theta$  越小，液体越能润湿固体。 $\theta = 0^\circ$  时，液体完全润湿固体。图 5-10 (a) 表示附着力大于内聚力、固体被润湿， $\theta$  小于  $90^\circ$ ；图 5-10 (b) 表示内聚力大于附着力，固体不被润湿， $\theta$  大于  $90^\circ$ ， $\theta = 180^\circ$  时为完全不润湿。

内径很小的管子称为毛细管。将毛细管的一端插入液体中，液体润湿管壁时，管内液面上升，不润湿时则下降，这种现象称为毛细现象。

下面分析液面上升的情况。因毛细管内径很小。将其插入液体时，管内的液面可看成是球面的一部分，如图 5-11 所示。由于液面是凹面，因此液面下的压强低于液面外的大气压强。设接触角为  $\theta$ ，毛细管的内半径为  $r$ ，液面的曲率半径为  $R$ 。由图可见， $r = R \cos \theta$ 。根据式(5-31)液面内外的压强差为：

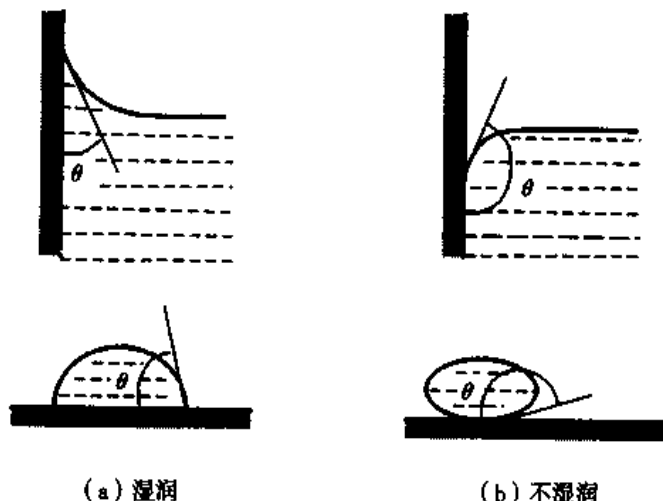


图 5-10 接触角

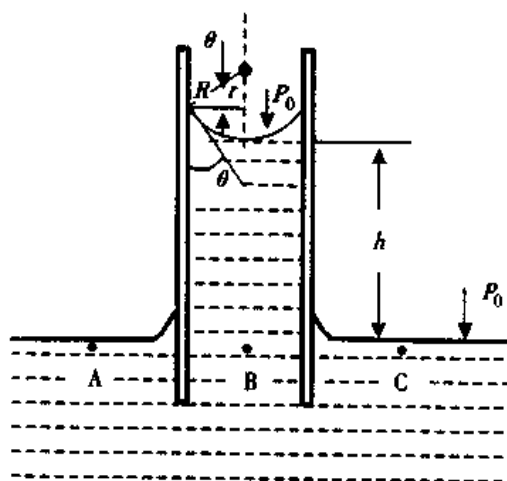


图 5-11 毛细现象

$$P = \frac{2\alpha}{R} = \frac{2\alpha \cos\theta}{r}$$

此压强差使管内液面上升。根据液体静力学，达到平衡时，管内液面下的 B 点应该和同水平面的 C 点压强相同，即

$$P_0 - \frac{2\alpha \cos\theta}{r} + \rho gh = P_0$$

式中  $P_0$  为大气压强， $h$  为平衡时管内外液面的高度差， $\rho$  是液体的密度。由上式得

$$h = \frac{2\alpha}{r\rho g} \cos\theta \quad (5-32)$$

上式说明，毛细管中液面上升的高度与表面张力系数成正比，而与毛细管的内径成

反比，管径越细液面上升越高。

对于不润湿管壁的液体，在毛细管内的液面是凸的，液面内的压强高于液面外的压强，管内的液面将下降至管外液面之下，其高度差也可用式(5-32)计算，此时接触角  $\theta > \pi/2$ ，故所得的  $h$  为负，表示管中液面下降。

毛细现象在日常生活中经常遇到。对于植物的吸收和水分的输运，动物血液在毛细血管中的流通和气体栓塞现象，毛细现象都起着重要的作用。

**2. 气体栓塞** 液体在细管中流动时，如果管中有气泡，液体的流动将受到阻碍，气泡多时可发生阻塞，这种现象称为气体栓塞。图 5-12 (a) 表示均匀毛细管中的一段润湿性液柱，中间有一个气泡，在左右两端的压强相等时，气泡两端的液面形成同样的凹弯月面，且其曲率半径相等，因表面张力而出现的附加压强大小相等方向相反，所以液柱不流动。如果在毛细管左端增加压强  $\Delta P$ ，这时气泡左边的曲率半径变大，右边的曲率半径变小，因而使左端弯曲液面所产生的附加压强  $P_{左}$  比右端弯曲液面所

产生的附加压强  $P_{右}$  小。如果它们的差值正好等于  $\Delta P$ ，即  $\Delta P = P_{右} - P_{左}$ ，则系统仍处于平衡状态，液柱不会向右移动，如图 5-12 (b) 所示。只有当两端的压强差  $\Delta P$  超过某一临界值  $\delta$  时，气泡才能移动。这个临界值  $\delta$  与液体和管壁的性质以及管的半径有关。当管中有  $n$  个泡时，则只有当  $\Delta P \geq n\delta$  时液体才能带着气泡移动，如图 5-12 (c)。

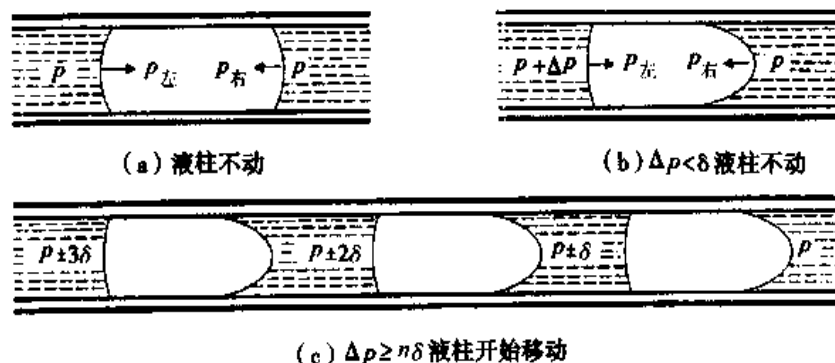


图 5-12 气体栓塞

给病人输液时，要经常注意防止输液管中出现气体栓塞现象。作静脉注射时，应特别注意不能在注射器中留有气泡，以免在微血管中发生栓塞。此外潜水员从深水中上来，或病人和工作人员从高压氧仓中出来，都应有适当的缓冲时间，否则在高压时溶于血液中的过量气体，在正常压强下会迅速释放出来形成气泡，容易形成气体栓塞。

#### 四、表面活性物质与表面吸附

溶液的表面张力系数通常都与溶剂的表面张力系数有所不同，有的溶质使溶液的表面张力系数减小，有的溶质则使其增大，前者称为该溶剂的表面活性物质，后者称为表面非活性物质。水的表面活性物质常见的有胆盐以及有机酸、酚醛、肥皂等。水的表面非活性物质有食盐、糖类、淀粉等。

表面活性物质溶入溶剂后，由于溶剂分子之间的吸引力大于溶剂分子与溶质分子之间的吸引力，所以位于表面层中的溶剂分子受到使它趋向溶液内部的力大于表面层中溶质分子对它的吸引力，结果使溶剂分子尽可能地进入溶液的内部，表面层中溶质的浓度增大，只是由于扩散现象，浓度的增大才有一定的限度。这样就减少了溶液的表面能，增加了系统的稳定性。由于表面活性物质在溶液中聚集于表面层，所以少量的表面活性物质就可以在很大程度上影响液体的表面性质，显著降低表面张力。在某些情况下，表面层可以完全由溶质组成，我们把表面活性物质在溶液的表面层聚集并伸展成薄膜的现象称为表面吸附。水面上的油膜就是常见的表面吸附现象。

如果溶剂中加入表面非活性物质，为了减少表面能，表面非活性物质将尽可能离开表面层进入液体内部，结果就使表面非活性物质在液体内部的浓度大于表面层。

表面活性物质在呼吸过程中起着重要的作用。肺位于胸腔内，支气管在肺内分成很多小支气管，小支气管越分越细，末端膨胀成囊状气室，每室又分成许多小气囊，称为肺泡。人的肺泡总数约为 3 亿个，各个肺泡的大小不一，而且有些肺泡是相连



的。在充满空气的肺中，既有肺组织的弹性力，又有衬在肺泡表面液层组成的气-液界面上的表面张力，而对于肺充气来说，大部分压力是用来克服表面张力的。若各肺泡的表面张力系数相同，小肺泡内的压强将大于大肺泡内的压强，小肺泡内的气体将流向大肺泡，使小肺泡趋于萎缩而大肺泡膨胀，但是这种情况在肺内并没有出现，原因就是表面活性物质的作用。肺泡的表面液层中分布有一定量的、由饱和卵磷脂和脂蛋白组成的表面活性物质，起降低表面张力系数的作用。吸气时，肺泡体积增大，而表面活性物质的量不变，故单位面积上的表面活性物质的量随体积增大而减小，结果增大了表面张力系数，增大了表面张力，从而限制了肺泡的继续膨胀；呼气时，肺泡体积减小，单位面积上的表面活性物质的量增多，减小了表面张力系数，减小了表面张力，从而防止了肺泡的萎缩。肺泡上表面活性物质对表面张力系数的调控作用，保证了呼吸过程的正常进行。实验表明，正常呼气后，肺泡通常稳定在它最大尺寸的1/4，即肺内还有余气，这使接下来的吸气变得容易一些。而对于刚刚分娩的新生儿，附加压强使肺泡完全闭合，虽然临产前肺泡壁分泌表面活性物质以降低粘液的表面张力系数，但新生儿仍须以大声啼哭的强烈动作进行第一次呼吸以克服肺泡的表面张力而获得生存。

### 思考题与习题五

5-1 对一定质量的气体来说，当温度不变时，气体的压强随体积减小而增大；当体积不变时，压强随温度升高而增大。从宏观来看，这两种变化同样使压强增大，从微观看，它们是否有区别？

5-2 两种不同种类的气体的平均平动动能相同，但气体的密度不同，问它们的温度是否相同？压强是否相同？

5-3 容器内有一定量的气体，若保持容积不变而使温度升高，则分子的平均碰撞频率和平均自由程将如何变化？

5-4 一个分子的平均平动动能为  $3kT/2$ ，应如何理解？对于某一个分子能否根据此式计算它的动能？

5-5 湖面下 50 m 深处，温度为  $4^{\circ}\text{C}$ ，有一体积为  $10\text{ cm}^3$  的气泡，若湖面的温度为  $17^{\circ}\text{C}$ ，求此气泡升到湖面时的体积。  
( $61.6\text{ cm}^3$ )

5-6 一容器内贮有气体，压强为  $1.33\text{ Pa}$ ，温度为  $300\text{ K}$ ，问在单位容积内有多少分子？这些分子的总平动动能是多少？  
( $3.21 \times 10^{20}\text{ m}^{-3}$ ;  $2.0\text{ J}\cdot\text{m}^{-3}$ )

5-7  $2\text{ g}$  氢气装在  $20\text{ L}$  的容器内，当容器的压强为  $4.0 \times 10^4\text{ Pa}$  时，氢气分子的平均平动动能是多少？  
( $1.99 \times 10^{21}\text{ J}$ )

5-8 吹一个直径为  $10\text{ cm}$  的肥皂泡，设肥皂液的表面张力系数  $\alpha = 40 \times 10^{-3}\text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ ，试求吹此肥皂泡所作的功，以及泡内外的压强差。  
( $8\pi \times 10^{-4}\text{ J}$ ;  $3.2\text{ N}\cdot\text{m}^{-2}$ )

## 第六章 热力学基础

---

学习本章后，你应：

---

1. 掌握热力学第一定律，并熟练应用于理想气体各等值过程及循环过程。
  2. 掌握热力学第二定律，理解宏观过程的不可逆性和热力学概率之间的关系。
  3. 了解熵的概念、熵增加原理与能量退降，理解生命过程中的自组织现象。
- 

热力学是从能量的观点研究与热运动有关的各种自然现象的宏观规律的理论。热力学第一定律是包括热现象在内的能量转换和守恒定律，第二定律则指明了热力学过程进行的方向和条件，它们都来源于对大量实验事实的总结。热力学的研究方法是宏观的方法，不涉及物质的微观结构和过程，仅从少数宏观参量的变化来推断和解释实验结果，因此它对复杂系统(如生命系统)的分析特别适用。

### 第一节 热力学的一些基本概念

#### 一、热力学系统

在热力学中，把要研究的对象称为热力学系统，简称系统。系统以外能够影响系统的所有物体称为系统的外界或环境。与环境之间既没有能量交换又没有物质交换的系统称为孤立系统，严格说来，自然界中并不存在这样的系统，因为任何一个系统都会或多或少地受到外界的影响，所以孤立系统是一个理想的系统；与外界有能量交换但没有物质交换的系统称为封闭系统；与外界既有能量交换又有物质交换的系统称为开放系统。生物体即属于开放系统，它不断地和环境交换着物质和能量。

#### 二、准静态过程

对于一个确定的热力学系统，当其处于平衡态时，可以用一组态参量来表示。任何由态参量所完全确定的函数称为系统的态函数。理想气体的态参量  $P$ 、 $V$ 、 $T$  之间服从方程  $PV = \frac{M}{\mu}RT$ ，它就是一个态函数。态函数的一个重要性质是当系统从一个态转变到另一个态时，其值的变化只决定于这一转变的始态和终态，而与所经历的路径无关。对于一定量的处于平衡态的理想气体来说，态参量  $P$ 、 $V$ 、 $T$  中只有两个是独立的，给定其中的任意两个参量，第三个参量也就确定了，所以，给定任意两个参量

的数值，就对应一个平衡态。如果以  $P$  为纵坐标， $V$  为横坐标，如图 6-1，则在  $P-V$  图上任何一点  $A(P_1, V_1)$  就对应一个平衡态。非平衡态因其无均匀确定的参量，所以不能用图形表示。一个孤立系统，不论其初态如何，经过一定的时间以后，必将达到热力学平衡态，即系统的温度、压强等都达到均匀一致。

系统在某一时刻的态决定于初始条件和系统所处的环境条件。当系统和外界发生相互作用时，系统的状态就会发生变化。热力学系统的态随时间的变化称为热力学过程，简称过程。如果过程所经历的所有中间状态，都无限接近于平衡态，这个过程就称为准静态过程。图 6-1 中的曲线就代表一准静态过程。准静态过程是一种理想过程，实际上是不可能作到的。但如果使过程进行得非常缓慢，进行的速率趋近于零时，这个过程就趋于准静态过程。所以理想的准静态过程可以认为是实际过程的近似代表。本章讨论的过程，除非特别注明，一般都是指准静态过程。

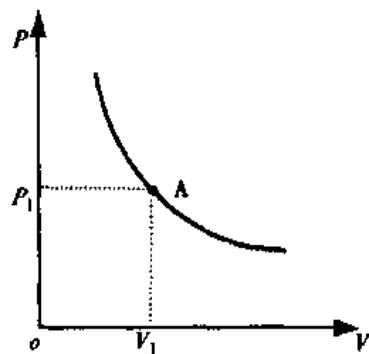


图 6-1 理想气体的  $P-V$  曲线

## 第二节 热力学第一定律

### 一、功、热量、内能

做功和传热都可以使热力学系统的状态发生变化。例如，一杯水，可以通过加热的方法，使其从某一温度升高到另一温度；也可以用搅拌做功的方法，使这杯水升高到同一温度。前者，是通过传热来完成的，后者是通过外界做功来完成的。两者方式虽然不同，但是导致相同的状态变化，这说明机械运动和热运动之间可以互相转化。传热过程中所传递的能量的多少叫热量。和功一样，热量也是能量转化的一种形式，一定量的功相当于一定量的热量。

无数事实证明，对于热力学系统，不论所经历的热力学过程有何不同，只要系统的初、终状态确定不变，则外界对系统所作的功和向系统所传递的热量的总和是恒定不变的。在力学中，重力做功与路径无关，由此我们引进了重力势能的概念。与此类似，对于热力学系统也存在着一个仅由状态决定的态函数，称为系统的内能。从分子运动论的观点来说，系统的内能就是系统中所有的分子热运动的能量和分子与分子间相互作用的势能的总和，它包括：分子无规则热运动动能、分子间的相互作用能，分子、原子内的能量，原子核内的能量等等。当然在系统所经历的热力学过程中，并非所有这些能量都变化，比如原子核内的能量在一些过程中并不改变。

“做功”和“传热”虽有其等效的一面，但在本质上是不相同的。“做功”（指机械功）是通过物体作宏观位移来完成的，它的作用之一是将物体的有规则运动转化为系统内部的无规则运动，即机械能转化为内能。“传热”是通过分子之间的相互作用

来完成的，它的作用是系统外物体的分子无规则运动与系统内分子无规则运动之间的转换，从而改变系统的内能。功、热量和内能是三个不同的物理量，它们之间有严格的区分，但又有着密切的联系。

## 二、热力学第一定律

一般情况下，系统状态变化时，做功和传热同时存在。假设一个系统由于与外界交换能量，使它由状态 I (初态) 变为状态 II (终态)，内能由  $U_1$  变为  $U_2$ ，在这个过程中系统吸收热量  $Q$ ，同时对外做功  $A$ ，那么根据能量转化和守恒定律，功、热量和内能之间应满足

$$Q = U_2 - U_1 + A \quad (6-1)$$

上式就是热力学第一定律的数学表示(式中各量的单位都用焦耳)。它说明：在任何过程中，系统从外界吸收的热量( $Q$ )，一部分用于使系统的内能增加( $\Delta U = U_2 - U_1$ )，一部分用于系统对外做功( $A$ )。为使式(6-1)适合于一切过程，式中各量符号规定为：系统的内能增加时  $\Delta U$  为正，反之为负；系统对外界做功时  $A$  为正，外界对系统做功时  $A$  为负；系统从外界吸取热量时  $Q$  为正，系统向外界放热时  $Q$  为负。热力学第一定律应用于孤立系统时，系统和环境既没有热量交换( $Q = 0$ )，又不对外做功( $A = 0$ )，由式(6-1)得  $\Delta U = 0$ 。这就是说，孤立系统内部各物体的能量可以互相传递，各种形式的能量也可以互相转化，但它们的总和不变。

对于状态的微小变化过程，即初、终两态相差无限小，这时热力学第一定律可写作：

$$dQ = dU + dA \quad (6-2)$$

热力学第一定律是能量守恒与转化定律在热现象领域内所具有的特殊形式，19世纪中叶，在长期生产实践和大量科学实验的基础上，它才以科学定律的形式被确立起来。如果将系统的内能扩展为一切能量，则热力学第一定律就是能量守恒和转化定律。能量守恒定律是一切自然现象所必须遵从的基本定律。历史上，曾经有人幻想制造一种不需要任何动力或燃料而可以不断地对外做功的机器，这种机器称为第一类永动机。热力学第一定律指出，做功必须由能量转化而来，不能无中生有地创造能量，第一类永动机违背热力学第一定律，是不可能制成的。因此，热力学第一定律也可叙述为：第一类永动机是不可能造成的。

下面我们讨论热力学过程中功的表示。设图 6-2 的圆柱形筒内盛有气体，筒内活塞的面积为  $S$ ，且可以无摩擦地左右移动。若筒内气体的压强为  $P$ ，它作用在活塞上的力  $F = P \cdot S$ 。当活塞移动一微小距离  $dl$  时，则气体膨胀推动活塞所作的功  $dA$  为

$$dA = F \cdot dl = P \cdot S \cdot dl$$

由于气体的体积增加了  $S \cdot dl$ ，即  $dV = S \cdot dl$ ，所以上式可写为

$$dA = P \cdot dV \quad (6-3)$$

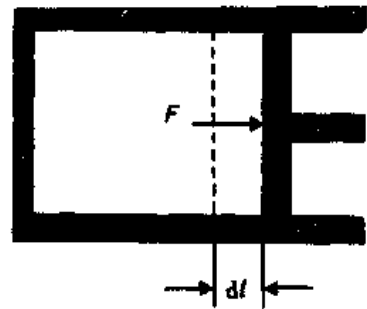


图 6-2 气体推动活塞做功

式(6-3)表示系统在无限小的准静态过程中所作的功。在气体膨胀时,  $dV > 0$ ,  $dA > 0$ , 表示系统对外做功; 气体被压缩时,  $dV < 0$ ,  $dA < 0$ , 表示外界对系统做功。

在一个有限的准静态过程中, 系统的体积由  $V_1$  变到  $V_2$  时, 系统对外所作的总功为

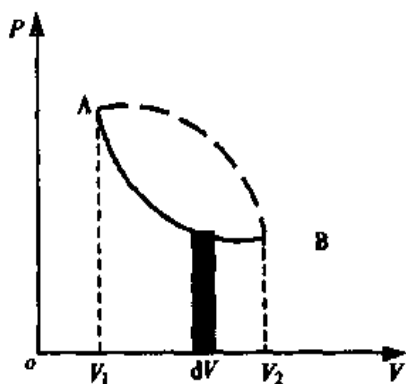


图 6-3 准静态过程的功

$$A = \int dA = \int_{V_1}^{V_2} P dv \quad (6-4)$$

图 6-3 曲线下阴影部分的面积就是  $PdV = dA$ 。必须指出, 只给定初态和终态, 并不能确定功的数值。由图可知, 如果系统沿着图中虚线所示的过程进行, 那么气体所作的功就等于虚线下面的面积, 它比实线下面的面积大些, 这表明做功不仅决定于系统的初、终态, 而且与系统所经历的过程有关, 所以功不是态函数。由式(6-1)可以得出热量也不是态函数。

### 第三节 热力学第一定律的应用

#### 一、定容过程

系统的体积始终保持不变的过程称为定容过程。例如对一气缸的气体加热, 活塞固定不动, 使气体温度升高, 压强增大, 这就是一个定容过程。在这过程中, 由于体积不变  $dV = 0$ , 气体对外所作的功为零, 即  $A = 0$ , 因此, 热力学第一定律可写成

$$\Delta U = Q \quad (6-5)$$

即系统从外界吸收的热量全部用来增加系统的内能。如果系统在定容过程中放热, 则放出的热量等于系统内能的减少。

一定量的气体在定容过程中温度升高 1 K 时所吸收的热量, 称为质量定容热容。1 mol 气体的质量定容热容称为质量定容摩尔热容, 记作  $C_V$ 。设容器中气体的质量为  $M$ , 摩尔质量为  $\mu$ , 摩尔数  $n = \frac{M}{\mu}$ , 在定容过程中, 温度升高  $dT$ , 则气体吸收的热量为

$$dQ = dU = \frac{M}{\mu} C_V dT = n C_V dT \quad (6-6)$$

对于 1 mol 理想气体, 根据式(5-9)可得  $C_V = iR/2$ 。实际上,  $C_V$  在不同温度下有不同的量, 而是与温度有关的量, 式(6-6)只在一定的温度范围内成立。

#### 二、定压过程

系统的压强始终保持不变的过程, 称为定压过程。例如气缸的活塞可以移动, 活塞上施加一定的压力, 对气体缓慢加热, 气体受热后压强增加, 推动活塞向外移动, 由于体积膨胀, 压强降低就可以使气体的压强基本上与外界所加的压强平衡, 而且保持不变。

这样在压强不变的条件下,气体吸热膨胀或压缩放热的过程,就是定压过程。

在定压过程中,系统对外所作的功为

$$\int_{V_1}^{V_2} P dV = P (V_2 - V_1)$$

因为  $p$  是常量,  $dp = 0$ , 热力学第一定律可写成

$$\begin{aligned} Q &= \Delta U + P (V_2 - V_1) = U_2 - U_1 + PV_2 - PV_1 \\ &= (U_2 + PV_2) - (U_1 + PV_1) \end{aligned} \quad (6-7)$$

或 
$$Q = H_2 - H_1 = \Delta H \quad (6-8)$$

式中  $H = U + PV$  是一个态函数,称为焓。

式(6-7)和式(6-8)表明,在定压过程中,系统吸收的热量一部分用于增加内能,另一部分用来对外做功;或者说,系统吸收的热量全部用来增加气体的焓。由此可知,气体的焓总是大于它的内能。

一定量的气体在定压过程中温度升高 1K 时所吸收的热量称为质量定压热容, 1mol 气体的质量定压热容称为质量定压摩尔热容,记作  $C_p$ 。设容器中气体的质量为  $M$ , 摩尔质量为  $\mu$ , 在定压过程中温度升高  $dT$ , 则气体吸收的热量为

$$dQ = \frac{M}{\mu} C_p dT = n C_p dT \quad (6-9)$$

由式(6-8)可得

$$dQ = dH = n C_p dT \quad (6-10)$$

对于理想气体,由于  $PV = nRT$ , 则

$$H = U + PV = n C_V T + nRT = n (C_V + R) T \quad (6-11)$$

$$\Delta H = n (C_V + R) \Delta T$$

由式(6-10)得

$$\Delta H = n C_p \Delta T$$

故 
$$C_p = C_V + R \quad (6-12)$$

上式称为迈耶公式,它表明,理想气体的质量定压摩尔热容等于质量定容摩尔热容与普适气体常量  $R$  之和。这是由于在定压条件下,当温度升高 1K 时, 1 mol 的气体除增加内能外,还将多消耗约 8.31 J 的热量转变为因膨胀而对外所作的功。

气体的质量定容摩尔热容  $C_V$ 、质量定压摩尔热容  $C_p$  与气体分子的自由度  $i$  有关。令  $C_p$  与  $C_V$  的比值为  $\gamma$ , 它是热力学中常用到的一个量。表 6-1 是几种气体的热容及  $\gamma$  值。

表 6-1 几种气体的热容及  $\gamma$  值

| 气 体     | 自由度 | $C_V$ ( $J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$ ) | $C_p$ ( $J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$ ) | $\gamma = C_p / C_V$ |
|---------|-----|---|---|----------------------|
| 单原子分子   | 3   | $\frac{3}{2} R \approx 12.5$              | $\frac{5}{2} R \approx 20.8$              | $\frac{5}{3} = 1.67$ |
| 刚性双原子分子 | 5   | $\frac{5}{2} R \approx 20.8$              | $\frac{7}{2} R \approx 29.1$              | $\frac{7}{5} = 1.4$  |
| 刚性多原子分子 | 6   | $3R \approx 24.9$                         | $4R \approx 33.3$                         | $\frac{4}{3} = 1.33$ |

### 三、等温过程

系统的温度始终保持不变的过程，称为等温过程。将系统与恒温热源接触，或置于恒温装置中，使系统的温度始终与外界恒定的温度相同，这样条件下所进行的过程就是等温过程。理想气体的内能只由温度决定，所以它的内能在等温过程中不发生变化，即  $dU=0$ ，因此，热力学第一定律可写成

$$Q = A \quad (6-13)$$

这就是说，理想气体在等温膨胀时，从外界吸收的热量全部转化为对外所作的功；在等温压缩时，外界对系统所作的功，全部转化为向外传递的热量。

理想气体在等温过程中遵从关系式

$$PV = \frac{M}{\mu}RT = \text{常数}$$

设理想气体自态 I ( $P_1, V_1$ ) 变到态 II ( $P_2, V_2$ )，则系统对外所作的功为

$$A = \int_{V_1}^{V_2} P dV = \frac{M}{\mu}RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{M}{\mu}RT \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (6-14)$$

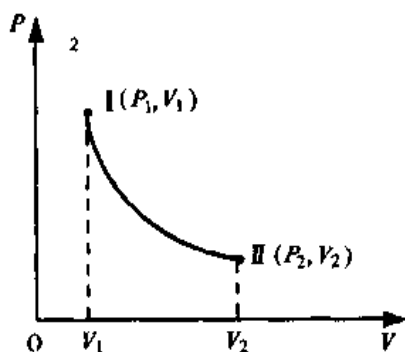


图 6-4 等温膨胀的功

式中  $T$  为等温过程中系统的温度。当  $V_2 > V_1$ ，即等温膨胀时， $A > 0$ ，系统对外作正功；反之，当  $V_2 < V_1$ ，即等温压缩时， $A < 0$ ，外界对系统作正功。功的数值就等于  $P$ - $V$  图中曲线下的面积(图 6-4)。

因为  $p_1 V_1 = p_2 V_2$ ，式 (6-14) 可以写为

$$A = \frac{M}{\mu}RT \ln \frac{P_1}{P_2} \quad (6-15)$$

### 四、绝热过程

系统始终不与外界交换热量的过程，称为绝热过程。系统与外界的绝热隔离很好，或者过程进行得很快，以致系统来不及与外界交换热量，这样的过程就是近似的绝热过程。在绝热过程中  $Q=0$ ，因此，热力学第一定律可以写为

$$\Delta U = -A \quad (6-16)$$

如果气体膨胀对外做功， $A > 0$ ，则  $\Delta U < 0$ ，气体内能减少，温度下降。所以在绝热过程中，气体对外做功是靠减少系统的内能来完成的。如果外界对系统作正功， $\Delta U > 0$ ，气体内能增加，温度上升。

由于气体内能的改变与过程无关，只与温度的改变有关，且

$$\Delta U = \frac{M}{\mu}C_v \Delta T = nC_v \Delta T$$

代入式(6-16)得

$$-A = nC_v \Delta T$$

或

$$-P dV = nC_v dT \quad (6-17)$$

设气体由态 I ( $P_1, V_1, T_1$ ) 绝热地变化到态 II ( $P_2, V_2, T_2$ ), 则由式(6-17)可得气体对外所作的功为

$$A = -nC_V(T_2 - T_1) = nC_V T_1 \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) \quad (6-18)$$

下面我们讨论在准静态绝热过程中态参量之间的关系。

对理想气体状态方程  $pV = nRT$  两边取微分得

$$PdV + VdP = nRdT \quad (6-19)$$

由式(6-17)和式(6-19)消去  $dT$  得:

$$(C_V + R)PdV = -C_V VdP$$

因  $C_V + R = C_p$ ,  $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$ , 上式可变为

$$\frac{dP}{P} = -\gamma \frac{dV}{V}$$

积分得

$$\ln P + \gamma \ln V = \text{常量}$$

或

$$PV^\gamma = \text{常量} \quad (6-20)$$

上式就是理想气体在绝热过程中压强和体积的变化关系, 称为泊松公式。利用式(6-20)和状态方程, 可得绝热过程中  $V$  与  $T$  以及  $p$  与  $T$  之间的关系

$$TV^{\gamma-1} = \text{常量} \quad (6-21)$$

$$P^{\gamma-1} T^{-\gamma} = \text{常量} \quad (6-22)$$

上面三个关系式都是绝热过程的方程式, 注意三式中的常量是各不相同的。

根据泊松公式可以给出绝热过程在  $P-V$  图上所对应的曲线, 称为绝热线, 如图 6-5 下面的一条曲线所示。图中上面的一条曲线是等温线。A 是两条曲线的交点。分别对等温线 ( $PV = \text{常量}$ ) 和绝热线 ( $PV^\gamma = \text{常量}$ ), 求在 A 点的斜率  $dP/dV$  得

$$\text{绝热线: } \frac{dP}{dV} = -\gamma \frac{P}{V}$$

$$\text{等温线: } \frac{dP}{dV} = -\frac{P}{V}$$

因为  $\gamma > 1$ , 所以在  $P-V$  图中的同一点, 绝热线比等温线要陡些。从图中可以看出, 在绝热膨胀时压强的降低要比等温膨胀时快些。这是由于等温膨胀时, 压强的降低只是由于体积的增加, 气体的内能不变; 而绝热膨胀时则靠消耗内能做功, 压强的降低不仅是由于体积的增加, 而且还由于内能减少以致温度下降造成的。

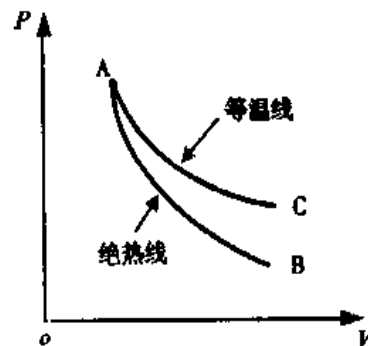


图 6-5 绝热线和等温线

## 五、人体的能量交换

人体是一个开放系统, 它与外界之间不仅有能量交换(散失热量、对外做功), 而



且还有物质交换(摄取食物和氧、排出废料)。为了保证各个器官的正常活动、维持恒定的体温以及对外作功,人体必须从食物中获得能量。人体的能量转换与守恒服从热力学第一定律。对于微小的变化过程,式(6-1)可以写为

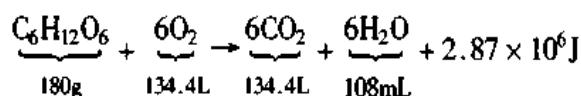
$$\Delta U = \Delta Q - \Delta A$$

式中  $\Delta U$  应包括摄入的食物和体内脂肪的能量变化,并假定在所考虑的时间内没有饮食和排泄。利用上式每个量的变化,我们能够描述整个人体的总能量平衡。一个人不管是休息或工作,总是不停地把食物中储藏的化学能转化为其他必需的能量形式,以维持身体的各器官、组织或细胞的功能。这个过程称为分解代谢过程。在这过程中,内能不断地减少,  $\Delta U$  为负。部分分解代谢活动用于身体对外作功,部分成为传导到体外的热量  $\Delta Q$ , 所以  $\Delta Q$  也是负的。

在动物力能学的定量描述中,常用到  $\Delta U$ 、 $\Delta Q$  和  $\Delta A$  随时间  $t$  的变化率,它们之间的关系是

$$\frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} - \frac{\Delta A}{\Delta t}$$

式中  $\frac{\Delta U}{\Delta t}$  称为分解代谢率,  $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$  为产热率,  $\frac{\Delta A}{\Delta t}$  为身体输出给外界的机械功率。输出功率  $\frac{\Delta A}{\Delta t}$  和散热的速率  $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$  原则上都可以直接测出。分解代谢率则只能通过氧的消耗率来间接测定,因为食物在分解代谢过程中需要氧,氧的消耗率决定于分解代谢率。以葡萄糖为例:



完全氧化 1mol (180g) 的葡萄糖需要 134.4L 的氧,产生  $2.87 \times 10^6\text{J}$  的热量,即每升氧产生的热量为  $2.14 \times 10^4\text{J}$ , 每克葡萄糖产生的热量为  $1.59 \times 10^4\text{J}$ 。表 6-2 是一些食物的典型能量数据。

根据热力学第一定律,代谢率  $\frac{\Delta U}{\Delta t}$  要受输出功率  $\frac{\Delta A}{\Delta t}$  的影响。人类从事不同的活动时的代谢率(耗氧率)见表 6-3。

由表 6-3 可见,人即使不作任何劳动,代谢率仍达到  $2.93 \times 10^5 \text{J} \cdot \text{h}^{-1}$ , 这个代谢率称为基础代谢率。

表 6-2 一些食物的能量值

| 食 物 | 平均能量(J/g)          | 每消耗 1L 氧释放的能量(J/L) |
|-----|--------------------|--------------------|
| 糖   | $1.72 \times 10^4$ | $2.11 \times 10^4$ |
| 蛋白质 | $1.72 \times 10^4$ | $1.87 \times 10^4$ |
| 乙醇  | $2.97 \times 10^4$ | $2.03 \times 10^4$ |
| 脂肪  | $3.89 \times 10^4$ | $1.98 \times 10^4$ |
| 平均  |                    | $2.00 \times 10^4$ |

表 6-3 各种活动的代谢率及耗氧率(以体重 65kg 计算)

| 活动水平                              | 代谢率(J·h <sup>-1</sup> )  | 耗氧率(l·min <sup>-1</sup> ) |
|-----------------------------------|--------------------------|---------------------------|
| 睡眠                                | ~ 2.93 × 10 <sup>5</sup> | 0.23                      |
| 轻微活动(听讲、慢步)                       | ~ 8.37 × 10 <sup>5</sup> | 0.65                      |
| 中等活动(骑自行车 16 km·h <sup>-1</sup> ) | ~ 1.67 × 10 <sup>6</sup> | 1.30                      |
| 重活动(踢足球)                          | ~ 2.09 × 10 <sup>6</sup> | 1.63                      |
| 打篮球                               | ~ 2.51 × 10 <sup>6</sup> | 1.95                      |
| 自行车赛(43 km·h <sup>-1</sup> )      | ~ 5.86 × 10 <sup>6</sup> | 4.55                      |

测量病人的基础代谢率对某些疾病的诊断有重要意义。例如甲状腺功能异常时,基础代谢率可以发生 20% ~ 70% 的变化。

#### 第四节 循环过程 卡诺循环

##### 一、循环过程和热机效率

历史上,热力学理论最初是在研究热机工作过程的基础上提出来的。热机是利用热来作功的机器,例如蒸汽机、内燃机、汽轮机等都是热机。热机中被用来吸收热量并对外作功的物质称为工作物质。各种热机都是重复地进行着某些过程而不断地吸热作功的。为了研究热机的工作过程,引入循环过程的概念。如图 6-6 中,工作物质从 A 态出发,经历 ACB 过程达到 B 态,又从 B 态经历 BDA 过程回到 A 态,这样的过程称为循环过程。在  $p-V$  图上,循环过程表现为一封闭曲线。图 6-6 中,循环沿顺时针方向进行,是一正循环,热机中所进行的过程就是类似这样的过程,其中曲线 ACB 表示吸热过程,曲线下的面积为工作物质在膨胀过程中对外界所作的正功;曲线 BDA 表示放热过程,曲线下的面积为工作物质在压缩过程中对外所作的负功。闭合曲线所包围的面积就是工作物质在一次循环中所作的净功。

对大量各种热机的观察表明,一切热机的共同特点是连续地进行循环过程,并不断地对外作功。工作物质从中吸收热量的物体称为高温热源,如蒸汽机中的锅炉;工作物质对之放出热量的物体称为低温热源,如冷凝器。热机在每一循环中:①从外界吸取热量  $Q_1$ ;②对外作净功  $A$ ;③向外界放出热量  $Q_2$  (只表示数值,下同)。经过一个循环以后,工作物质回到了原来的态,内能没有改变,根据热力学第一定律:

$$A = Q_1 - Q_2 \quad (6-23)$$

可见热机在每一循环中,由高温热源吸入的热量  $Q_1$  只有一部分转变为功  $A$ ,另一部分  $Q_2$  要传递给低温热源,这说明热转变为功是不完全的。我们把热机对外所作的净功  $A$  与它所吸收的热量  $Q_1$  的比值

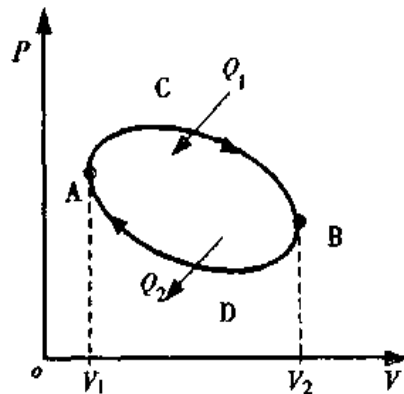


图 6-6 热机的循环过程

称为热机的效率, 即

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \quad (6-24)$$

实际上  $Q_2$  不能为零, 所以热机的效率永远小于 1。

如果循环沿逆时针方向进行, 如图 6-7 所示, 则为逆循环。此时, 外界对工作物质作净功  $A$ , 同时从低温热源吸入热量  $Q_2$ , 向高温热源放出热量  $Q_1$ 。根据热力学第一定律有

$$Q_2 + A = Q_1 \quad (6-25)$$

所以经过多次循环后, 低温热源的温度愈来愈低, 这就是致冷机的原理。制冷机的效能用制冷系数  $\epsilon$  表示, 它定义为

$$\epsilon = \frac{Q_2}{A} \quad (6-26)$$

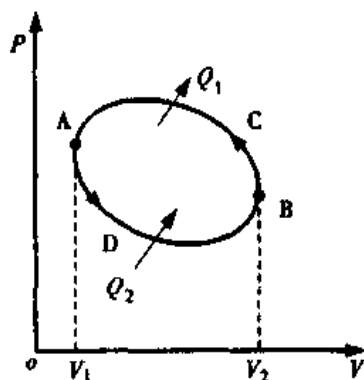


图 6-7 逆循环过程

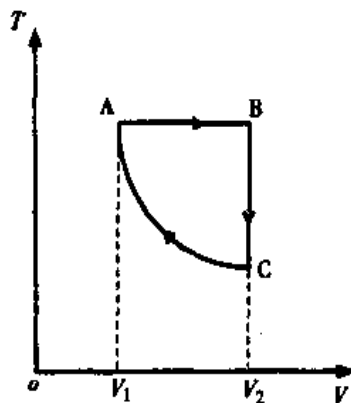


图 6-8 气体循环过程

[例题 6-1] 图 6-8 表示某理想气体循环过程的  $T$ - $V$  图,  $CA$  为绝热过程,  $A$  点的态参量 ( $T, V_1$ ) 和  $B$  点的态参量 ( $T, V_2$ ) 为已知, 求  $C$  点的温度和这个循环的效率。

解: 因为  $C$  点在定容线上又在绝热线上, 故有

$$TV^{\gamma-1} = T_c V_c^{\gamma-1} = T_c V_2^{\gamma-1}$$

故 
$$T_c = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} T$$

在一个循环过程中吸收的热量为

$$Q_1 = Q_{AB} = \frac{M}{\mu} R T \ln \frac{V_2}{V_1}$$

气体给外界的热量为

$$\begin{aligned} Q_2 &= -Q_{BC} = \frac{M}{\mu} C_V (T - T_c) = \frac{M}{\mu} C_V \left[ T - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} T \right] \\ &= \frac{M}{\mu} C_V T \left[ 1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} \right] \end{aligned}$$

效率为

$$\begin{aligned} \eta &= 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{\frac{M}{\mu} C_V T \left[ 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right]}{\frac{M}{\mu} R T \ln \frac{V_2}{V_1}} \\ &= 1 - \frac{C_V \left[ 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right]}{(C_p - C_V) \ln \frac{V_2}{V_1}} = 1 - \frac{1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1}}{(\gamma - 1) \ln \frac{V_2}{V_1}} \end{aligned}$$

## 二、卡诺循环及其效率

在 18 世纪末和 19 世纪初，蒸汽机的效率很低，只有 3% ~ 5%。在生产需要的推动下，很多科学家和工程师开始从理论上研究热机的效率。1824 年，法国青年工程师卡诺提出了一种理想热机：热机的工作物质为理想气体，它只与一个高温热源和一个低温热源交换热量，热源和冷源的温度在热机工作过程中不发生变化，并经历准静态的循环过程。这种热机称为卡诺热机，见图 6-9 (a)。它的循环过程称为卡诺循环，见图 6-9 (b)。因为是准静态过程，所以在工作物质与高温热源  $T_1$  接触的过程中，基本上没有温度差，工作物质与高温热源接触而吸热的过程 AB 是一个温度为  $T_1$  的等温膨胀过程。同样，工作物质和低温热源  $T_2$  接触而放热的过程 CD 是一个等温压缩过程。因为工作物质只与两个热源交换能量，所以当工作物质脱离两热源时所进行的过程 BC 和 DA，必然是绝热的准静态过程。总之，卡诺循环是由两个等温过程和两个绝热过程组成的。

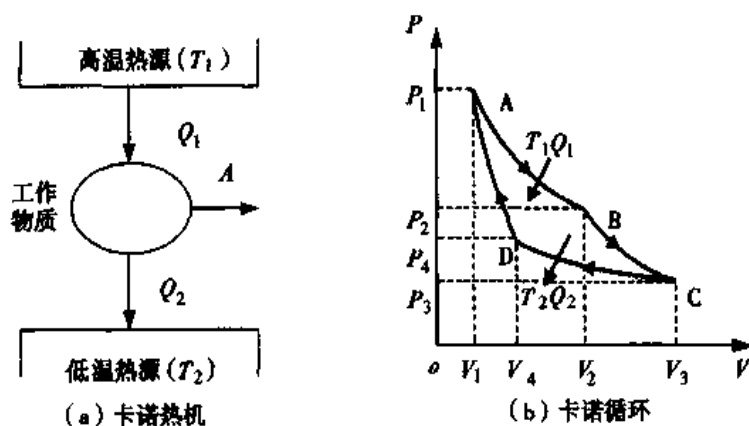


图 6-9 卡诺热机与卡诺循环

下面计算卡诺热机的效率。热机在每一循环过程中只从热源吸热一次，向冷源放热一次。在整个循环过程中，气体的内能不变。但气体与外界通过传递热量而对外做功。设热源温度为  $T_1$ ，冷源温度为  $T_2$ 。工作物质在一个循环过程中的状态如图 6-9 (b) 所示，A、B、C、D 四点的体积分别为  $V_1$ 、 $V_2$ 、 $V_3$  和  $V_4$ 。工作物质为  $n$  mol，按照式(6-14)，两个等温过程吸入和放出的热量分别为

$$Q_1 = nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$Q_2 = nRT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}$$

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2 \ln(V_3/V_4)}{T_1 \ln(V_2/V_1)} \quad (6-27)$$

按照式(6-21), 得

$$T_1 V_2^{-1} = T_2 V_3^{-1}, \quad T_1 V_1^{-1} = T_2 V_4^{-1}$$

故 
$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4} \quad (6-28)$$

将式(6-28)代入式(6-27)得

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1} \quad (6-29)$$

已知热机的效率为  $\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$ , 故卡诺热机的效率为

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad (6-30)$$

这说明: 理想气体准静态过程的卡诺循环的效率只与热源的温度有关, 高温热源的温度愈高, 低温热源的温度愈低, 卡诺循环的效率愈大。那么热机的效率能不能达到 100%呢? 如果不能, 最大的可能效率又是多少呢? 有关这些问题的研究促成了热力学第二定律的建立。

## 第五节 热力学第二定律

### 一、热力学第二定律

第一类永动机被热力学第一定律否定后, 历史上不少人曾试图制造另一种热机, 它不断地完成循环动作, 在每一个循环中吸入的热量全部用来作功, 即效率为 100% 的热机, 这种机器称为第二类永动机。制造第二类永动机并不违反热力学第一定律, 但所有的努力都失败了。大量的事实说明, 热机都不可能只有一个热源, 热机要不断地把吸取的热量变为有用的功, 就不可避免地要将一部分热量传给低温热源。人们由此总结出第二类永动机不可能制成的自然规律, 称为热力学第二定律, 它叙述为: 自然界没有这样一种循环过程, 它进行的结果是从单一热源吸取热量, 将其全部转化为功, 并且在外界不遗留任何其他变化。这一叙述是由开尔文首先提出来的, 通常称为热力学第二定律的开尔文说法。应当说明, 物体是能够把它吸入的热量全部转化为功的, 只是这时或者没有完成循环过程, 或者是留下其他变化。例如理想气体在等温膨胀时吸入的热量全部转化为功, 但它在膨胀后体积增大了, 没有回复到原始状态。

克劳修斯在观察自然现象时发现, 热量的传递也有一种特殊的规律, 即热量不可能自发地从低温物体传到高温物体, 这一规律通常被称为热力学第二定律的克劳修斯说法。

初看起来热力学第二定律的这两种说法并无关系。开氏说的是热量转变为功的问

题，而克氏说的是热量传递的问题，但其实它们是等效的。下面我们用反证法加以证明。

假设克氏的说法不成立，即热量  $Q$  能从低温热源  $T_2$ ，自动地传给高温热源  $T_1$ ，而且不产生其它影响，如图 6-10 所示。在两热源间安装一热机，它从高温热源吸取热量  $Q_1 = Q$ ，一部分用来对外做功  $A$ ，另一部分热量  $Q_2$  传给低温热源  $T_2$  形成一个循环。在这一循环过程中，总的效果是从单一低温热源吸取热量  $Q - Q_2$ ，全部用来对外做功  $A$ ，而高温热源不发生变化，这显然也就违反了开氏的说法。

热力学第二定律是在总结了大量事实的基础上提出来的，它是独立于热力学第一定律的新规律。

热力学第一定律指明能量守恒与转换的数量关系，热力学第二定律则说明并非所有能量守恒的过程都能进行，热现象的自然过程都具有一定的方向性。

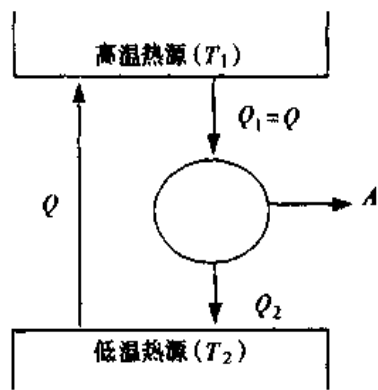


图 6-10 热力学第二定律  
两种说法的等效性

## 二、可逆过程和不可逆过程

一个系统，经过一定过程，从某一状态到达另一状态，又可以经过和原来完全一样的那些中间状态重新回到原来的状态，而不引起外界任何变化，则这种过程称为可逆过程，否则就是一个不可逆过程。热力学第二定律的两种说法就是分别挑选了一种典型的不可逆过程(热功转换和热传导的不可逆性)。实际上，一切自发过程都是不可逆的。例如通过摩擦，功转化为热量，根据热力学第二定律，热量不能再通过循环过程全部转化为功，因此，功通过摩擦转化为热量的过程是不可逆过程；各部分浓度不同的溶液自动扩散，最后达到均匀，而浓度已均匀的溶液，不会自动地变成不均匀等等。这些自然界的自发过程有一定的方向，都是不可逆过程，要想使过程逆向进行，回到原来的状态，必须借助于外来因素，引起外界的变化。

那么，是否有可逆过程存在？假如单摆不受空气阻力和其他摩擦力的作用，则它的摆动可视为是可逆的。又如无摩擦或其他耗散效应的准静态过程，其中的每一步都达到了平衡，如果我们控制条件，使它按照与原过程相反的顺序进行，经过原来的所有中间状态，并消除所有的外界影响，则可使无摩擦的准静态过程成为可逆过程，但实际上这样的条件是很难实现的，严格地说可逆过程只是一种理想的过程，我们只能实现和可逆过程非常接近的过程。因此，利用可逆过程的概念得到的结论，是一种极限的情形。虽然准静态过程和可逆过程在实际生活中是不存在的，但是这些概念有助于我们从理论上分析问题，从而得出解决实际问题的普遍原理。

## 三、热力学第二定律的统计意义

热现象是与大量分子无规则的热运动相联系的，为了进一步认识热力学第二定律的本质，我们来分析气体的自由膨胀。如图 6-11 所示，用隔板将容器分成容积相等的 A、B 两室，使 A 室充满气体，B 室保持真空。我们来观察气体分子运动的分布情

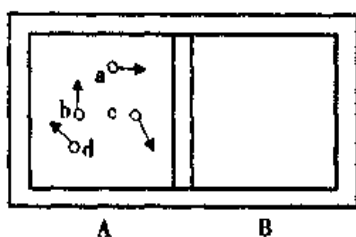


图 6-11 气体自由膨胀不可逆性的统计意义

况。如果仅考虑四个分子 a、b、c、d，把隔板抽掉后，它们将在整个容器内运动，分子在容器中的分布见表 6-4，共有 16 种微观态，每个微观态出现的概率是一样的。从分子浓度分布的宏观表现来看，16 种微观态分属 5 种宏观态，其中，4 个分子全退回 A 室的宏观态概率最小，分子在 A、B 两室均匀分布的宏观态(即分子处于无序程度最大的状态)概率最大。表中  $P$  是任一宏观态对应的微观状态数，称为热力学概率。可以证明：如果容器中共有  $N$  个分子，若以分子

处在 A 室或 B 室来分类，则共有  $2^N$  种可能的分布，而全部  $N$  个分子都退回到 A 室的宏观态的概率为  $\frac{1}{2^N}$ 。我们知道，宏观系统都包含了大量分子，例如，对一摩尔气体， $N = 6.02 \times 10^{23}$ ，所以，当气体自由膨胀后，所有这些分子集中地全部都退回到 A 室的概率只有  $\frac{1}{2^{6.02 \times 10^{23}}}$ 。这个概率是如此的小，实际上是不会出现的。

表 6-4 分子在容器内的分布

| 微观态 | 分子位置 |      | 宏观态      | 概率   | 热力学概率 $P$ |
|-----|------|------|----------|------|-----------|
|     | A 室  | B 室  |          |      |           |
| 1   | abcd | —    | $A_4B_0$ | 1/16 | 1         |
| 2   | bcd  | a    | $A_3B_1$ | 4/16 | 4         |
| 3   | acd  | b    |          |      |           |
| 4   | abd  | c    |          |      |           |
| 5   | acd  | d    |          |      |           |
| 6   | ab   | cd   | $A_2B_2$ | 6/16 | 6         |
| 7   | ac   | bd   |          |      |           |
| 8   | ad   | bc   |          |      |           |
| 9   | cb   | ad   |          |      |           |
| 10  | bd   | ac   |          |      |           |
| 11  | cd   | ab   |          |      |           |
| 12  | a    | bcd  | $A_1B_3$ | 4/16 | 4         |
| 13  | b    | acd  |          |      |           |
| 14  | c    | abd  |          |      |           |
| 15  | d    | abc  |          |      |           |
| 16  | —    | abcd | $A_0B_4$ | 1/16 | 1         |

所以气体自由膨胀的不可逆性，实质上是反映了这个系统内部发生的过程总是由热力学概率小的宏观状态向热力学概率大的宏观状态进行，而相反的过程在外界不发生任何影响的条件下是不可能实现的。因此，一孤立的热力学系统，其内部发生的过程，总是从高度有序的状态向比较无序的状态进行，由包含微观状态数目少的宏观状态向包含微观状态数目多的宏观状态进行，这就是热力学第二定律的统计意义。

## 四、卡诺定理

卡诺循环中每个过程都是准静态过程，所以卡诺循环是理想的可逆循环。而实际热机的工作物质不是理想气体，循环也不是卡诺循环。为了解决实际热机效率的极限问题，卡诺由热力学第二定律推出了热机理论中非常重要的卡诺定理，它指出：

(1) 在相同的高温热源  $T_1$  和低温热源  $T_2$  之间工作的一切可逆热机，其效率都等于卡诺热机的效率，而与工作物质无关。

(2) 在相同的高温热源和低温热源之间工作的一切不可逆热机，其效率都不可能大于可逆热机的效率。

由卡诺定理可知，在相同的两个热源  $T_1$  和  $T_2$  之间工作的一切可逆热机的效率为

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad (6-31)$$

一切不可逆热机的效率为

$$\eta' \leq 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad (6-32)$$

## 第六节 熵和熵增加原理

### 一、克劳修斯等式

对于可逆的卡诺热机，从卡诺定理可知，其效率为：

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

将上式乘以  $Q_1$ ，除以  $T_2$  得

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2} \quad (6-33)$$

上式中  $Q_1$  表示吸收的热量， $Q_2$  表示放出的热量，且均取绝对值。如果采用热力学第一定律中对  $Q$  的符号规定，则上式改写为

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0 \quad (6-34)$$

式中  $Q/T$  称为热温比，是卡诺循环中两个等温过程中系统所吸收或放出的热量与温度之比。考虑卡诺循环中的两个绝热过程， $Q=0$ ，从而相应地有  $\frac{Q}{T}=0$ ，因此可以把(6-34)理解为：在卡诺热机中的工作物质从某个初态出发，经历了一个循环又回到原来的状态后，量  $\frac{Q}{T}$  在整个卡诺循环的四个过程之和为零。

把这个结论推广到一切可逆循环过程，如图 6-12，对任意可逆循环 ABCDA，可看成是由许多小卡诺循环所组成，这些小卡诺循环都是可逆的，且都是正循环。从图



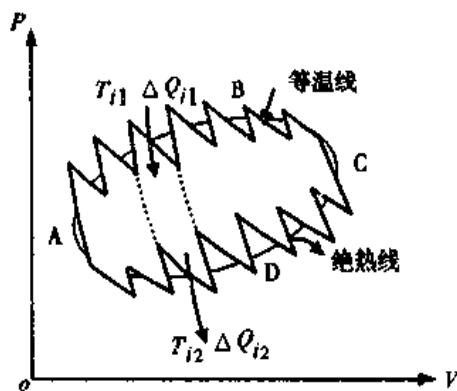


图 6.12 证明吉布斯等式图

中可以看出任意两个相邻的小卡诺循环的绝热线大部分都是共同的，但进行的方向正好相反，从而效果相互抵消。因此，所有小卡诺循环的总效果就相当于图中锯齿形路径所表示的循环过程。根据式(6-34)，对于任意一个可逆小卡诺循环均有

$$\frac{\Delta Q_{i1}}{T_{i1}} + \frac{\Delta Q_{i2}}{T_{i2}} = 0$$

对所有小卡诺循环求和，得

$$\sum^n \left( \frac{\Delta Q_{i1}}{T_{i1}} + \frac{\Delta Q_{i2}}{T_{i2}} \right) = 0$$

一个可逆过程自 A 状态变到 B 状态时, 熵的增量为

$$S_B - S_A = \int_A^B \frac{dQ}{T} \quad (6-37)$$

而对于无限小的可逆过程则有

$$dS = \frac{dQ}{T} \quad (6-38)$$

用积分  $\int_A^B \frac{dQ}{T}$  求系统的熵变时, 要注意积分对应的必须是一个可逆过程。如果系统由初态实际上是经历一个不可逆过程到达终态, 那么要设计一个连接同样初、终两态的可逆过程来求积分  $\int_A^B \frac{dQ}{T}$ , 计算出熵变。

一个系统如果是由一些分系统组成, 则它的熵变等于各分系统熵变的和。

[例题 6-2] 有 1kg 温度为 0°C 的冰吸热后融化成 0°C 的水, 然后变为 10°C 的水, 求其熵变(设冰的溶解热为  $3.35 \times 10^5 \text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$ , 水的定压热容为  $4.187 \times 10^3 \text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ )。

解: 0°C 的冰融化成 0°C 的水时, 温度保持不变, 即  $T = 273\text{K}$ , 因此

$$\Delta S = \frac{\Delta Q_1}{T} = \frac{3.35 \times 10^5 \text{J}}{273\text{K}} = 1.23 \times 10^3 \text{J} \cdot \text{K}^{-1}$$

$\Delta Q_1$  是 0°C 的冰融化成 0°C 水时吸收的热量, 0°C 的水变成 10°C 的水时的熵变为

$$\begin{aligned} \Delta S &= \int_1^2 \frac{\Delta Q_2}{T} = \int_{273}^{283} mc \frac{dT}{T} = mc \ln \frac{283}{273} \\ &= 1000 \times 4.1868 \times 0.036 = 150.74 \text{J} \cdot \text{K}^{-1} \end{aligned}$$

总的熵变为  $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = 1.23 \times 10^3 + 0.151 \times 10^3 = 1.38 \times 10^3 \text{J} \cdot \text{K}^{-1}$

由上例可知, 冰化为水和水的温度上升都是熵增加的过程。我们知道冰是晶体, 分子的排列比较有序, 融化为水后, 分子的运动就变成无序了, 而且无序的程度随着温度的升高而增加。那么熵与无序之间有什么关系呢? 统计物理学指出, 状态的无序可以用它的宏观状态的热力学概率  $P$  来衡量, 熵与  $P$  之间的关系为

$$S = k \ln P \quad (6-39)$$

式中  $k$  是玻耳兹曼常量。  $P$  越大, 系统的无序程度越大, 熵也越大。平衡态对应热力学概率取极大值的状态, 这时熵也取极大值。因此, 可以说熵是微观离子热运动所引起的无序性的量度。

### 三、熵增加原理与能量退降

对于不可逆循环, 由卡诺定理可知, 其效率为

$$\eta' = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \leq 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

即

$$\frac{Q_2}{T_2} \geq \frac{Q_1}{T_1}$$

等号仅对可逆循环成立。采用热力学第一定律中对  $Q$  的符号规定, 则上式改写为:

$$\frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_1}{T_1} \leq 0 \quad (6-40)$$

上式表明，不可逆循环的热温比的不大于零。

对于一个更普遍的循环过程，式(6-40)可进一步推广为

$$\oint \frac{dQ}{T} \leq 0 \quad (6-41)$$

对于可逆循环，上式取等号，即为克劳修斯等式；对于不可逆循环取不等号，即为克劳修斯不等式。

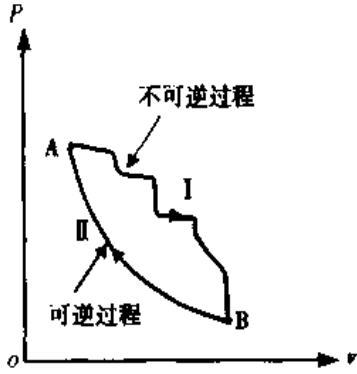


图 6-14 不可逆循环过程

现在考虑一个任意的不可逆过程，如图 6-14 中的过程 I，假设有一个任意可逆过程正好能使物体由终态 B 回到初态 A，如图 6-14 中的过程 II，则 I、II 构成不可逆循环，根据式(6-41)有

$$\oint \frac{dQ}{T} = \underbrace{\int_A^B \frac{dQ}{T}}_I + \underbrace{\int_B^A \frac{dQ}{T}}_{II} \leq 0$$

即

$$\underbrace{\int_A^B \frac{dQ}{T}}_I + S_A - S_B \leq 0$$

因此有

$$S_B - S_A \geq \int_A^B \frac{dQ}{T} \quad (6-42)$$

对于微过程则有

$$dS \geq \frac{dQ}{T} \quad (6-43)$$

由上述可知，热力学系统的熵变在可逆过程中等于系统所吸收的热量与热源温度的比值；在不可逆过程中则大于这个比值。

把热力学第一定律和第二定律结合起来，即把式(6-2)和(6-43)结合起来，可得：

$$TdS \geq dU + dA \quad (6-44)$$

上式是热力学的基本方程。

在式(6-43)中，如果热力学过程是绝热的，则  $dQ = 0$ ，得

$$dS \geq 0 \quad (6-45)$$

即绝热过程中，系统的熵永不减少。对于可逆绝热过程，系统的熵不变；对于不可逆绝热过程，系统的熵总是增加的，这个结论称为熵增加原理。熵增加原理说明了热力学过程进行的方向：不可逆绝热过程总是向着熵增加的方向进行，可逆绝热过程则是沿着等熵路径进行。一个孤立系统中进行的任何过程都是绝热过程，其熵永不减少。

熵增加和不可逆过程的直接后果是什么呢？我们来讨论有限温差热传导过程。设两物体 A、B 的温度分别为  $T_A$  和  $T_B$ ，且  $T_A > T_B$ 。当它们刚接触后，发生一不可逆传热过程，使热量  $|dQ|$  由 A 传向 B。这份能量  $|dQ|$  原来在 A 内，借助温度为  $T_0$  的热源，利用卡诺热机从 A 中吸出  $|dQ|$  可以作功的最大值为

$$A_1 = |dQ| \eta_c = |dQ| \left( 1 - \frac{T_0}{T_A} \right)$$

传热过程后， $|dQ|$  到了 B 内，这时再利用它能作的功的最大值变成了

$$A_2 = |dQ| \left( 1 - \frac{T_0}{T_B} \right)$$

前后相比，可转化为功的能量减少了，其数量为

$$E_d = A_1 - A_2 = |dQ| T_0 \left( \frac{1}{T_B} - \frac{1}{T_A} \right)$$

经过不可逆的传热过程，A、B构成的系统的熵的增量为

$$dS = |dQ| \left( \frac{1}{T_B} - \frac{1}{T_A} \right)$$

比较上面两式得

$$E_d = T_0 dS$$

由此可见，在能量的利用上，不可逆过程的后果总是使一定的能量  $E_d$  从能作功的形式变为不能作功的形式，而且  $E_d$  的大小和不可逆过程引起的熵的增加成正比，这种现象叫能量退降。一切不可逆过程虽然不能“消灭”能量，但总要或多或少地使一部分能量变成不能作功的形式。

自然界也存在许多从无序到有序的现象。各种生物都是由细胞按精确规律组成的高度有序结构。在生物生长过程中，不断有细胞死亡，也不断把相对混乱无序的原子、分子组成新的有序的蛋白质和细胞。在生物进化过程中，生物都是经过漫长的年代由简单到复杂、由低级到高级、由较为有序向更加有序的方向发展。生命过程中的这种从无序到有序的现象，称为自组织现象。生命过程实际上就是生物体持续进行的自组织过程。但这并不违反热力学第二定律。热力学系统从有序向无序的转化是针对孤立系统来说的，而人体是一个与外界既有能量交换又有物质交换的开放系统，而且远离平衡状态。自组织过程是生命系统内不平衡的表现，而且不会达到平衡。一旦达到平衡而有序状态消失时生命也就终止了。这种在远离平衡情况下系统出现的稳定有序的结构被称为耗散结构。

从熵增加原理看，要保持生命过程的正常进行，或使系统向更加有序的方向发展，生命系统也必须开放，以使系统的熵保持不变或减少。非孤立系统熵的变化形式可分为两部分，一部分是由于系统内部的不可逆过程引起的，叫熵产生，另一部分是由于系统和外界交换物质和能量引起的，叫熵流。一个系统的熵产生永不可能是负的。孤立系统内进行的过程只有熵产生，没有熵流的变化，所以熵总是增加的。而开放系统是有熵流变化的，且熵流可以是负的，视外界的作用不同，整个开放系统的熵可能减少。因此开放系统存在着由无序到有序转化的可能。维持人体有序结构所需要的能量来自外界供给的食物，食物在人体内被消化吸收后，变为简单的排泄物，这一过程给生命系统带来负熵，使生命系统的熵保持不变或减少，从而维持生命的有序结构。如果把人体和它们的环境放在一起考虑，则总熵仍是增加的，可见生命过程也是遵从热力学第二定律的。

## 思考题与习题六

- 6-1 解释下列术语：①系统；②环境；③参量；④过程；⑤外界；⑥准静态。
- 6-2 作功和传递热量是等效的，但又有本质的不同，试解释之。
- 6-3 为什么说内能和熵都是态函数，而功和热量不是态函数。

6-4 把一块  $0^{\circ}\text{C}$  的冰投入大湖中, 设大湖中水的温度比冰高一微小量, 于是冰逐渐融解。问: ①冰的熵有无变化? ②大湖的熵有无变化?

6-5 给一定量的理想气体加热, 总共传递了  $836\text{ J}$  的热量, 气体膨胀对外作功  $500\text{ J}$ 。求气体内能的变化。 (336 J)

6-6  $1\text{ mol}$  单原子理想气体, 从  $300\text{ K}$  加热到  $350\text{ K}$ 。试求在定容过程和定压过程中各吸取了多少热量? 内能各增加多少? 对外作了多少功? (625 J, 625 J, 0 J; 1040 J, 625 J, 415 J)

6-7 一个系统在  $300\text{ K}$  的恒温下, 吸收  $10^4\text{ J}$  的热量, 但没有作功。求: ①系统的熵变; ②系统内能的变化。 ( $33.3\text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$ ,  $10^4\text{ J}$ )

6-8 打算建造一热机, 从海洋的温度梯度中获得动力。若海洋表面与深处的水温分别是  $25^{\circ}\text{C}$  和  $10^{\circ}\text{C}$ 。试求此热机的最大效率。 (5%)

6-9  $2\text{ mol}$  的理想气体, 经历一可逆等温膨胀过程, 体积从  $0.02\text{ m}^3$  膨胀到  $0.04\text{ m}^3$ , 温度为  $300\text{ K}$ 。求其熵变为多少? ( $11.5\text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$ )

6-10 把  $2\text{ mol}$  的氧气从  $40^{\circ}\text{C}$  冷却到  $0^{\circ}\text{C}$ , 若: ①定容冷却; ②定压冷却。分别求其熵变为多少? ( $-5.68\text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$ ;  $-7.96\text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$ )

(李晓春)

# 第七章 静 电 场

---

学习本章后，你应：

---

1. 掌握电场强度、电势及其相互关系与计算；静电场的能量及其计算。
  2. 掌握静电场的叠加原理、高斯定理与环路定理，理解它们所揭示的静电场性质。
  3. 掌握静电场与电介质的相互作用规律。
  4. 在电偶极子电场基础上了解心电知识。
- 

电磁现象普遍存在于自然界(包括生命现象)之中，并被不断应用于现代技术。因此，掌握电磁学知识是十分必要的。

以电运动及其规律为研究对象的电学是物理学的重要组成部分。本章将讨论静电场的基本性质与规律，其中包括描述静电场性质的两个基本物理量——电场强度和电势及其相互关系；反映静电场基本规律的场的叠加原理、高斯定理以及场的环路定理等；静电场与电介质的相互作用规律以及静电场的能量等内容。并简介对医学有意义的电偶极子电场与心电知识。本章是学习电磁学的基础。

## 第一节 电场 电场强度

### 一、电荷 库仑定律

电荷表示物质的带电属性，用电量作为电荷的量度。它的单位是库仑。电荷的量值只能是一基本电荷  $e$  (即电子的电量,  $e = 1.602 \times 10^{-19} \text{C}$ ) 的整数倍，即电荷只能取分立的、不连续的量值。这种性质称为电荷的量子性。在本章所讨论的宏观现象中所涉及的电荷远比  $e$  大得多，故可认为电荷连续地分布在带电体上，而忽略电荷的量子性所引起的微观起伏。

在真空中两个静止点电荷(形状和大小可以忽略的带电体)间相互作用力  $F$  的大小与两个点电荷的电量  $q_1$ 、 $q_2$  的乘积成正比，与它们之间距离  $r$  的平方成反比。作用力的方向沿着它们的连线，同号电荷相斥，异号电荷相吸，这就是库仑定律。例如， $q_1$  对  $q_2$  的作用力为  $F$

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2} r_0 \quad (7-1)$$

式中,  $r_0$  是单位矢量, 方向是由  $q_1$  指向  $q_2$ 。比例系数  $k$  的数值及单位取决于式中各量所采用的单位。在国际制(SI)中通常为了简化电磁学中的一些常用公式, 将  $k$  写成  $k = 1/4\pi\epsilon_0$ , 其中  $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$  称真空介电常量。库仑定律是一实验定律, 它是电学理论的基础。物质的结构以及化学作用等问题的微观本质主要与库仑力有关。公式(7-1)严格成立于真空中, 对于空气可近似地使用。

## 二、电场与电场强度

**1. 电场** 电场是存在于带电体周围空间的特殊物质。任何电荷都在它周围空间产生电场。电荷之间的相互作用正是通过电场实现的。库仑力即是电场力。建立电场的电荷通常称为场源电荷。与观察者相对静止的场源电荷所产生的电场称为静电场, 它是不随时间而变化的稳定电场。

电场具有两种重要性质: 一是力的性质, 即放入电场的任何电荷都将受到电场力的作用; 二是能的性质, 即当电荷在电场中运动时, 电场力对电荷要作功, 表明电场具有能量。

**2. 电场强度** 为了对电场的性质进行描述, 我们引入试探电荷的概念。所带电量足够少且引入后不会影响原来电场性质的点电荷称为试探电荷。由库仑定律可知, 试探电荷  $q_0$  在电场中某点所受的力  $F$  不仅与该点所在的位置有关, 而且与  $q_0$  的多少有关。而比值  $F/q_0$  则仅由电场在该点的客观性质而定, 与试探电荷无关。于是我们定义这一比值为描述电场具有力的性质的物理量, 称为电场强度, 简称场强, 用  $E$  表示, 则

$$E = F/q_0 \quad (7-2)$$

场强的定义也可表述为: 电场中某点的场强矢量, 其量值等于一个单位试探电荷在该点所受的力, 其方向与正电荷在该点所受力的方向一致。在 SI 制中, 场强的单位是  $\text{N} \cdot \text{C}^{-1}$  或  $\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$ , 这两者是相等的。

$E$  是矢量, 对于静电场, 它是电场所占据之空间坐标的单值矢量函数。应该指出, 电场是客观存在, 它仅决定于场源电荷的分布, 与是否引入试探电荷无关。空间各点的  $E$  都相等的电场称为均匀电场或匀强电场。

## 三、场强叠加原理

实验表明电场力也满足力的独立作用原理。由  $n$  个点电荷所组成的带电体系在空间某点的总场强

$$E = \frac{F}{q_0} = \sum_{i=1}^n \frac{F_i}{q_0} = \sum_{i=1}^n E_i \quad (7-3)$$

式中  $E_i$  为第  $i$  个点电荷在该点的场强, 而式(7-3)则称为场强叠加原理。它表明: 电场中任一点的场强等于各个场源点电荷各自在该点独立产生的场强的矢量和。因此, 只要知道点电荷的场强和场源系统的电荷分布情况, 便可计算出任意带电体系电场的场强。以上原理不仅对于点电荷电场的叠加, 而且对于任意带电体系电场的叠加都是正确的。

库仑定律与叠加原理是静电学中最基本的内容，将两者结合起来，原则上可以解决静电场的空间分布问题。

#### 四、电场强度的计算

1. 点电荷电场中的场强 真空中一个孤立点电荷  $q$  产生的电场在距其  $r$  远处  $P$  点的场强，由式(7-1)和(7-2)可得到

$$E = \frac{F}{q_0} = k \frac{q_0 q}{q_0 r^2} r_0 = k \frac{q}{r^2} r_0 \quad (7-4)$$

式中  $r_0$  是由  $q$  指向  $P$  的单位矢量。当场源电荷  $q$  为正时， $E$  与  $r_0$  同方向；当  $q$  为负时， $E$  与  $r_0$  反方向。该式表明点电荷的电场以其场源为中心呈球形对称分布。

2. 连续分布电荷电场中的场强 对于电荷连续分布的带电体，可先将带电体分割为许多电荷元  $dq$ ，对  $dq$  的场强  $dE$  进行积分，即可得出整个带电体电场中的场强

$$E = \int dE \quad (7-5a)$$

$dq$  若视为电点荷，则上式可写成

$$E = \int k \frac{dq}{r^2} r_0 \quad (7-5b)$$

式中  $r_0$  是由电荷元  $dq$  指向场点方向的单位矢量。

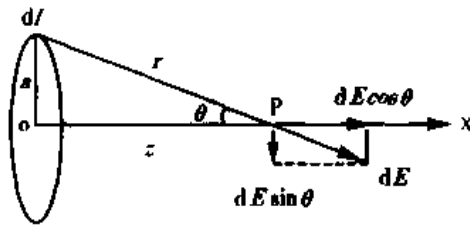


图 7-1 例 7-1

[例 7-1] 一半径为  $a$  的圆环上均匀分布有电荷  $Q$ ，试求圆环轴线上任一点  $P$  的场强 (见图 7-1)。

解：设  $P$  点距环心  $O$  为  $x$ 。今将圆环分割为许多极小的元段  $dl$ ，所带电量  $dq$  的电荷元可视为点电荷。 $dq$  至  $P$  点的距离为  $r$ ，则  $dq$

在  $P$  点的场强大小  $dE = k \frac{dq}{r^2}$ ，方向如图 7-1。

根据圆环上电荷分布的对称性，各电荷元在  $P$  点产生的场强垂直于轴线的分量互相抵消，而平行于轴线的分量之和就是圆环在  $P$  点的场强，其大小为

$$E = \int dE \cos \theta = \int k \frac{\cos \theta}{r^2} dq = k \frac{\cos \theta}{r^2} \int_0^Q dq = k \frac{Q}{r^3} x$$

式中  $\cos \theta = \frac{x}{r}$ ，由于  $r^2 = a^2 + x^2$ ，故上式又可写成矢量式

$$E = k \frac{Qx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} x_0$$

式中  $x_0$  为沿  $OX$  方向之单位矢量，若  $Q > 0$ ， $E$  沿  $OX$  方向；若  $Q < 0$ ， $E$  指向环心。

这里再介绍一种计算方法。由于  $Q$  均匀且连续地分布在圆环上，电荷元  $dq$  与元段  $dl$  之间有关系  $dq = \frac{Q}{2\pi a} \cdot dl$ ，代入上述积分式，得



$$E = \int k \frac{\cos \theta}{r^2} dq = \int_0^{2\pi a} k \frac{Q}{2\pi a \cdot r^2} \cdot \frac{x}{r} \cdot dl = k \frac{Q}{r^3} x$$

可见两种算法结果一致。

在  $x=0$ ，即环心处的场强  $E=0$ ；在  $x \gg a$  处有  $(a^2 + x^2)^{3/2} \approx x^3$ ，即远离圆环处的场强  $E = k \frac{Q}{x^2} x_0$  表明在远离圆环处可视圆环为一电荷集中于环心的点电荷。

## 第二节 高斯定理

### 一、电场线和电通量

**1. 电场线** 在电场中描绘一系列曲线，使其上每一点的切线方向都与该点场强的方向一致，且通过垂直于场强的单位面积的曲线数目等于该点场强的大小，即  $\Delta \Phi_E / \Delta S_{\perp} = E$ 。这些曲线称为电场线。

显然，电场线的方向表示场强的方向，电场线的密度表示场强的大小。这样，电场线就可以形象地全面描绘出电场中  $E$  的分布状况。对于静电场的电场线有两个特点：第一，电场线是从正电荷出发而终止于负电荷，电场线不闭合，也不中断。第二，任何两条电场线不能相交。因为任何一点的场强都只有一个确定的方向。

**2. 电通量** 通过电场中某一面积的电场线总数称为通过该面积的电通量或  $E$  通量，以  $\Phi_E$  表示。下面我们分几种情况来讨论  $\Phi_E$  的计算方法。

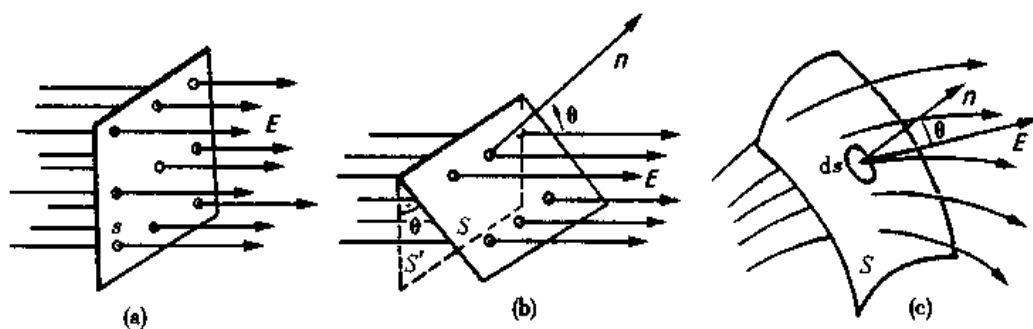


图 7-2 电通量的计算

在匀强电场中通过与场强  $E$  垂直的平面  $S$  的电通量，由上述定义应为  $\Phi_E = ES$ ，如图 7-2 (a) 所示。如果平面  $S$  的法线  $n$  与场强  $E$  夹角为  $\theta$ ，如图 7-2 (b) 所示，则通过该平面的电通量

$$\Phi_E = E \cos \theta S = E \cdot S \quad (7-6)$$

对于在非均匀电场中通过任意曲面的电通量，可将该曲面分割为许多无限小的面积元  $dS$ ，以至可视其为一平面，而且在  $dS$  上的电场可认为是均匀的，如图 7-2 (c) 所示，通过该面积元的电通量为

$$d\Phi_E = E \cos \theta dS = E \cdot dS \quad (7-7)$$

其中  $\theta$  为  $dS$  的法线方向与场强  $E$  方向的夹角。对于整个曲面  $S$ , 其电通量为

$$\Phi_E = \int d\Phi_E = \iint_S E \cos\theta dS = \iint_S E \cdot dS \quad (7-8)$$

当  $S$  是闭合曲面时, 式(7-8)可写为

$$\Phi_E = \oiint_S E \cos\theta dS = \oiint_S E \cdot dS \quad (7-9)$$

我们规定闭合曲面的法线方向是由里向外为正。若曲面上任一面积元处的  $\theta < \pi/2$ , 则该处的电通量为正, 即穿出该面的电场线数为正; 若  $\theta > \pi/2$ , 则该处的电通量为负, 即穿入该面的电场线数为负。通过整个闭合曲面的电通量  $\Phi_E$  值的正与负为穿出与穿入该闭合曲面电场线的代数和。

## 二、高斯定理

高斯定理是静电场的基本规律之一, 现在我们就真空中的情况推导这一定理。首先我们考虑场源是点电荷的情形, 今以正点电荷  $q$  为中心, 任意长  $r$  为半径作一球面  $S_1$ , 如图 7-3 (a)。显然, 球面上各点的场强大小均为  $E = k \frac{q}{r^2}$ , 方向沿半径指向外且与球面法线的夹角  $\theta = 0$ , 由式(7-9)可求得通过球面  $S_1$  之电通量

$$\Phi_E = \oiint_{S_1} E \cos\theta dS = E \oiint_S ds = E 4\pi r^2 = k 4\pi q = q/\epsilon_0$$

上式表明  $\Phi_E$  与  $r$  无关, 即对于任意大的球面上式均成立。今围绕点电荷  $q$  作任意闭合曲面如图 7-3 (a) 中之  $S_2$ 、 $S_3$  等, 由上述推导及图中不难看出其电通量均为  $q/\epsilon_0$ , 且  $\Phi_E > 0$ 。若  $q$  为负点电荷, 则  $\Phi_E < 0$ 。若作一闭合面不包含此点电荷, 则由图 7-3 (b) 可看到穿出与穿入此闭合面的电场线数相同, 亦即通过闭合面的电通量为零。

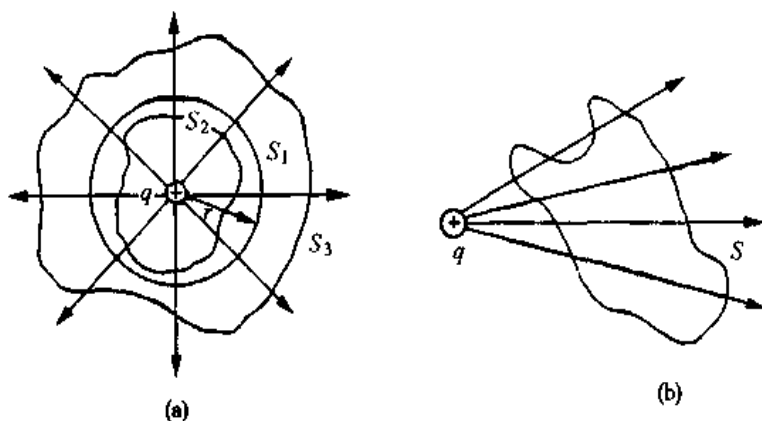


图 7-3 真空中高斯定理的证明

现在, 我们再考虑场源是任意点电荷系的情形。在场中作一任意闭合曲面, 第 1 至第  $n$  个点电荷在其面内, 自第  $n+1$  至第  $N$  个点电荷在其面外。由于上述分析适用于任意一个点电荷, 那么总电通量应为

$$\Phi_E = \sum_{i=1}^N \Phi_{E_i} = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{\epsilon_0} + 0$$

综合上式与式(7-9), 得出

$$\Phi_E = \oint_S E \cos\theta dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i \quad (7-10)$$

同样, 对于任意带电体系的场源, 上式均成立。式(7-10)表明通过真空静电场中任意一闭合曲面的电通量等于该曲面所包围的电荷电量的代数和除以  $\epsilon_0$ 。这就是真空中的高斯定理。关于这一定理, 我们作如下说明:

由库仑定律和叠加原理导出的高斯定理揭示了场与场源之间的定量关系, 在场强分布已知时可由此求出任意区域内的电荷。这一规律显然与闭合曲面的形状、大小无关。

高斯定理揭示了静电场是有源场, 所选取的闭合曲面称为高斯面。若面内是正电荷, 则  $\Phi_E > 0$ , 表明电场线始于正电荷。若面内是负电荷, 则  $\Phi_E < 0$ , 表明电场线终止于负电荷。若面内无电荷, 电场线仅仅从该面穿过而已。

高斯面是一假想的任意曲面, 并非客观存在。

还应该注意, 式(7-10)中的  $E$  在高斯面上, 是面内、面外全部场源电荷产生的总场强。即面外的电荷对  $E$  是有贡献的, 虽然对高斯面上的电通量  $\Phi_E$  没有贡献, 但它可改变闭合面上电通量的分布。式中的  $q_i$  在高斯面内, 而不在面外, 也不在面上 (这是无意义的)。  $\Phi_E$  与  $q_i$  的具体分布无关。  $\frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i = 0$  则表示高斯面上的电通量为零, 并不一定面内没有电荷, 也并不一定高斯面上各部分曲面的电通量为零。

### 三、高斯定理的应用举例

**1. 均匀带电球面的场强** 今有一均匀带电球面, 半径为  $R$ , 总带电量为  $Q$  (图 7-4), 欲求离球心  $r$  远处任一点的场强。从场源电荷的分布可知场的分布呈球形对称, 场强方向与球面法线方向一致且在距中心等远各处的场强大小相等。今以球心为中心,  $r$  为半径作一球形高斯面  $S$ , 欲求场强之点落在此高斯面上, 代入式(7-10)得通过高斯面之电通量

$$\Phi_E = \oint_S E \cos\theta dS = E \oint_S dS = E4\pi r^2$$

$$= \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i$$

$$\text{故有} \quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sum_{i=1}^n q_i = k \frac{Q}{r^2} \quad (r > R)$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sum_{i=1}^n q_i = 0 \quad (r < R)$$

这表明在均匀带电球面外部可视其为一电荷集中于球心的点电荷, 而在其内部则各处场强均为

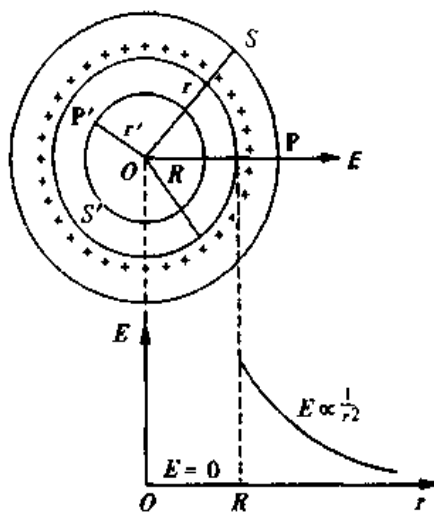


图 7-4 均匀带电球面的电场分析

零。均匀带电球面的电场中各点的场强与该点距球心距离的关系曲线如图 7-4 所示。显然，对于球形对称分布的电场都有类似的分析。

**2. 无限大均匀带电平面的场强** 今有一无限大均匀带电平面，其面电荷密度为  $\sigma$ ，欲求其周围电场的场强。由于场源电荷在无限大平面上均匀分布，在其两侧附近的电场则应均匀对称地分布，即场强方向与带电平面垂直、距带电平面等远处的场强大小相等。于是可作一侧面与带电平面垂直、两底面  $S_1$  与  $S_2$  距带电平面等远的正圆柱形高斯面，与带电平面相截之面积为  $S$ ，如图 7-5 所示。对于高斯面的两底面均有  $\theta = 0$ ，对于其侧面有  $\theta = \pi/2$ ，所以通过两底面的电通量均为  $ES$ ，通过其侧面的电通量则为零。通过高斯面的电通量

$$\Phi_E = \oint_S E \cos\theta dS = 2ES = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma S$$

即 
$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \text{ 或 } E = 2\pi k\sigma \quad (7-11)$$

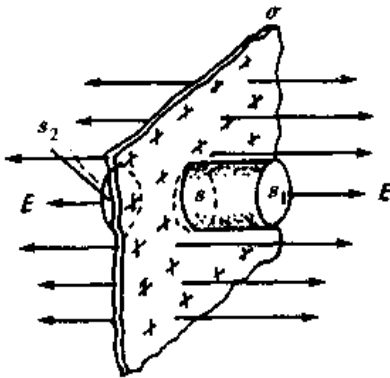


图 7-5 无限大均匀带电平面的场强

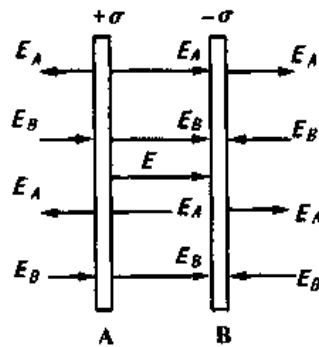


图 7-6 无限大均匀带电平行平面的场强

上式表明无限大均匀带电平面附近是一方向与该平面垂直的均匀电场。

对于两个均匀带等量异号电荷的无限大平行平面之间的电场，利用场强叠加原理由上述结果便可得到  $E = \sigma/\epsilon_0$  或  $E = 4\pi k\sigma$ 。这仍然是一方向与带电平面垂直的均匀电场。而在这两个平行带电平面的外部，则  $E = 0$ 。表明这两个平行带电平面的电场完全集中在它们之间的空间(图 7-6)。这正是平行板电容器为我们提供了均匀电场的缘故。

由以上几个例子可以看出，高斯定理的一个特殊用途在于计算具有某些特殊对称性的静电场的场强，这是很简捷的。在具体运用时，有何步骤，请读者从中总结。

### 第三节 电 势

前面我们讨论了静电场的力的性质；现在来讨论静电场的能的性质。

#### 一、静电场力所作的功

**1. 点电荷的静电场力对试探电荷作的功** 取一试探电荷  $q_0$  在场源点电荷  $+q$  的

静电场中由点 a 至点 b 移动(图 7-7)。由于在移动过程中  $q_0$  受到的静电场力是变力, 故可先计算在一段位移元  $d\mathbf{l}$  中场力所作的元功  $dA$ , 在此元段中可视场力不变, 于是有

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

那么在从点 a 至点 b 移动的全过程中, 场力作总功

$$A_{ab} = \int_a^b dA = \int_a^b q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b q_0 E \cos\theta dl$$

由图 7-7 可知,  $\cos\theta dl = dr$ , 且  $E = k \frac{q}{r^2}$ , 代入上式得

$$A_{ab} = kq_0q \int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{r^2} dr = kq_0q \left( \frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right) \quad (7-12)$$

式中的  $r_a$  与  $r_b$  分别表示场源  $+q$  到移动路径的起点 a 与终点 b 的距离。

2. 任意带电体系的静电场力对试探电荷作的功 对于任意带电体系的静电场, 可以看作是许多点电荷的场叠加的结果。根据场强叠加原理及式(7-12)可得该场对试探电荷  $q_0$  所作的功应为

$$A_{ab} = \sum_{i=1}^n A_{abi} = \sum_{i=1}^n \int_a^b q_0 \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = \sum_{i=1}^n kq_0q_i \left( \frac{1}{r_{ai}} - \frac{1}{r_{bi}} \right) \quad (7-13)$$

由于功有正、负之分, 所以式(7-13)是代数和式。

## 二、静电场的环路定理

1. 静电场的保守性 从式(7-12)与式(7-13)可以得到结论: 试探电荷在任意静电场中移动的过程中, 该电场力对它所作的功只与它的量值以及它移动的始、末位置有关, 而与所移动的具体路径无关。这是静电场的一个重要特性。它表明与重力、重力场一样, 静电力是保守力, 静电场是保守力场或有势场。

2. 静电场的环路定理 若将试探电荷  $q_0$  从静电场中某点出发经任意闭合路径  $L$ , 最后回到该点, 则在此过程中静电场力对  $q_0$  所作的总功应为零, 即

$$A_{aa} = \oint_L q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

但  $q_0 \neq 0$ , 因此必有

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (7-14)$$

上式表明在静电场中场强沿任意闭合路径的线积分总等于零。这一重要结论称为静电场的环路定理。它是静电场保守性的一种等价说法, 是与高斯定理并列的静电场的基本定理之一。高斯定理说明静电场是有源场, 环路定理说明静电场是有势场。由环路定理还可得出静电场的电场线不能闭合的结论。

## 三、电 势

1. 电势能 静电场与重力场同是保守力场, 与物体在重力场中具有重力势能一

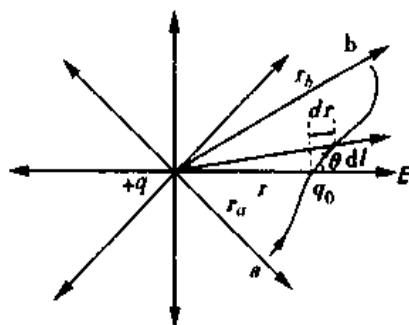


图 7-7 静电场力做功

样, 电荷在静电场中也具有电势能, 以  $W$  表示。电势能的改变是通过电场力对电荷所作的功来量度的, 因此有

$$W_a - W_b = A_{ab} = \int_a^b q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (7-15)$$

式中  $W_a$ 、 $W_b$  分别表示试探电荷  $q_0$  在起点  $a$ 、终点  $b$  的电势能。单位是焦耳。电势能是相对量。对于分布在有限区域的场源电荷, 通常规定无限远处电势能为零, 即  $W_\infty = 0$ , 于是试探电荷  $q_0$  在该场中  $a$  点所具有的电势能在量值上即等于  $q_0$  从  $a$  点移至无穷远处时电场力对其所作的功。

$$W_a = \int_a^\infty q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (7-16)$$

$W_a$  为正, 表明在此过程中电场力作正功, 反之表明电场力作负功。

式(7-16)表明电势能是由  $q_0$  与  $\mathbf{E}$  共同决定的, 它是试探电荷与静电场的相互作用能, 为双方所共有。

**2. 电势** 库仑力不能描述电场的力的性质, 同样地, 电势能不能用来描述电场的能量性质。为此引入电势, 并定义比值  $W_a/q_0$  为  $a$  点的电势, 以  $U_a$  表示。

$$U_a = \frac{W_a}{q_0} = \int_a^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^\infty E \cos\theta dl \quad (7-17)$$

显然, 电势仅由电场的性质所决定。上式还表明: 静电场中某一点的电势, 在量值上等于单位正试探电荷在该点的电势能, 也等于电场力从该点沿任意路径移动单位正试探电荷到零势能参考点所作的功, 或静电场中某一点的电势是由该点到参考点场强的线积分。

电势是表征静电场能量性质的物理量, 是由场源电荷决定的, 而与试探电荷的存在与否无关。这是与电势能不同的。电势是标量; 电势有正、负之分; 电势是相对量, 其量值大小与参考点的选择有关, 而参考点的选择本身是任意的, 一般选在无穷远处或地球等等, 这些又与电势能类似。在 SI 制中, 电势的单位是伏特,  $1V = 1J \cdot C^{-1}$ 。

**3. 电势差** 电场中两点间电势之差称为电势差或电压。

$$U_{ab} = U_a - U_b = \int_a^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - \int_b^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (7-18)$$

上式表明  $a$ 、 $b$  两点间的电势差就是场强由  $a$  点到  $b$  点的线积分, 在量值上等于将单位正试探电荷由  $a$  移到  $b$  时电场力所作的功。由此可见, 在一条电场线上没有电势相同的点。由于  $A_{ab} = q_0 \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ , 与式(7-18)比较, 则有静电场力的功与电势差之间的关系

$$A_{ab} = q_0 (U_a - U_b) \quad (7-19)$$

由此可见, 在静电场力的推动下, 正电荷将从电势高处向电势低处运动。应注意, 电势差与电势不同, 它是与参考点位置无关的绝对量。

#### 四、电势叠加原理

根据场强叠加原理, 可以得到对于任意带电体系的静电场在空间某点  $a$  的电势:

$$U_a = \sum_{i=1}^n \int_a^\infty \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = \sum_{i=1}^n U_{ai} \quad (7-20)$$

即任意带电体系的静电场中某点的电势等于各个电荷元单独存在时的电场在该点电势的代数和，这就是电势叠加原理。式(7-20)从原则上给出了求任意带电体系电场中电势的方法。

真空中一个孤立点电荷  $q$  的电场在距其  $r_a$  远处一点  $a$  的电势，可根据式(7-17)计算。由于积分路线可以任意选择，若沿电场线方向积分以使  $\theta = 0$ ，则  $d\mathbf{l} = dr$ ，同时注意到  $E = k \frac{q}{r^2}$ ，故有

$$U_a = \int_a^\infty E \cos\theta dl = k \int_{r_a}^\infty \frac{q}{r^2} dr = k \frac{q}{r_a} \quad (7-21)$$

显然，当场源电荷  $q$  为正时，其周围电场的电势为正；当  $q$  为负时，其周围电场的电势为负。式(7-21)表明，点电荷电场中电势是以点电荷为中心而呈球形对称分布的。这与从式(7-4)分析的结果一致，从不同角度揭示了点电荷电场的特征。

对于电荷连续分布的带电体，其周围电场中任意点的电势可由式(7-20)与(7-21)得到类似式(7-5)的公式

$$U = \int dU \text{ 或 } U = k \int \frac{dq}{r} \quad (7-22)$$

式中  $r$  是可视为点电荷的电荷元  $dq$  到场点的距离。

[例 7-2] 求均匀带电圆环轴线上任一点  $P$  的电势。已知圆环半径为  $a$ ，带电量为  $Q$ 。

解：我们可以由两种方法求得，第一种是以类似于[例 7-1]的方法由式(7-22)求解，将圆环等分为许多元段  $dl$ ，带电量  $dq$ ，由电势叠加原理得整个圆环在  $P$  点的电势

$$U_p = \int dU_p = \int_0^Q k \frac{dq}{r} = k \frac{Q}{r} = \frac{kQ}{(a^2 + x^2)^{1/2}}$$

或由  $dq = \frac{Q}{2\pi a} dl$ ，得

$$U_p = k \int_0^{2\pi a} \frac{Q}{2\pi a} \frac{1}{r} dl = k \frac{Q}{r} = \frac{kQ}{(a^2 + x^2)^{1/2}}$$

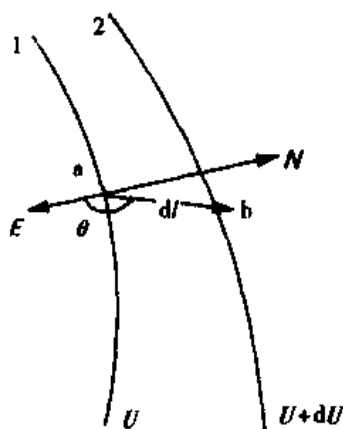
第二种方法是直接从定义式(7-17)计算。从[例 7-1]已知圆环轴线上场强的分布，且方向沿轴线  $OX$ ，于是可选择沿  $OX$  方向积分( $\cos\theta = 1$ )得

$$U_p = \int_p^\infty E \cos\theta dl = \int_x^\infty k \frac{Qx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} dx = \frac{kQ}{(a^2 + x^2)^{1/2}}$$

显然，两种方法解得的结果相同。在  $x = 0$ ，即圆环中心处的电势  $U = k \frac{Q}{a}$ ；在  $x \gg a$  处， $(a^2 + x^2)^{1/2} \approx x$ ，则有  $U = k \frac{Q}{x}$ ，即在远离圆环处可视圆环为一电荷集中于环心的点电荷，这与例 7-1 的结论一致。

## 五、电场强度与电势的关系

**1. 等势面** 静电场中由电势相等的点所连成的曲面，且规定任何两个相邻曲面间的电势差值相等，则这些曲面称为等势面。等势面形象地描绘了静电场中电势的分布状况，其疏密程度则表示电场的强弱。静电场的等势面有两个特点：第一，在静电场中沿等势面移动电荷，电场力做功为零。第二，等势面与电场线互相垂直。原因何在？请读者从本节所述自行论证。值得指出，电场中的电场线与等势面都不是真实存在，而是对电场的一种形象直观的描述。



**2. 场强与电势的关系** 场强与电势是从不同角度描述静电场性质的两个重要物理量，它们之间必有确定关系。电势的定义式(7-17)已给出了场强与电势之间的积分关系，现在我们来研究两者之间的微分关系。

在静电场中取两个非常靠近的等势面 1 与 2，且  $dU > 0$  (图 7-8)。在 a 处作等势面 1 的法线，且规定沿电势增高的方向为其正方向， $n_0$  为单位矢量。显然在 a 处沿  $n_0$  方向有最大的电势增加率  $dU/dn$ ，我们定义 a 处的电势梯度矢量，记作  $\text{grad}U$ 。

$$\text{grad}U = \frac{dU}{dn} n_0 \quad (7-23)$$

图 7-8 场强与电势的微分关系

设有一试探电荷  $q_0$  从电场中之 a 点移到 b 点，位移为  $dl$ 。在此范围内可认为场强  $E$  是不变的，那么在此过程中电场力对  $q_0$  所作的功

$$dA = q_0 E \cos\theta dl = q_0 (U_a - U_b) = -q_0 dU$$

于是可有

$$E_l = E \cos\theta = -\frac{dU}{dl}$$

式中  $E_l$  为场强  $E$  在位移方向上的分量。上式表明：静电场中某一点的场强在任意方向上的分量等于电势在该点沿该方向变化率的负值。由于电场线的方向与等势面的法线都垂直于等势面，故场强在等势面法线方向的分量即是场强，且应有

$$E = -\frac{dU}{dn} n_0 = -\text{grad}U \quad (7-24)$$

即静电场中各点的电场强度  $E$  等于该点电势梯度的负值。这就是场强与电势之间的微分关系。从中我们可以看到以下几点：第一，场强与电势的空间变化率相联系。在场强大的地方电势变化快，等势面密集。这也表明等势面的疏密程度反映了电场的强弱。第二，式(7-24)中的负号表示场强是沿等势面法线指向电势降落的方向。场强的单位  $\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$  正是由式(7-24)而来的。

由式(7-24)计算场强可避免复杂的矢量运算而只需解决好求电势分布函数对哪一个变量的导数问题。例如由点电荷的电势  $U = k \frac{q}{r}$  代入式(7-24)便可得到场强的大小：

$$E = \frac{dU}{dr} = -\frac{d}{dr} \left( k \frac{q}{r} \right) = k \frac{q}{r^2}。读者也可用此法由例 7-2 的结果去求解例 7-1。$$



## 第四节 电偶极子 电偶层

这一节将讨论对于人体生物电有着重要意义的一种典型电场——电偶极子的电场（例如原子、分子、心肌细胞等的电性质都可等效为电偶极子来描述），并着重研究其电势的分布特点。

### 一、电偶极子电场的电势

**1. 电偶极子及其电偶极矩** 两个相距很近的等量异号点电荷  $+q$  与  $-q$  所组成的带电系统称为电偶极子。所谓“相距很近”是指这两个点电荷之间的距离比起要研究的场点到它们的距离是足够小的。从电偶极子的负电荷作一矢径  $l$  到正电荷，称为电偶极子的轴线。我们将电偶极子中的一个电荷的电量与轴线的乘积定义为电偶极子的电偶极矩，简称电矩。写作：

$$P = ql \quad (7-25)$$

$P$  是矢量，它是表征电偶极子整体电性质的重要物理量。

**2. 电偶极子电场中的电势** 设电场中任一点  $a$  到  $+q$  与  $-q$  的距离分别是  $r_1$  与  $r_2$ （如图 7-9），则两点电荷在  $a$  点产生的电势分别是  $U_1 = k \frac{q}{r_1}$ ， $U_2 = -k \frac{q}{r_2}$ ，根据电势叠加原理， $a$  点的总电势应是

$$U = U_1 + U_2 = kq \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = kq \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

设  $r$  为电偶极子轴线中心到  $a$  点的距离，根据电偶极子的定义知  $r_1 \gg l$ ， $r_2 \gg l$ ， $r \gg l$ ，故可认为， $r_1 r_2 \approx r^2$ ， $r_2 - r_1 \approx l \cos \theta$ 。代入上式可得

$$U = kq \frac{l \cos \theta}{r^2} = k \frac{P \cos \theta}{r^2} \quad (7-26a)$$

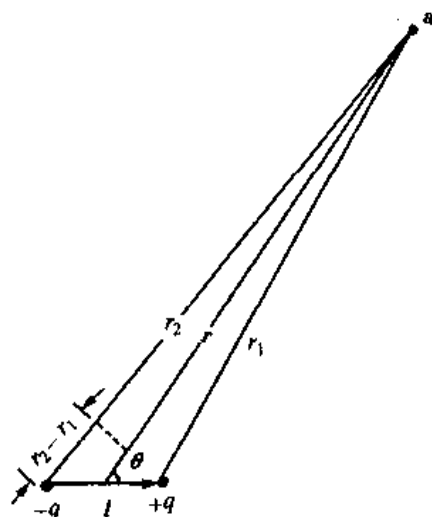


图 7-9 电偶极子电场中的电势

若令  $r_0$  为从电偶极子中心指向场点  $a$  的单位矢量，则

$$U = k \frac{P \cdot r_0}{r^2} = k \frac{P}{r^2} \cos \theta \quad (7-26b)$$

显然， $\theta$  角是  $P$  与  $r$  的夹角。上式表明：第一，电偶极子电场中的电势与电矩成正比。说明电矩是表征作为场源的电偶极子整体电性质的物理量，它决定着电偶极子电场的性质。第二，电偶极子电场中电势的分布与方位有关。以电偶极子轴线的中垂面为零势面而将整个电场分为正、负两个对称的区域，正电荷所在一侧为正电势区；负电荷所在一侧为负电势区。这种分布特点在实践中是很有用的。

**3. 电偶极子电场中的场强** 电偶极子电场中场强的一般分布是比较复杂的，现介绍电偶极子轴线延长线上的场强。根据点电荷的场强公式可判断在电偶极子轴线延

长线上的场强是沿  $r$  方向的, 且  $\theta = 0$ ,  $U = k \frac{P}{r^2}$ 。由式(7-24)得  $E = -\frac{dU}{dr} = -\frac{d}{dr} \left( k \frac{P}{r^2} \right) = k \frac{2P}{r^3}$ 。显然,  $E$  与  $P$  同方向, 故可写成矢量式  $E = k \frac{2P}{r^3}$ 。读者可试求电偶极子轴线中垂面上的场强  $E = -k \frac{P}{r^3}$ 。

从对上述两区域的分析, 可知电偶极子电场的场强分布有如下特点: 场强与电矩成正比, 再次说明是电偶极矩决定着电偶极子的电场性质。无论从电势, 还是从场强的分布来看, 都反映一个共同的特点, 即电偶极子的电场比点电荷的电场衰减得快。两者是完全不同的电场。

## 二、电 偶 层

在生物体中, 电偶层是经常遇到的一种电荷分布。所谓电偶层是指相距很近、互相平行且带有等值异号的电荷面密度的两个带电表面。计算电偶层中任一点上的电势

如果整个电偶层上层矩  $\tau$  都相等, 则式(7-27)可写成

$$U_a = k\tau \int d\Omega = k\tau\Omega \quad (7-28)$$

式中  $\Omega$  为各面积元对  $a$  点所张立体角的代数和。式(7-28)表明: 均匀电偶层在某点产生的电势只决定于层矩  $\tau$  与电偶层对该点所张立体角  $\Omega$ , 而与电偶层的形状无关。

人体中存在着电偶层构成的闭合曲面, 先考虑电偶层均匀的情况。例如, 内面都带负电, 外面都带正电, 心肌细胞静息时就属于这种情况。由式(7-28)可知, 膜外空间各点电势为零, 而膜内空间各点的电势为  $-4\pi k\tau$ 。分别如图 7-11 中之  $a$  点与  $b$  点。如闭合曲面电偶层不均匀, 或其同一面的不同部分带有异号电荷, 则其闭合电偶层外部空间各点的电势一般不为零。心肌细胞的除极过程和复极过程就属于这种情况, 此时膜内外电势差的值与静息时不同。

## 第五节 静电场中的电介质

### 一、电介质的极化

电介质就是绝缘体, 这类物质在原子结构上的特点是原子核与绕核的电子之间的相互作用力大, 束缚紧密, 以致使电介质内部几乎没有可以自由移动的电荷, 在外电场的作用下也几乎不能导电。

电介质分子中的正、负电荷总和是相等的。因此, 就整个分子的电性质而言, 可将一个分子等效为一个电偶极子, 称其为分子的等效电偶极子, 它的电偶极矩称为分子电矩  $P$ 。电介质的分子可分为两类, 一类由于负电荷对称地分布在正电荷周围, 结果等效电偶极子中的两个等效点电荷位置重合, 例如  $\text{He}$ 、 $\text{H}_2$ 、 $\text{N}_2$ 、 $\text{CH}_4$ 、 $\text{CO}_2$  等, 它们的分子电矩为零, 称为无极分子。另一类由于负电荷的分布对于正电荷并不对称, 结果等效电偶极子中的两个等效点电荷位置不相重合, 例如,  $\text{HCl}$ 、 $\text{H}_2\text{O}$ 、 $\text{CO}$ 、 $\text{SO}_2$ 、 $\text{H}_2\text{S}$ 、 $\text{NH}_3$ 、 $\text{CH}_3\text{OH}$  等, 它们的分子电矩(称为分子的固有极矩)不为零, 故称为有极分子。这一类分子的电矩虽然不为零, 但由于所有分子都处在无规则的热运动中, 因此从电介质整体或从其中任一宏观微小体积来看, 其内部分子电矩的矢量和平均为零。这样, 从宏观来看, 这两类分子构成的电介质内均有  $\sum P_i = 0$ 。

现在我们来讨论静电场对电介质的作用。首先介绍两个概念: 第一, 束缚电荷, 即在物体内部不能自由移动且不能用传导的方法移动的电荷。第二, 电介质的极化, 即在外电场作用下各向同性均匀电介质的表面(垂直于外电场方向的端面)出现束缚电荷的现象。对于无极分子, 由于外电场的作用使两个等效点电荷分别受到方向相反的力, 其位置不再重合而错开。分子电矩不再是零, 且与外电场方向一致, 结果在垂直于外电场方向的介质端面上出现束缚电荷。这种极化称为位移极化, 如图 7-12。此时  $\sum P_i \neq 0$ 。对于有极分子, 由于外电场力矩的作用, 每个分子的固有极矩都要在一定程度上转向外电场的方向排列。结果在垂直于外电场方向的介质端面上也出现束缚电荷。这种极化称为取向极化, 如图 7-13。此时  $\sum P_i \neq 0$ 。显然, 分子的热运动是阻碍

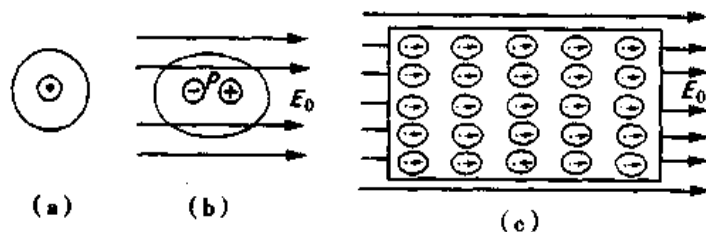


图 7-12 无极分子位移极化示意图

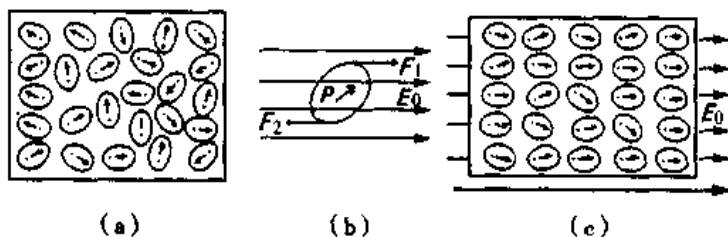


图 7-13 有极分子取向极化示意图

有极分子这种有序排列的，所以温度对取向极化的强弱是有影响的。

可见，电介质极化就是使分子电矩沿外电场方向取向或增大的过程。这两类极化的微观过程虽然不同，但宏观结果却是相同的。所以在对电介质的极化作宏观描述时，就无需再区分这两类极化了。当外电场撤消后，这种极化现象也就随之消失。为描述电介质的极化程度，取单位体积内分子电矩的矢量和  $P = \Sigma P_i / \Delta V$ ，定义为电极化强度矢量，在 SI 制中  $P$  的单位是  $C \cdot m^{-2}$ 。若电介质中各处的  $P$  都相同，则称其为均匀极化。 $P$  的取值由该处场强与电介质性质决定，在各向同性均匀介质中有

$$P = \chi_e \epsilon_0 E \quad (7-29)$$

式中  $\chi_e$  称为介质的电极化率。

## 二、电介质中的静电场

静电场对电介质作用的结果是出现极化现象。那么，被极化的电介质反过来又对静电场发生什么影响呢？现在我们来讨论较简单的均匀电介质对静电场影响的效果问题。

如前所述，当均匀电介质在外电场  $E_0$  作用下极化时，在垂直于  $E_0$  方向的两个端面将分别出现均匀分布的正、负束缚电荷层。它们在电介质内部也将产生一个电场，称为极化电场，写作  $E_p$ 。于是，在电介质内部的总电场应是这两者的矢量和  $E = E_0 + E_p$  (图 7-14)。在均匀外电场中，这三个矢量互相平行，可写成  $E = E_0 - E_p$ 。若图中两平行带电板间距为  $d$ ，其间的两层束缚电荷可视为一系列均匀排列的电偶极子，其电矩总和为  $\sigma' S d$ ，由电极化强度定义可知

$$P = \frac{\Sigma P_i}{\Delta V} = \frac{\sigma' S d}{S d} = \sigma' \quad (7-30)$$

代入上式  $E = E_0 - \frac{\sigma'}{\epsilon_0} = E_0 - \frac{P}{\epsilon_0} = E_0 - \frac{\chi_e \epsilon_0 E}{\epsilon_0} = E_0 - \chi_e E$

经整理得  $E = \frac{1}{1 + \chi_e} E_0$

令  $1 + \chi_e = \epsilon_r$ , 代入上式并注意到矢量的方向得

$$E = \frac{1}{\epsilon_r} E_0 \quad (7-31)$$

上式表明：同样的场源电荷在各向同性均匀电介质中产生的场强减弱为在真空中产生的场强的  $1/\epsilon_r$ ，这一结果正是电介质极化后对原电场产生影响所造成的。需要指出的是，式(7-31)虽然仅适用于各向同性的均匀电介质充满整个静电场的情形，但“减弱”的影响对于各种电介质却是普遍存在的。

式(7-31)中比例系数  $\epsilon_r$  称为相对介电常量，它与  $\chi_e$  之间的关系是

$$\epsilon_r = 1 + \chi_e \quad (7-32)$$

显然，它们具有相同的物理意义，都是表征电介质在外电场中的极化性质的物理量。其值越大，表明电介质极化越强，对原电场削弱越厉害。它们都是无单位的纯数。在真空中  $\epsilon_r = 1$ 。对于气体，由于密度小，它的极化对外电场产生的影响很小，其  $\epsilon_r$  值接近于 1。对于固体和液体，其  $\epsilon_r$  值比 1 大很多。表 7-1 给出了一部分电介质(也包括人体组织)的相对介电常量的值。

表 7-1 某些电介质的相对介电常量

| 电 介 质    | 温度(°C) | $\epsilon_r$ |
|----------|--------|--------------|
| 真空       |        | 1            |
| 空气(1atm) | 20     | 1.00059      |
| 纯水       | 25     | 78           |
|          | 80     | 61           |
| 二氧化钛     | 20     | 100          |
| 脂肪       |        | 5~6          |
| 骨        |        | 6~10         |
| 皮肤       |        | 40~50        |
| 血液       |        | 50~60        |
| 肌肉       |        | 80~85        |
| 神经膜      | 37     | 7~8          |

对于有极分子构成的电介质，由于其取向极化与分子热运动有关，所以这一类电介质的  $\epsilon_r$  值随温度的升高而减少。而无极分子构成的电介质之  $\epsilon_r$  值则几乎与温度无关。在均匀电介质中各处的  $\epsilon_r$  值都相同。

为了简化公式，今令  $\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \quad (7-33)$

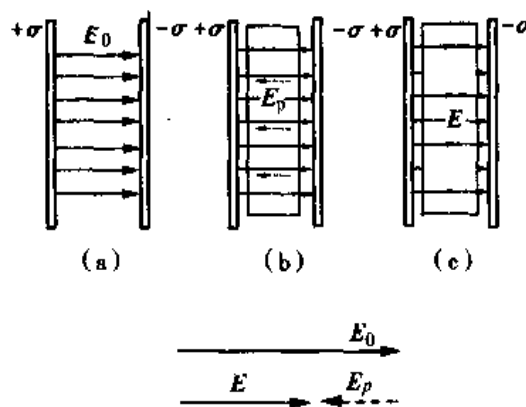


图 7-14 均匀电介质中的静电场

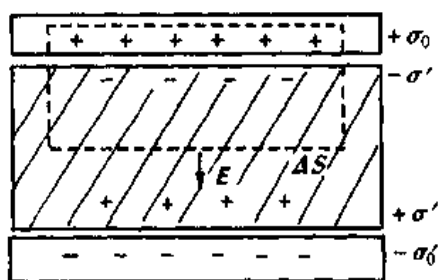
将其称为介电常量，它的单位与  $\epsilon_0$  相同。引入它可使充有电介质的静电场公式得到简化。例如充有均匀电介质的平行板电容器中的场强  $E = \frac{1}{\epsilon_r \epsilon_0} \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{\sigma}{\epsilon}$  等等。还应该指出的是式(7-32)与式(7-33)所表达的关系是普遍成立的。

### 三、电位移 有电介质时的高斯定理

当有电介质存在时，高斯定理仍然成立。计算高斯面所包围的电荷时应包括自由电荷  $q_0$  与束缚电荷  $q'$ ，即

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_i = \frac{1}{\epsilon_0} (\sum q_{0i} + \sum q'_{i'}) \quad (7-34)$$

然而在解决具体问题时，束缚电荷难以确定，为此对式(7-34)作如下变换处理。



以两平行带电金属板间充以电介质为例。如图 7-15 作虚线所示的封闭柱形高斯面  $S$ ，其底面与带电平板平行，面积为  $\Delta S$ 。由式(7-34)得

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} (\sigma_0 \Delta S - \sigma' \Delta S) = \frac{1}{\epsilon_0} (\sigma_0 - \sigma') \Delta S \quad (7-35)$$

由于  $E = E_0 - \frac{P}{\epsilon_0}$

所以  $P = \epsilon_0 (E_0 - E) = (\epsilon - \epsilon_0) E_0$

图 7-15 有电介质时的高斯定理的推导

写成矢量形式，并令电位移矢量

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon \mathbf{E} \quad (7-36)$$

则式(7-35)左边可写为  $\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon} \oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$ 。又由  $E = \frac{\sigma_0 - \sigma'}{\epsilon_0} = \frac{E_0}{\epsilon_r} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_r \epsilon_0} = \frac{\sigma_0}{\epsilon}$ ，

即  $\frac{\sigma_0 - \sigma'}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_0}{\epsilon}$ ，则式(7-35)右边可写为  $\frac{1}{\epsilon_0} \Delta S (\sigma_0 - \sigma') = \frac{1}{\epsilon} \Delta S \sigma_0$ 。故将以上变换，即引入  $\mathbf{D}$  后式(7-35)可写为

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \Delta S \sigma_0$$

式中  $\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$  称通过高斯面  $S$  的电位移通量， $\Delta S \sigma_0$  则正是高斯面  $S$  所包围之自由电荷的代数和，一般情况下以  $\sum q_{0i}$  表示，则上式可写成

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum_{i=1}^n q_{0i} \quad (7-37)$$

此式表明通过任意闭合曲面的电位移通量等于该闭合曲面所包围的自由电荷的代数和。这就是有电介质时的高斯定理，也称  $\mathbf{D}$  的高斯定理。虽然是从特例中导出，但它是普遍成立的，即使在变化的电磁场中仍然如此。它是电磁学的基本规律之一。由于通过闭合曲面的电位移通量只与面内的自由电荷有关，而与束缚电荷无关，故可根据自由电荷以及  $\mathbf{D}$  矢量分布的对称性由此求出  $\mathbf{D}$  后再由式(7-36)求出  $\mathbf{E}$  以及  $\mathbf{P}$  和  $\sigma'$ 。

## 四、电容器及其电容

能储存电量、彼此绝缘而又靠近的导体系统称为电容器。电容器经过充电后使两板分别带等量异号的电量  $+Q$  与  $-Q$ ，它们之间形成电势差  $U_{AB}$ ，其大小与电量  $Q$  成正比，比值定义为电容器的电容，写作  $C$

$$C = \frac{Q}{U_{AB}} \quad (7-38)$$

在 SI 制中电容的单位是法拉。电容器是储存电量的装置，而电容则是表征电容器储存电量能力的物理量。对于平行板电容器有

$$C = \frac{\epsilon S}{d} \quad (7-39)$$

上式表明电容器的电容  $C$  与两极板的相对面积  $S$  成正比，而与两极板之间的距离  $d$  成反比。因此，电容器的电容值仅决定于电容器本身的结构(形状、大小)与两极板之间的电介质。一个电容器，在其两极板间放入电介质之后的电容  $C = \epsilon S/d$  和放入之前的电容  $C_0 = \epsilon_0 S/d$  的比值为  $\epsilon_r$ 。这正是在实践中测量  $\epsilon_r$  值所依据的原理。也表明在两极板间加入电介质后，电容将增大  $\epsilon_r$  倍。

## 五、静电场的能量

由于同种电荷间存在斥力，任何带电体系的建立过程，都必然是外力克服电荷之间相互作用力而做功的过程。同时在这一过程中某种外部形式的能量将转换为带电体系的能量。因此，任何带电体系都具有一定的能量。由于静电场力做功与路径无关，这一能量具有势能的性质。下面以电容器为例来讨论这一能量如何计算以及储存在何处。

**1. 带电电容器的能量** 一个电容器的能量可以用在整个放电过程中电场力所作的功来量度。在此做功过程中两极板间的电势差逐渐降低，同时电容器的能量将逐渐释放。当两极板间电势差为  $u_{AB}$ ，电场力将正电荷  $dq$  由正极板移至负极板时，电场力所作元功  $dA = u_{AB}dq = -dW$ ，但  $u_{AB} = q/C$ ，代入上式有  $dW = -\frac{q}{C}dq$ 。那么，对于放电的全过程，电容器释放的总能量，即放电前所储存的能量应为

$$\left. \begin{aligned} W &= \int dW = -\frac{1}{C} \int_0^Q q dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \\ \text{或 } W &= \frac{1}{2} CU_{AB}^2 = \frac{1}{2} QU_{AB} \end{aligned} \right\} (7-40)$$

式中  $Q$  与  $U_{AB}$  分别为放电开始前任一极板所带的总电量与两极板之电势差。从式中还可看出，当两个电容器的极板间电势差相等时，电容器储存的能量与其电容成正比，说明电容  $C$  是表征电容器存储能量本领的物理量。无论电容器的结构如何，式(7-40)的结论总是正确的。

**2. 静电场的能量与能量密度** 电容器充电以后具有电能，那么这些能量是储存在电容器极板上，还是储存在极板之间的电场中？为此，我们继续分析上述的能量公

式。

由于  $E = \frac{Q}{\epsilon S}$ , 移项得  $Q = \epsilon SE$ , 且  $U_{AB} = Ed$ , 代入式(7-40)得

$$W = \frac{1}{2} QU_{AB} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 (Sd)$$

令电容器两极板间空间的体积  $Sd = V$ , 若不考虑边缘效应,  $V$  即电容器电场所占有的体积, 代入上式

$$W = \frac{1}{2} \epsilon E^2 V \quad (7-41)$$

上式表明电容器的能量与场强的平方及电场的体积成正比。这说明电能  $W$  是电场所具有, 并储存在电场中, 而不是集中在极板上的场源电荷处。所谓带电体系的能量或电容器的能量, 实质上是这一体系所建立的电场的能量。虽然式(7-39)与(7-41)只适用于均匀电场, 但以上结论对于任何电场都是普遍成立的。

单位体积电场的能量称为电场的能量密度, 以  $w_e$  表示

$$w_e = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \quad (7-42)$$

上式虽然是从均匀电场导出的, 但可以证明它是普遍适用的。它表明电场的能量密度仅仅与电场中的场强及电介质有关, 而且是点对点对应的关系。这进一步说明电场是电能的携带者。

在静电场中电场总是伴随着场源电荷同时存在的, 我们说能量是属于电荷还是属于电场似乎没有什么区别。在变化的电磁场中, 由于电磁波是可以脱离场源电荷而存在的, 即当场源电荷不存在时, 电场还存在, 能量也存在, 因此, 电场具有能量的观点是在电磁波被发现以后, 证明了电磁能量可脱离场源而以波的形式传播时才得到最终确认的。能量是物质的固有属性, 电场能量的存在是电场物质性的重要证明。

对于非均匀电场, 其能量密度是随空间各点而变化的。若欲计算某一区域中的电场能量, 则需用积分的方法。

$$W = \int_V w_e dV = \int_V \frac{1}{2} \epsilon E^2 dV \quad (7-43)$$

[例 7-3] 一平行板空气电容器的极板面积为  $S$ , 间距为  $d$ , 充电后两板上分别带电量  $+Q$  与  $-Q$ 。断开电源后再将两极板的距离匀速地拉开到  $2d$ 。求: (1) 外力克服两极板相互引力所作的功; (2) 两极板间的相互吸引力。

解: (1) 外力匀速地拉动极板, 任一板上所受到的合力应为零, 故外力仅仅用于克服两极板间引力而作功。根据功能原理, 此功应等于电容器能量的增加。

电容器在极板被拉开前、后的能量应分别是  $W_1 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_1}$ ,  $W_2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_2}$ , 但  $C_1 = \epsilon_0 \frac{S}{d}$ ,  $C_2 = \epsilon_0 \frac{S}{2d}$ , 代入上式则有外力所作的功  $A_{外} = W_2 - W_1 = \frac{1}{2} \frac{dQ^2}{\epsilon_0 S}$ 。

(2) 由于电容器两极板间是均匀电场, 故两极板间的相互吸引力  $F_{电}$  是常力, 且大小应与外力相等。今有  $A_{外} = F_{外} d$ , 所以  $F_{电} = F_{外} = \frac{A_{外}}{d} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_0 S} = \frac{1}{2} \frac{\sigma Q}{\epsilon_0}$ 。



对于这一问题，还有另一种解法：两极板的相互作用力也就是一个极板在另一个极板的电场中所受到的力，根据场强的定义式可知：

$$F_{\text{电}} = QE = Q \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

此力的方向显然表现为引力。可以看到，两种解法的结果是一致的。

[例 7-4] 球形电容器两极板分别充电至  $\pm Q$ ，内、外半径为  $R_1$ 、 $R_2$ ，两极板间充满介电常量为  $\epsilon$  的电介质，试计算此球形电容器内电场所储存的能量(图 7-16)。

解：球形电容器的电场只集中在两极板之间，且不是均匀电场，但具有球对称性，利用高斯定理可求得其场强为

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r^2} \quad (R_1 < r < R_2)$$

在半径为  $r$  处的球面上能量密度相同。

$$w_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{\epsilon}{2} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r^2} \right)^2 \quad (R_1 < r < R_2)$$

故处在半径为  $r$  与  $r + dr$  两球面之间电场的能量：

$$dW = w_e dV = w_e 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon r^2} dr$$

由此根据式(7-43)得电容器电场之总能量

$$\begin{aligned} W &= \int dW = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q^2}{8\pi\epsilon r^2} dr \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}} \end{aligned}$$

如果我们利用球形电容器的电容公式  $C = 4\pi\epsilon \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$  代入电容器的能量公式(7-40)，也可得到与上述计算相同的结果

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} Q^2 / \left( 4\pi\epsilon \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \right)$$

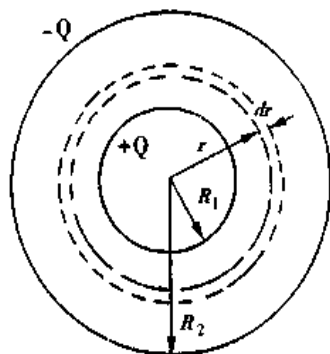


图 7-16 例 7-4

## 第六节 心电知识

### 一、心电场

1. 心肌细胞的电偶极矩 心脏的跳动是由心壁肌肉有规律收缩产生的，而这种有规律的收缩又是电信号在心肌纤维传播的结果。心肌纤维是由大量心肌细胞组成的，讨论心脏的电学性质就必然要从心肌细胞入手。心肌细胞与其他可激细胞一样，当处于静息状态时，在其膜的内、外两侧分别均匀聚集着等量的负、正离子，形成一

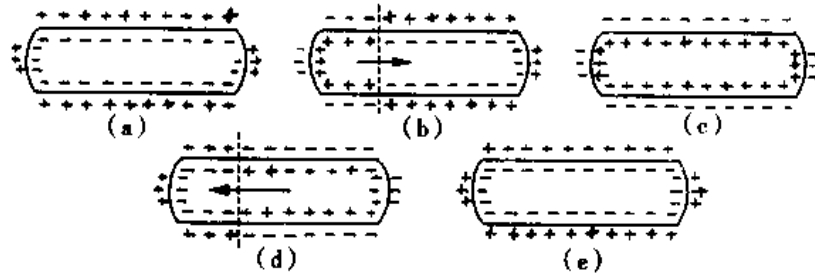


图 7-17 心肌细胞的电学模型

均匀的闭合曲面电偶层。因此，在无刺激时心肌细胞是一个中性的带电体系，对外不显示电性，即外部空间各点的电势为零。这一状态在医学上称为极化，如图 7-17 (a)。当心肌细胞受到某种刺激(可以是电的、化学的、机械的等)时，由于细胞膜对离子通透性的改变，致使膜两侧局部电荷的电性改变了符号，膜外带负电，膜内带正电。于是细胞整体的电荷分布不再均匀而对外显示出电性。此时正、负离子的电性可等效为两个位置不重合的点电荷，而整个心肌细胞类似一个电偶极子，形成一个电偶极矩。刺激在细胞中传播时这个电矩是变化的，这个过程称为除极，如图 7-17 (b)。当除极结束时，整个细胞的电荷分布又是均匀的，对外不显电性，如图 7-17 (c)。当除极出现之后，细胞膜对离子的通透性几乎立即恢复原状，即紧随着除极将出现一个使细胞恢复到极化状态的过程，这一过程称复极。复极的顺序与除极相同，先除极的部位先复极。显然，这一过程中形成一个与除极时方向相反的变化电矩，如图 7-17 (d)，心肌细胞对外也显出电性。当复极结束时，整个细胞恢复到极化状态，又可以接受另一次刺激，如图 7-17 (e)。从上述内容可以看出，在心肌细胞受到刺激以及其后恢复原状的过程中，将形成一个变化的电偶极矩，在其周围产生电场，并引起空间电势的变化。

**2. 心电偶的电性质及其描述** 在某种刺激下，一个心肌细胞会出现除极与复极。同样，对于大量心肌细胞组成的心肌、乃至整个心脏也出现除极与复极。因此，我们在研究心脏电性质时，可将其等效为一个电偶极子，称为心电偶。它在某一时刻的电偶极矩就是所有心肌细胞在该时刻的电偶极矩的矢量和，称为瞬时心电向量。心电偶在空间产生的电场称心电场。

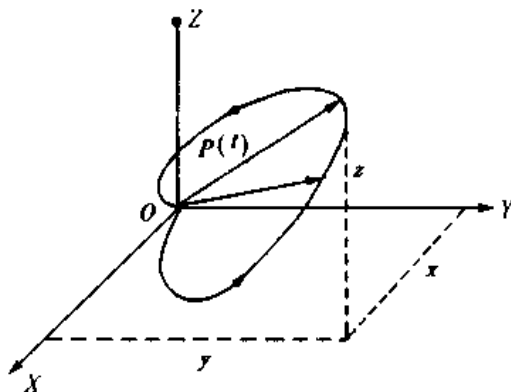


图 7-18 空间心电向量环

瞬时心电向量是一个在方向、大小上都随时间作周期性变化的矢量。我们对其箭头的坐标按时间、空间的顺序加以描记、连接成轨迹，则此轨迹称为空间心电向量环。它是瞬时心电向量的箭头随时空变动的三维空间曲线(箭尾收在一点)，描述了瞬时心电向量随时空变化的规律(图 7-18)。空间心电向量环在某一平面上的投影称为平面心电向量环。

## 二、心电图

由空间心电图向量环可以看到，心脏在空间所建立的电场是随时间作周期性变化的。任一瞬时，在空间两点(例如人体表面不同的两点左臂与右臂)的电势差或电压是确定且可测量的(图 7-19)，显然，这一测量值是随时间周期变化的。于是我们可以根据人体表面两点间的电压描绘出一条曲线，这种曲线就称为心电图，如图 7-20 所示。由于心电场的电势分布有正势区、负势区，故心电图波形有时为正值，有时为负值。

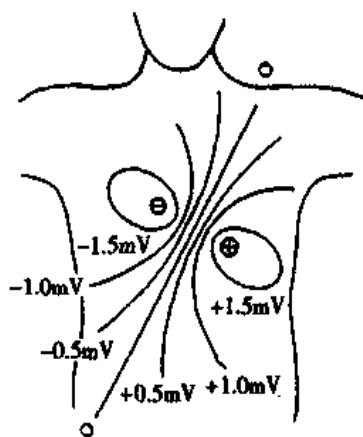


图 7-19 人体表面的瞬时电位分布

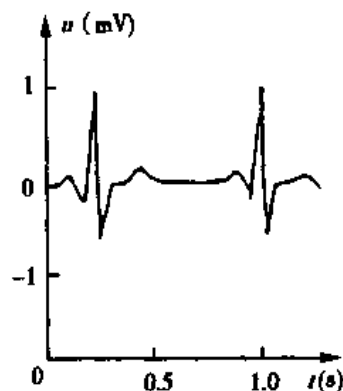


图 7-20 心电图

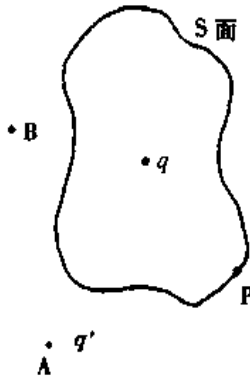
## 三、心电图导联

通过电极引导体表电势(电位)与心电图机相连接的电路称为心电图导联。直接取出体表两点间电压加以显示的导联称为标准导联或双极导联。由于电压曲线取决于两点的电位变化，由所显示的心电曲线不能确定是哪一个电极的电位变化，而临床医生常需观察体表一点电位的变化。为此需使一个电极处的电位不变或变化很小，这样测得的电压曲线就只反映另一个电极(探查电极)处电位的变化。满足这一要求的导联称为单极肢体导联。其方法是根据距离电偶极子中心等距离对称三点之电位的代数和为零的道理设计一中心电端，即将安于人体左上肢、右上肢、左下肢三处的电极用导线联接在一起而构成。由于人体并非均匀的容积导体，三个电极处对于心电偶也并非对称等距，为此在三个电极与中心电端之间的连线中分别串接入一高电阻，于是中心电端的电位就接近于零，在临床上即作为体外零电位端。将心电图机的一个电极与此中心电端相接，而探查电极即可测得该电极探测处体表的电位变化。为了增大心电波形的幅值以易于观察而设计有加压导联。如将探查电极置于胸前，则是单极胸导联。

心电图的波形反映心肌传导功能是否正常，广泛用于心脏疾病的诊断。例如，心电图可能存在着心肌传导阻滞的异常信号。若正常的窦房结信号没有传递到心室中，那么，来自房室结的冲动将以 30~50 次/秒的频率控制心跳，其值比正常人的心跳频率(70~80 次/秒)低得多。由于这类心肌传导阻滞可能使病人半残废，埋入一个心脏起搏器就能使病人维持适当的正常生活。心电图通常是由心电图或心脏科的医生来解释，现在也可用计算机分析心电图，还可从示波器荧光屏上连续地显示和监视心电图。

## 思考题与习题七

7-1 如图所示的闭合曲面  $S$  内有一点电荷  $q$ ,  $P$  为  $S$  面上的任一点, 在  $S$  面外有一电荷  $q'$  与  $q$  的符号相同。若将  $q'$  从  $A$  点沿直线移到  $B$  点, 则在移动过程中:



- A.  $S$  面上的电通量不变;
- B.  $S$  面上的电通量改变,  $P$  点的场强不变;
- C.  $S$  面上的电通量改变,  $P$  点的场强改变;
- D.  $S$  面上的电通量不变,  $P$  点的场强也不变。 (A)

7-2 在一橡皮球表面上均匀地分布着正电荷, 在其被吹大的过程中, 有始终处在球内的一点和始终处在球外的一点, 它们的场强和电势将作如下的变化:

- A.  $E_{内}$  为零,  $E_{外}$  减小,  $U_{内}$  不变,  $U_{外}$  增大;
- B.  $E_{内}$  为零,  $E_{外}$  不变,  $U_{内}$  减小,  $U_{外}$  不变;
- C.  $E_{内}$  为零,  $E_{外}$  增大,  $U_{内}$  增大,  $U_{外}$  减小;
- D.  $E_{内}$ ,  $E_{外}$ ,  $U_{内}$ ,  $U_{外}$  均增大。 (B)

图 7-21 习题 7-1

7-3 设在  $XY$  平面内的原点  $O$  处有一电偶极子, 其电偶极矩  $P$  的方向指向  $Y$  轴正方向, 大小不变, 问在  $X$  轴上距原点较远处任意一点的电势与它离开原点的距离呈什么关系?

- A. 正比;    B. 反比;    C. 平方反比;    D. 无关系。 (D)

7-4 如果已知给定点处的  $E$ , 你能否算出该点的  $U$ ? 如果不能, 还必须进一步知道什么才能计算?

7-5 在真空中有板面积为  $S$ , 间距为  $d$  的两平行带电板 ( $d$  远小于板的线度) 分别带电量  $+q$  与  $-q$ 。有人说两板之间的作用力  $F = k \frac{q^2}{d^2}$ ; 又有人说因为  $F = qE$ ,  $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0 S}$ , 所以  $F = \frac{q^2}{\epsilon_0 S}$ 。试问这两种说法对吗? 为什么?  $F$  应为多少?

7-6 带电电容器储存的电能不能由什么决定? 电场的能量密度与电场强度之间的关系是怎样的? 怎样通过能量密度求电场的能量?

7-7 试求无限长均匀带电直线外一点 (距直线  $R$  远) 的场强, 设电荷的线密度为  $\lambda$ 。

$$\left( E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R}, \text{ 方向垂直于带电直线, } \lambda > 0 \text{ 时, } E \text{ 指向外, } \lambda < 0 \text{ 时, } E \text{ 指向带电直线} \right)$$

7-8 一长为  $L$  的均匀带电直线, 电荷线密度为  $\lambda$ 。求在直线延长线上与直线近端相距  $R$  处  $P$  点的电势与场强。 [ $U = k\lambda \ln \frac{L+R}{R}$ ;  $E = k\lambda \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{L+R} \right)$ ,  $\lambda$  为正时, 则方向沿带电直线经  $P$  指向外,  $\lambda$  为负时, 则方向相反]

7-9 一空气平行板电容器  $C = 1.0 \mu\text{F}$ , 充电到电量  $q = 1.0 \times 10^{-5} \text{C}$  后, 将电源切断, 求:

- (1) 两极板间的电势差和此时的电场能; ( $1 \times 10^7 \text{V}; 50 \text{J}$ )
- (2) 若将两极板的距离增加 1 倍, 计算距离改变前后电场能的变化, 并解释其原因。(50J)

7-10 试计算均匀带电圆盘轴上任一点  $P$  处的场强。设  $P$  点距盘心  $O$  为  $x$ , 盘之半径为  $R$ , 电荷的面密度为  $+\sigma$ 。并讨论当  $R \ll x$  (提示:  $[1 + \frac{R^2}{x^2}]^{-\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{R^2}{x^2}$ ) 和  $R \gg x$  时  $P$  点的场强将如何?

$$\left( E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + R^2/x^2}} \right] \right)$$

7-11 有一均匀带电的球壳, 其内、外半径分别是  $a$  与  $b$ , 电荷的体密度为  $\rho$ 。试求从中心到球壳外各区域的场强。

$$\left[ E=0, (r < a); E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left( r - \frac{a^3}{r^2} \right) (a < r < b); E = \frac{\rho}{3\epsilon_0 r^2} (b^3 - a^3) (r > b) \right]$$

7-12 在真空中有一无限长均匀带电圆柱体, 半径为  $R$ , 电荷体密度为  $+\rho$ 。另有一与其轴线平行的无限大均匀带电平面, 电荷面密度为  $+\sigma$ 。今有 A、B 两点分别距圆柱体轴线为  $a$  与  $b$  ( $a < R, b > R$ ), 且在过此轴线的带电平面的垂直面内。试求 A、B 两点间的电势差  $U_A - U_B$  (忽略带电圆柱体与带电平面的相互影响)。

$$\left( \frac{1}{2\epsilon_0} \left[ \frac{\rho}{2} (R^2 - a^2) + \rho R^2 \ln \frac{b}{R} - \sigma (b - a) \right] \right)$$

7-13 一个电偶极子的  $l = 0.02\text{m}$ ,  $q = 1.0 \times 10^{-6}\text{C}$ , 把它放在  $1.0 \times 10^5 \text{N} \cdot \text{C}^{-1}$  的均匀电场中, 其轴线与电场成  $30^\circ$  角, 求外电场作用于该偶极子的库仑力与力矩。

$$(F = 0, M = 1 \times 10^{-3} \text{N} \cdot \text{m})$$

7-14 试证明在距离电偶极子中心等距离对称之三点上, 其电势的代数和为零。

7-15 一空气平行板电容器在充电后注入石蜡。(一)石蜡注入前电容器已不与电源相接; (二)石蜡注入时电容器仍与电源相接; 试比较在以上两种情况下该电容器内各量的变化情况, 并填入表 7-2 中。

表 7-2 习题 7-15

|               | (一) | (二) |
|---------------|-----|-----|
| 电量 $Q$        |     |     |
| 场强 $E$        |     |     |
| 电压 $\Delta U$ |     |     |
| 电容 $C$        |     |     |
| 场能密度 $w_e$    |     |     |

7-16 平行板电容器的极板面积为  $S$ , 间距为  $d$ 。将电容器接在电源上, 插入  $\frac{d}{2}$  厚的均匀电介质板, 其相对介电常量为  $\epsilon_r$ 。试问电容器内介质内、外场强之比是多少? 它们和未插入介质之前的场强之比又各是多少?

$$\left( \frac{E_{\text{内}}}{E_{\text{外}}} = \frac{1}{\epsilon_r}; \frac{E_{\text{内}}}{E_0} = \frac{2}{1 + \epsilon_r}; \frac{E_{\text{外}}}{E_0} = \frac{2\epsilon_r}{1 + \epsilon_r} \right)$$

7-17 两个面积为  $a^2$  的平板平行放置, 并垂直于  $x$  轴, 其中之一位于  $x = 0$  处, 另一位于  $x = l$  处, 其间为真空。现测得两板间的电势分布  $U = \frac{3}{4} x^2$ , 则两板间储存的电场能量是多少?  $\left( \frac{3}{8} \epsilon_0 a^2 l^3 \right)$

7-18 一半径为  $R$ , 带电量为  $Q$  的导体球置于真空中, 试求其电场的总能量。

$$\left( \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} \right)$$

7-19 在半径为  $R$  的金属球外, 包有一半半径为  $R'$  的均匀电介质层, 设电介质的相对介电常量为  $\epsilon_r$ , 金属球带电量  $Q$ 。求:

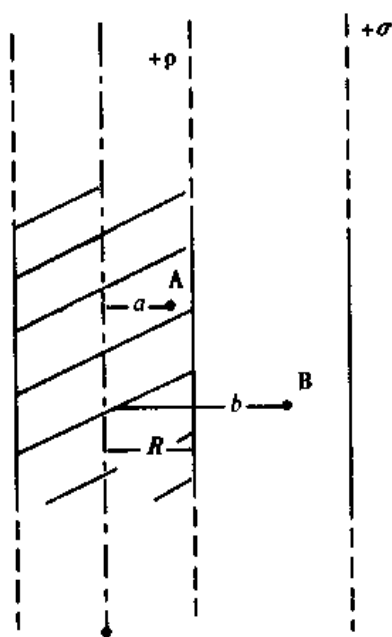


图 7-22 习题 7-12

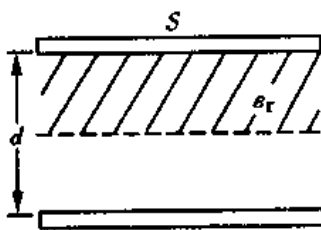


图 7-23 习题 7-16

(1) 电介质内、外的场强分布与电势分布。

$$E = 0 (r < R); \quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r^2} (R << rR'); \quad E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} (r > R')$$

$$U = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left( \frac{1}{R} + \frac{\epsilon_r - 1}{R'} \right) (r < R); \quad U = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left( \frac{1}{r} + \frac{\epsilon_r - 1}{R'} \right) (R < r < R')$$

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} (r > R')$$

(2) 金属球的电势。  $\left( \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left( \frac{1}{R} + \frac{\epsilon_r - 1}{R'} \right) \right)$

(3) 电介质内电场的能量。  $\left( \frac{Q^2}{8\pi\epsilon} \frac{R' - R}{R'R} \right)$

(刘筑闻)

# 第八章 直 流 电

---

学习本章后, 你应:

1. 掌握基尔霍夫第一、第二定律, 电容器的充、放电特性, 神经纤维的电缆方程。
  2. 理解电流密度, 欧姆定律的微分形式, 生物膜电位。
  3. 了解动作电位。
- 

电荷在电场力作用下的定向移动称为电流。电流不仅可以传输能量, 还可以传递信息。因此, 它不仅与人们的日常生活和现代科技密切相关, 而且在生命活动的过程中也起着很重要的作用。本章将从电流密度这个基本概念出发, 讨论欧姆定律的微分形式以及电流在复杂电路中的流动规律, 并分析电容器的充电和放电过程, 最后介绍静息电位、动作电位及神经传导的电缆方程。

## 第一节 电 流 密 度

### 一、电流和电流密度

导体中含有大量的可自由移动的带电粒子, 称为载流子。金属中的自由电子, 电离气体中的正、负离子都是载流子。一般情况下, 导体内部的载流子在无外电场作用时, 都作无规则的热运动, 因而不能形成电流。但是, 如果导体两端保持一定的电势差, 导体内部的载流子将在电场力的作用下, 作定向移动而形成电流。因此, 产生电流的条件是: 导体内部必须有载流子; 导体中必须存在电场, 即导体两端要保持一定的电势差。电流方向习惯上规定为正电荷在电场力作用下的移动方向。电流大小则用电流强度来描述, 用字母  $I$  表示, 定义为: 单位时间内通过导体截面的电量。如果在  $\Delta t$  时间内通过导体截面的电量为  $\Delta Q$ , 则电流强度为

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad (8-1)$$

如果导体中电流强度的大小和方向不随时间而变化, 这种电流称为稳恒电流。若电流的大小随时间而变化, 则用瞬时电流来表示

$$i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt} \quad (8-2)$$

电流强度的单位是安培(A), 常用的单位还有毫安(mA)和微安( $\mu A$ )。

$$1 \text{ A} = 10^3 \text{ mA} = 10^6 \mu\text{A}$$

当电流在导体中流动时，一般情况下，只要知道通过导体的电流强度就可以了。但是，当电流通过任意形状的大块导体(如人体躯干、任意容器中的电解液)时，导体中各处电流强度的大小和方向就不完全相同，这样的导体称为容积导体。显然，对于容积导体，仅有电流强度的概念是不够的。为了确切地描述导体内部各点的电流分布情况，我们引入电流密度这一物理量。

如图 8-1 所示，在通有电流强度为  $I$  的导体内某处取一面积元  $\Delta s$ ，使  $\Delta s$  的法线方向与所在处场强  $E$  的方向相同。如果通过  $\Delta s$  的电流强度为  $\Delta I$ ，则电流密度  $J$  的大小定义为垂直通过单位截面积的电流强度，即

$$J = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta s} = \frac{dI}{ds} \quad (8-3)$$

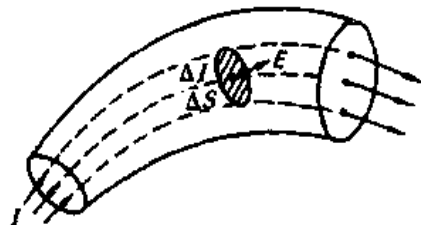


图 8-1 电流密度矢量

电流密度  $J$  是矢量，其方向与该点的场强  $E$  的方向一致。电流密度的单位是安培每平方米( $\text{A} \cdot \text{m}^{-2}$ )。

为了应用方便和表达  $J$  的矢量性，我们导出  $J$  的另一表达式。假设导体中存在一种载流子，且载流子为正电荷，以  $n$  表示导体中单位体积内的载流子数目， $Z$  表示载流子的价数， $\bar{v}$  表示载流子在电场力作用下的漂移速度，则在  $\Delta t$  时间内，通过  $\Delta s$  的电量  $\Delta Q = Zen \cdot \bar{v} \Delta t \cdot \Delta s$  或  $\Delta I = \Delta Q / \Delta t = Zen \bar{v} \cdot \Delta s$ ，将  $\Delta I$  值代入到式(8-3)，并取极限，得：

$$J = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta s} = Zen \bar{v} = \rho_e \bar{v}$$

式中  $\rho_e = Zen$  表示导体中自由电荷的体密度。 $J$  和  $\bar{v}$  都是矢量，故上式可写成矢量式

$$J = Zen \bar{v} = \rho_e \bar{v}$$

## 二、金属与电解质的导电性

在金属导体中传导电流是由大量自由电子的定向漂移运动形成的。自由电子除无规则的热运动之外，还将在电场力的作用下，沿着场强  $E$  的反方向漂移。值得注意的是电子的漂移速度是十分缓慢的，它和电流在导体中的传导速度不是一回事，后者实际上是电场在导体中的传播速度。下面讨论金属导体中的电流密度。

在金属导体中取一微小截面  $\Delta s$ ，使  $\Delta s$  的法线方向与该点处的场强方向一致。电子漂移的平均速度为  $\bar{v}$ ，电子密度为  $n$ ，每个电子所带电量的绝对值为  $e$ ，在  $\Delta t$  时间内电子定向漂移的距离为  $\Delta l = \bar{v} \cdot \Delta t$ ，于是在  $\Delta t$  时间内通过截面  $\Delta s$  的电量为：

$$\Delta Q = ne \Delta s \Delta l = ne \bar{v} \Delta s \Delta t$$

由此求得通过截面  $\Delta s$  的电流强度为：

$$\Delta I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = ne \bar{v} \Delta s$$

所以，该处的电流密度为：



$$J = \frac{\Delta I}{\Delta s} = ne\bar{v} \quad (8-4)$$

上式表明，金属导体中的电流密度等于导体中电子密度  $n$ 、电子电量  $e$  和电子漂移的平均速度  $\bar{v}$  的乘积。

下面我们来讨论电解质的导电性。在人体内部的导电过程中，电解质溶液导电占重要地位。电解质溶液中的载流子是正、负离子。在无外电场时，所有的离子都作无规则的热运动，因而电解质溶液内无电流。当有外电场作用时，正、负离子在电场力作用下将分别沿电场方向和逆电场方向移动，于是形成电流。

离子在电解质溶液中作定向运动时，除受到电场力作用外，还要受到周围媒质的阻力。当离子速度不大时，阻力与离子定向运动速度成正比，阻力的方向与离子定向运动的方向相反。由于正、负离子的质量并不一样，因此正离子的漂移速度  $\bar{v}_+$  和负离子的漂移速度  $\bar{v}_-$  并不相等。若用  $Z$  表示离子价数， $K_+$  和  $K_-$  分别为正、负离子的摩擦系数， $\mu_+$  及  $\mu_-$  分别称为正、负离子的迁移率。当正、负离子所受阻力增加到与电场力相平衡时，它们的漂移速度可分别由下列各式求出

$$\begin{aligned} ZeE - K_+ \bar{v}_+ &= 0 & \bar{v}_+ &= \frac{ZeE}{K_+} = \mu_+ E \\ (-ZeE) - K_- \bar{v}_- &= 0 & \bar{v}_- &= \frac{-ZeE}{K_-} = -\mu_- E \end{aligned}$$

由上列右边两式可以看出，漂移速度的大小和场强成正比。最后一式右边的负号表示负离子的漂移速度方向与场强方向相反。

设单位体积电解质溶液中正、负离子数均为  $n$ ，则电解质溶液中总的电流密度  $J$  等于正、负离子的电流密度之和，即

$$\begin{aligned} J &= J_+ + J_- = \rho_+ \bar{v}_+ + \rho_- \bar{v}_- = Zen\bar{v}_+ + (-Zen\bar{v}_-) \\ &= Zen\mu_+ E + (-Zen)(-\mu_- E) = Zen(\mu_+ + \mu_-)E \end{aligned} \quad (8-5)$$

在一定温度下，对一定的电解质溶液来说， $Z$ 、 $e$ 、 $n$ 、 $\mu_+$ 、 $\mu_-$  都是确定的，故  $J$  与  $E$  成正比，且方向一致。

### 三、欧姆定律的微分形式

我们知道欧姆定律的一般形式为

$$I = \frac{U_1 - U_2}{R} = \frac{U_{12}}{R}$$

它说明在温度一定时，通过粗细均匀导体中的电流与导体两端电势差的关系。上式中的  $R$  为导体的电阻，它与导体的材料和几何形状有关。

由实验得知对于粗细均匀的导体，当导体的材料和温度一定时，导体愈长、愈细，导体的电阻值就愈大。就是说，导体的电阻与它的长度  $L$  成正比，与它的横截面积  $S$  成反比，即

$$R = \rho \frac{L}{S} \quad (8-6)$$

式中比例系数  $\rho$  称为电阻率，它与材料的性质有关，单位是欧姆·米 ( $\Omega \cdot m$ )。电阻率

的倒数  $\gamma = \frac{1}{\rho}$ ，称为电导率，单位是西门子每米 ( $S \cdot m^{-1}$ )。

对于不均匀导体，我们必须了解导体内部各点的导电情况。为此，在图 8-2 的导体中，沿电流方向取长度为  $dl$ 、底面积为  $ds$  的圆柱体元，两端的电势分别为  $U$  和  $U + dU$ 。由欧姆定律可知，通过圆柱体元的电流强度为：

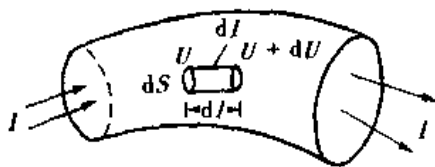


图 8-2 欧姆定律微分形式的推导

$$dI = \frac{U - (U + dU)}{R} = -\frac{dU}{R}$$

而圆柱体元的电阻可表示为  $R = \rho \frac{dl}{ds}$ ，代入上式可得

$$dI = -\frac{dU}{R} = -\frac{1}{\rho} \frac{dU}{dl} ds$$

或

$$\frac{dI}{ds} = -\frac{1}{\rho} \frac{dU}{dl}$$

因为  $\frac{dI}{ds} = j$ ， $E = -\frac{dU}{dl}$ ，所以

$$j = \frac{E}{\rho} = \gamma E \quad (8-7)$$

由于电流密度  $\mathbf{J}$  和场强  $\mathbf{E}$  都是矢量，且方向相同，因此上式可写成矢量式

$$\mathbf{J} = \frac{\mathbf{E}}{\rho} = \gamma \mathbf{E} \quad (8-8)$$

这就是欧姆定律的微分形式，它表明通过导体中任一点的电流密度与该处的电场强度成正比。由于电流密度与导体的性质有关，而与导体的形状大小无关，因此，它揭示了大块导体中的电场和电流分布之间的函数关系，比积分形式的欧姆定律具有更深刻的意义，它适用于任何导体以及非稳恒电场。

## 第二节 基尔霍夫定律

在分析简单的电路时，应用欧姆定律就可以解决问题。然而，在实际应用中，多数是由电阻和电源组成的几个回路而构成的复杂电路，解决这些问题仅用欧姆定律是不够的，必须利用基尔霍夫定律。

对于一个复杂电路，电路中的每一分支称为支路。支路可由一个元件或若干个元件组成，特点是支路上各处的电流都相同。如图 8-3 中的电路就是由 ACB、ADB 和 AB 三条支路组成的。电路中三条或三条以上支路汇合的点叫节点，图 8-3 中的 A、B 都是节点。电路愈复杂，所包含的支路和节点也愈多。电路中任一闭合路径称为回路，图 8-3 中的 ABCA、ABDA、ADBCA 都称为回路。

### 一、基尔霍夫第一定律

基尔霍夫第一定律也称为节点电流定律。它是用来确定电路中任一节点处各电流

之间关系的定律，是根据电流的连续性原理得到的。对于图 8-3 电路中的节点 A 和 B，根据电流的连续性，电路中任何一点，包括节点在内，均不能有电荷的积累。因此，在任一时刻，流入节点的电流之和必定等于流出该节点的电流之和。对于节点 A 则可以得出

$$I_1 + I_2 = I_3$$

上式又可写成

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

若规定流入节点的电流为正，流出节点的电流为负，则汇于任一节点处电流的代数和等于零。数学表示式为

$$\sum I_i = 0 \quad (8-9)$$

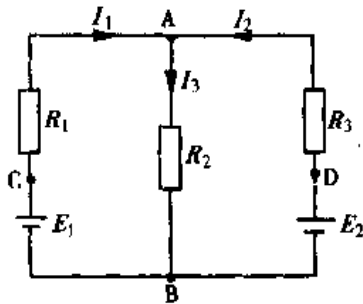


图 8-3 支路和节点

这就是基尔霍夫第一定律。在实际应用中，由于电路中各支路电流方向往往难以判定，因此，在列方程时可以先任意假设电流方向，当计算结果为正时，说明电流的实际方向与假设的方向一致；若计算结果为负时，说明电流的实际方向与假设的方向相反。

图 8-3 中有 A、B 两个节点，虽然可以列出两个电流方程，但只有一个是独立的。可以证明，对于有  $n$  个节点的复杂电路只有  $(n-1)$  个方程是独立的。

## 二、基尔霍夫第二定律

基尔霍夫第二定律又称为回路电压定律，它是用来确定回路中各段电压之间关系的定律。我们知道，从电路中任一点出发，绕回路一周，回到该点时电势变化为零。由此得出基尔霍夫第二定律，即沿闭合回路一周，电势降落的代数和等于零。其数学表示式为

$$\sum \epsilon_i + \sum I_i R_i = 0 \quad (8-10)$$

应用该定律时，首先要假设一个绕行方向，然后在确定各段的电势降落。式中  $\epsilon_i$  和  $I_i R_i$  的符号规定为：对于任意选定的绕行方向，电流方向与其相同时，电势降落为  $+IR$ ，相反时，电势降落为  $-IR$ ； $\epsilon$  的正方向与其相反时，电势降落为  $+\epsilon$ ，相同时，电势降落为  $-\epsilon$ 。

如图 8-4 所示，该电路共有三个回路：ACBA、ABDA、ACBDA。对于每个回路均可用基尔霍夫第二定律列出一个方程，故可列出三个回路电压方程。设三个回路的绕行方向均为顺时针，则三个回路的回路电压方程分别如下：

$$\text{对于 ACBA 回路：} -I_1 R_1 + \epsilon_1 + \epsilon_2 - I_2 R_2 = 0$$

$$\text{对于 ABDA 回路：} +I_2 R_2 - \epsilon_2 + I_3 R_3 = 0$$

$$\text{对于 ACBDA 回路：} -I_1 R_1 + \epsilon_1 + I_3 R_3 = 0$$

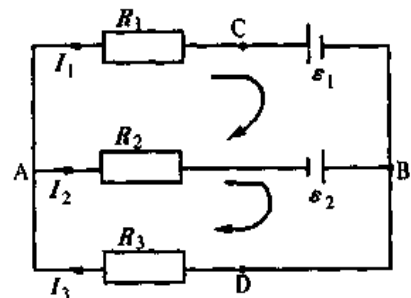


图 8-4 多回路电路

应当指出的是，在选取回路时也应注意它们的独立性。上面三个方程式中只有两个是独立的，因为它们中的任意两个方程式相加减，均可得出第三个方程式。

在一般情况下，基尔霍夫第二定律能提供的独立回路方程数  $l$  等于电路支路数  $m$  与独立节点数  $(n-1)$  的差，即  $l = m - (n-1)$ 。也就是说  $n$  个节点可建立  $(n-1)$  个独立电流方程，其余的独立方程则由基尔霍夫第二定律给出。

下面举例说明基尔霍夫定律的应用。如图 8-5 所示，此电路的特点是只有两个节点 a 和 b。节点间的电压  $V$  称为节点电压，在图中，其正方向由 a 指向 b。各支路电流可应用欧姆定律得出

$$I_1 = \frac{\epsilon_1 - V}{R_1}, \quad I_2 = \frac{\epsilon_2 - V}{R_2}$$

$$I_3 = \frac{-\epsilon_3 + V}{R_3}, \quad I_4 = \frac{V}{R_4}$$

由上面各式可知，在已知电动势和电阻的情况下，只要先求出节点电压  $V$ ，就可以计算各支路电流了。

根据基尔霍夫第一定律，对于节点 a 可列出方程

$$I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 0$$

即

$$\frac{\epsilon_1 - V}{R_1} + \frac{\epsilon_2 - V}{R_2} - \frac{-\epsilon_3 + V}{R_3} - \frac{V}{R_4} = 0$$

经整理后，得出节点电压的公式

$$V = \frac{\frac{\epsilon_1}{R_1} + \frac{\epsilon_2}{R_2} + \frac{\epsilon_3}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}} = \frac{\sum \frac{\epsilon_i}{R_i}}{\sum \frac{1}{R_i}} \quad (8-11)$$

在上式中，分母的各项总为正；分子的各项可为正，也可为负。当电动势正方向同节点电压的正方向相反时取正号，相同时则取负号。

求出节点电压后，可用欧姆定律计算各支路电流，这种方法称为节点电压法，式 (8-11) 称为弥尔曼定理。它适用于两个节点多个支路的网络计算，如计算机中的加法电路，也可用于细胞膜离子通道电流的分析。

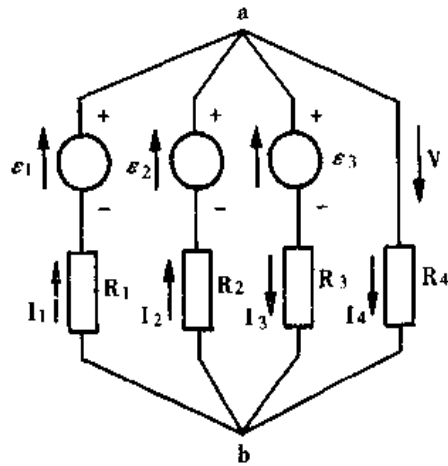


图 8-5 具有两个节点的复杂电路

### 第三节 电容器的充电和放电

稳态过程与暂态过程的转换是由电容器的充、放电来完成的，主要是利用电容器储存电荷的本领。下面我们将研究电容器充、放电过程中电压与电流的变化规律及影响电容器充、放电速度的电路参数。

## 一、RC 电路的充电过程

仅由电阻  $R$  和电容  $C$  组成的电路称为  $RC$  电路，它是最常见的脉冲电路。如图

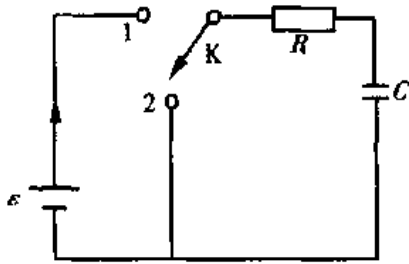


图 8-6 电容器充放电原理图

8-6 所示为电容器的充、放电电路。当开关扳向 1 时，电动势为  $\epsilon$  的电源就通过电阻  $R$  向电容  $C$  充电，电路中的充电电流为  $i_c$ 。当开关  $K$  刚接通 1 的瞬间，由于电容器  $C$  上的电荷尚未积累，因此，电容器两端的电压  $u_c$  等于零。这时电路中的电流  $i_c$

$$= \frac{(\epsilon - u_c)}{R} = \frac{\epsilon}{R}, \text{ 即在这一瞬间电路中的充电电流}$$

最大。随着充电时间的延续，电容器上积累的电荷逐渐增加， $u_c$  也逐渐增大，而这时的充电电流  $i_c$  则

随  $u_c$  的增大而减小。当  $u_c = \epsilon$  时， $i_c = 0$ ，充电过程结束。可见在充电过程中，充电电流由开始的最大值  $\frac{\epsilon}{R}$  逐渐降到零。而电容器两端的电压  $u_c$  则由开始时的零上升到最大值  $\epsilon$ 。下面我们就  $i_c$  和  $u_c$  的变化规律进行定量分析。

在充电过程中，由基尔霍夫定律可知

$$\epsilon = i_c R + u_c$$

而  $i_c = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_c}{dt}$  代入上式，得

$$\epsilon = RC \frac{du_c}{dt} + u_c$$

该式为充电过程中电容器两端电压所满足的微分方程式，这个方程式的解为

$$u_c = \epsilon + Ae^{-\frac{t}{RC}}$$

式中，常数由初始条件确定，当  $t=0$ ， $u_c=0$  时，代入上式得

$$A = -\epsilon$$

故

$$\begin{aligned} u_c &= \epsilon - \epsilon e^{-\frac{t}{RC}} \\ &= \epsilon(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \end{aligned} \quad (8-12)$$

可见，在充电过程中电容器  $C$  两端的电压  $u_c$  是按指数规律上升的，如图 8-7 所示。而充电电流为

$$i_c = \frac{\epsilon - u_c}{R} = \frac{\epsilon}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (8-13)$$

上式说明，充电电流  $i_c$  是按指数规律下降的，如图 8-8 所示。

从上面的分析可以看出，电容器充电的快慢与  $R$  和  $C$  的大小有关，我们把  $R$  和  $C$  的乘积称为电路的时间常数，用  $\tau$  来表示， $\tau = RC$ ，其单位为秒(s)。可以用  $\tau$  来表示充电的快慢， $\tau$  越大，表示充电越慢；反之，充电越快(如图 8-7、8-8 所示)。当  $t = RC = \tau$  时，有

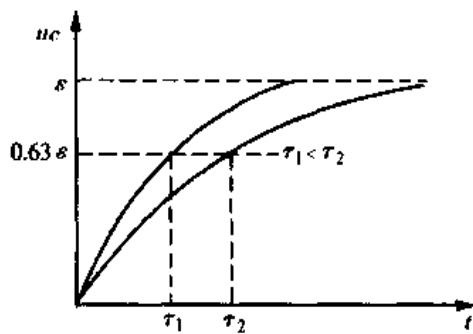


图 8-7 电容器充电时的电压-时间关系曲线

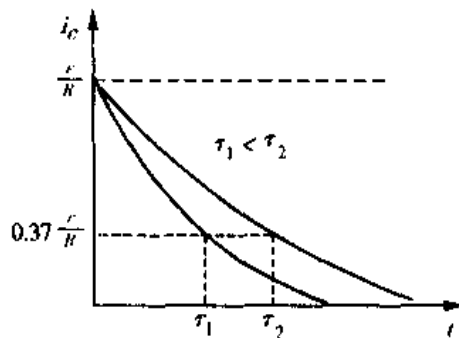


图 8-8 电容器充电时的电流-时间关系曲线

$$u = \epsilon (1 - e^{-1}) = 0.63\epsilon$$

$$i = \frac{\epsilon}{R} e^{-1} = 0.37 \frac{\epsilon}{R}$$

由此，我们可理解时间常数的物理意义。即， $\tau$  是当  $RC$  电路充电时电容器上的电压从零上升到  $\epsilon$  的 63% 所经历的时间。

从公式(8-12)可知， $t = \infty$  时， $u_c = \epsilon$ ，表明只有充电时间足够长时，电容器两端电压  $u_c$  才能与电源电动势  $\epsilon$  相等。但实际上， $t = 3\tau$  时， $u_c = 0.95\epsilon$ ，当  $t = 5\tau$  时， $u_c = 0.993\epsilon$ 。这时  $u_c$  与  $\epsilon$  已基本接近，因此，一般经过  $3\tau$  至  $5\tau$  的时间，充电过程就已基本结束，电容器充电结束后， $i_c = 0$ ，相当于开路，我们通常所说的电容有隔直流作用就是指这种状态。

## 二、 $RC$ 电路的放电过程

在图 8-6 所示的电路中，如果把开关  $K$  与 2 接通，电容器  $C$  将通过电阻  $R$  放电。开始的瞬间，由于  $u_c = \epsilon$ ，所以电路中有最大的放电电流，其方向与充电电流相反。其后的放电过程中电容器两端电压  $u_c$ 、放电电流  $i_c$  都逐渐减小，直至  $u_c = 0$ ， $i_c = 0$  时，放电结束，这一过程称为放电过程。下面我们对放电过程进行定量分析。

在放电过程中，由基尔霍夫定律可知

$$u_c = i_c R$$

由于电容器放电过程电荷逐渐减少，故电荷变化率为负，因此有

$$i_c = -\frac{dq}{dt} = -C \frac{du_c}{dt}$$

代入上式得

$$\frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{RC} = 0$$

这个一阶微分方程的解是

$$u_c = A e^{-\frac{t}{RC}}$$

将初始条件  $t = 0$ ， $u_c = \epsilon$  代入上式，可得  $A = \epsilon$ ，则上式变为

$$u_c = \epsilon e^{-\frac{t}{RC}} \quad (8-14)$$

而放电电流  $i_c$  为

$$i_c = \frac{u_c}{R} = \frac{\epsilon}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (8-15)$$

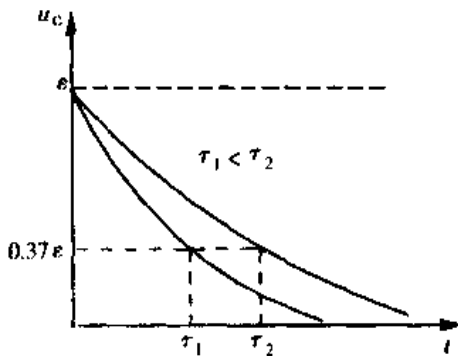


图 8-9 电容器放电时的电压-时间关系曲线

由式(8-14)和式(8-15)可知,在  $RC$  电路放电的过程中,  $u_c$ 、 $i_c$  衰减的快慢同样取决于时间常数  $\tau = RC$ ,  $\tau$  越大衰减越慢,如图 8-9 所示。当  $t = \tau$  时,  $u_c = 0.37\epsilon$ , 从理论上讲,只有  $t = \infty$  时,  $u_c = 0$  放电才结束。但在实际中,当放电时间经过  $3\tau$  至  $5\tau$  时,便可认为放电基本结束。

从上面分析可知,不论是在充电或放电过程中,电容器上的电压都不能突变,只能逐渐变化。这就是  $RC$  电路暂态过程的特性,这一特性在电子技术中有着广泛的应用。除此,在研究生命现象时经常用到  $RC$  电路,例如,细胞膜的电特性以及神经传导也常被模拟为  $RC$  电路。

## 第四节 生物膜电位

### 一、能斯特方程

大多数动物以及人体的神经和肌肉细胞在不受外界干扰时,由于细胞膜内、外液体的离子浓度不同,细胞膜对不同种类离子的通透性不一样,因此在细胞膜内、外之间存在着电位差。

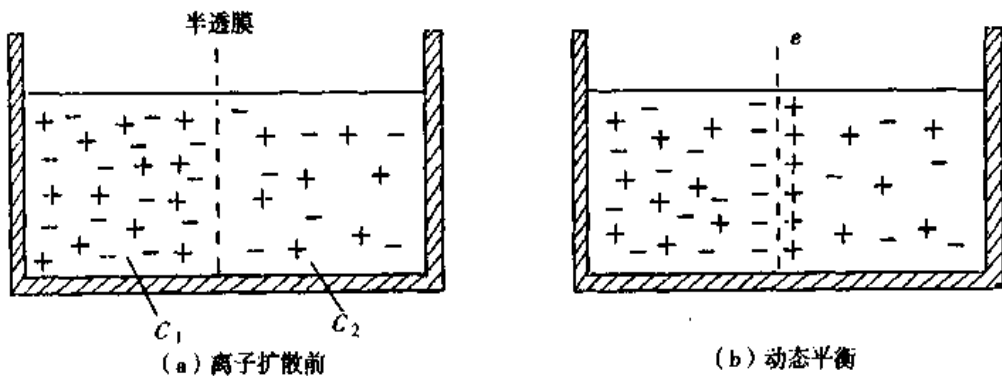


图 8-10 能斯特电势的形成

为了说明这一问题,我们首先考虑一种简单的情况。如图 8-10 所示,两种不同浓度的  $KCl$  溶液,由一个半透膜隔开,设半透膜只允许  $K^+$  通过而不允许  $Cl^-$  通过。由于浓度不同,  $K^+$  从浓度大的  $C_1$  一侧向浓度小的  $C_2$  一侧扩散,结果使右侧正电荷逐渐增加,左侧出现过剩的负电荷。这些电荷在膜的两侧聚集起来,产生一个阻碍离子继续扩散的电场,最后达到平衡时,膜的两侧具有一定的电势差  $\epsilon$ 。对于稀溶液,  $\epsilon$

的值可由玻耳兹曼能量分布定律来计算。这一定律指出，在温度相同的条件下，势能为  $E_p$  的粒子的平均密度  $n$  与  $E_p$  有如下关系

$$n = n_0 e^{\frac{-E_p}{kT}}$$

式中  $n_0$  是势能为零处的分子数密度， $k$  为玻耳兹曼常数。设在平衡状态下，半透膜左、右两侧离子密度分别为  $n_1$ 、 $n_2$  电位为  $U_1$ 、 $U_2$ ，离子价数为  $Z$ ，电子电量为  $e$ ，则两侧离子的电势能分别为

$$E_{p1} = ZeU_1$$

$$E_{p2} = ZeU_2$$

$$\text{则 } n_1 = n_0 e^{\frac{-ZeU_1}{kT}}$$

$$n_2 = n_0 e^{\frac{-ZeU_2}{kT}}$$

$$\frac{n_1}{n_2} = e^{\frac{Ze(U_2 - U_1)}{kT}}$$

取对数

$$\ln \frac{n_1}{n_2} = \frac{Ze}{kT} (U_2 - U_1)$$

因为膜两侧浓度  $C_1$ 、 $C_2$  与离子密度成正比

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

于是，下式成立

$$U_2 - U_1 = \frac{kT}{Ze} \ln \frac{C_1}{C_2}$$

改成常用对数

$$\epsilon = 2.3 \frac{kT}{Ze} \lg \frac{C_1}{C_2} \quad (8-16)$$

式(8-16)是建立在正离子通透的情况下取正号，若负离子通透则取负号。两式综合考虑，则

$$\epsilon = \pm 2.3 \frac{kT}{Ze} \lg \frac{C_1}{C_2} \quad (8-17)$$

式(8-17)称为能斯特方程式，它给出了透膜扩散平衡时，膜两侧的离子浓度  $C_1$ 、 $C_2$  与电势差  $\epsilon$  的关系，因此， $\epsilon$  称为能斯特电位，在生理学上称为跨膜电位。

## 二、静息电位

大量的实验告诉我们，细胞膜是一个半透膜。在膜的内、外存在着多种离子，其中主要是  $K^+$ 、 $Na^+$ 、 $Cl^-$  和大蛋白质离子，当细胞处于静息状态，即平衡状态时，这些离子的浓度如图 8-11 所示。 $K^+$ 、 $Na^+$ 、 $Cl^-$  离子都可以在不同程度上透过细胞膜，而其他离子则不能透过。因此那些能透过细胞膜的离子才能形成跨膜电位，这时的电



位就是静息电位。

现在，我们根据表 8-1 所列出的离子浓度，计算在平衡状态下的静息电位。

表 8-1 人体神经细胞膜内外离子浓度值 ( $\text{mol} \cdot \text{m}^{-3}$ )

| 离子            | 细胞内浓度 $c_1$ | 细胞外浓度 $c_2$ |
|---------------|-------------|-------------|
| $\text{Na}^+$ | 10          | 142         |
| $\text{K}^+$  | 141         | 5           |
| $\text{Cl}^-$ | 4           | 100         |
| A             | 147         | 47          |

我们知道人体的温度为  $273 + 37 = 310$  (K)，玻耳兹曼常数  $k = 1.38 \times 10^{-23} \text{J} \cdot \text{K}^{-1}$ ，电子的电量  $e = 1.60 \times 10^{-19} \text{C}$ ， $\text{K}^+$ 、 $\text{Na}^+$ 、 $\text{Cl}^-$  离子的  $Z$  分别为 +1 和 -1。代入这些值后，能斯特方程对于正、负离子来说变成

$$\epsilon = \pm 61.5 \lg \frac{C_1}{C_2} \text{mV}$$

$$\text{Na}^+ = 61.5 \lg \frac{10}{142} = +71 \text{mV}$$

$$\text{K}^+ = 61.5 \lg \frac{141}{5} = -89 \text{mV}$$

$$\text{Cl}^- = -61.5 \lg \frac{4}{100} = -86 \text{mV}$$

如果把以上这些计算值与实验测量值得到的神经静息电位  $-86 \text{mV}$  相比较，可以发现， $\text{Cl}^-$  离子正好处于平衡状态，即通过细胞膜扩散出入的  $\text{Cl}^-$  离子数目保持平衡。对于  $\text{K}^+$  离子来说，两结果相差不大，说明仍有少量  $\text{K}^+$  离子由膜内向膜外扩散。而

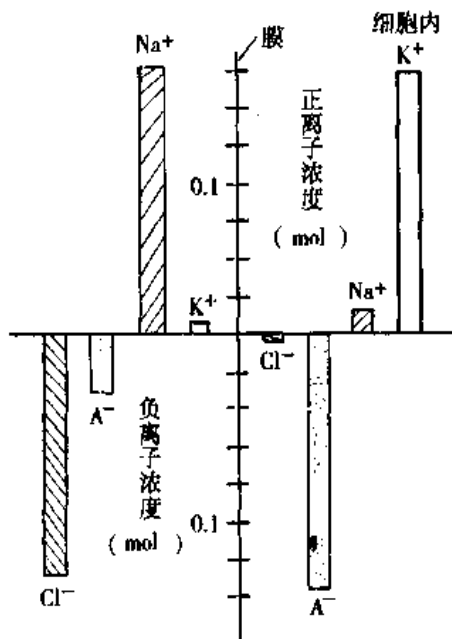


图 8-11 静息态时膜内外离子浓度

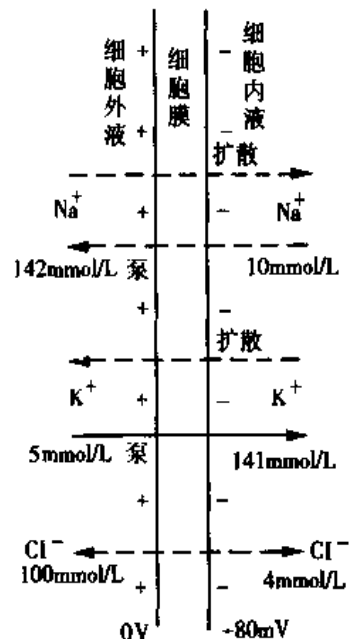


图 8-12 细胞内外离子的平衡

对于  $\text{Na}^+$  离子来说却相差很远。这是因为在静息状态下细胞膜对  $\text{Na}^+$  离子的通透性很小，仅有少量  $\text{Na}^+$  离子可以由浓度高的膜外扩散到膜内。为了说明在静息状态下离子的浓度保持不变，必须认为存在着某种机制把扩散到膜外的  $\text{K}^+$  离子和进入细胞的  $\text{Na}^+$  离子送回原处，我们把这种机制称为钾泵和钠泵。“泵”的意思是强调这不是一种被动的扩散过程，而是一种需要代谢能量的主动机制。图 8-12 说明细胞内、外的离子浓度是如何保持平衡的。关于钠-钾泵的工作原理，尚有待今后继续研究。

### 三、神经纤维的电缆方程

神经细胞也称为神经元，由细胞体和突起组成，突起又分为树突和轴突。在多数情况下，树突接受传入的信息并传向细胞体。轴突很长，由细胞体的小丘分出，直径均匀，所以常称其为神经纤维，它可把神经冲动传向另一个细胞。轴突中间含轴浆是比较稀的电离物质溶液，其中的  $\text{K}^+$ 、 $\text{Na}^+$ 、 $\text{Cl}^-$  离子可以沿轴突流动，形成纵向电流称为轴浆电流  $i_i$ ，也可跨膜运动，形成横向电流称为膜电流  $i_m$ 。所以，在轴突内液的纵向和横向都有电阻。纵向电阻称为轴浆电阻，常用  $r_i$  表示单位长度的轴浆电阻。横向上的电阻称为膜电阻，常用  $r_m$  表示单位长度的膜电阻。细胞外液及细胞内液均为含电解质的液体，可看作两个导体；细胞膜是含脂肪的膜，可视为绝缘体。因此，三者组成了电容，通常称单位面积的电容为膜电容，用  $c_m$  表示。

可以把神经纤维看成是一根特殊的电缆，由于轴浆电阻、膜电阻与膜电容的组合，使电流对膜电位的影响起着随距离而衰减和在时间上的延缓作用。神经纤维的这种性能可以比较满意地解释电流对神经膜的作用。因此，也称其为电缆学说。实验表明，当外加刺激低于细胞兴奋的阈值时，细胞不会产生动作电位。但细胞的膜电位还是会发生变化，而细胞膜的电阻、电容和膜电动势不发生变化，所以这时的膜称为被动膜，下面我们来讨论被动膜的电缆性质。

图 8-13 (a) 所表示的是测量神经纤维电缆性质的装置。在神经纤维中插入两个微电极，一个电极通入恒定电流  $I$ ，另一个电极用来记录不同点的膜电位变化  $\epsilon$ ， $\epsilon$  等于膜电位  $E$  与静息电位（也称为膜电动势） $E_r$  的差，即  $\epsilon = E - E_r$ 。

测量结果表明在电源附近 ( $x = 0$ ) 膜电位变化  $\epsilon$  上升较快，随时间  $t$  的变化，达到的最大值  $\epsilon_{\max}$  也较大；在远离电源处 ( $x = 2.5\text{mm}$ 、 $x = 5.0\text{mm}$ )，不但膜电位变化  $\epsilon$  上升慢，而且随时间  $t$  的变化达到的最大值  $\epsilon_{\max}$  也较低，如图 8-13 (b) 所示。 $\epsilon$  在时间及空间的分布，既与轴浆电阻、膜电阻有关，也与膜电

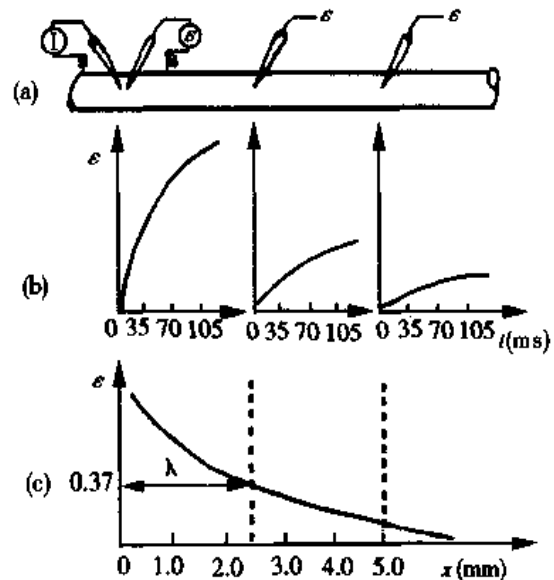


图 8-13 神经纤维的电缆性质

容有关。由于膜电容的作用，可引起某点处膜电位变化  $\epsilon$  的变慢，又由于轴浆电阻及膜电阻的作用，使得膜电位变化的最大值  $\epsilon_{\max}$  随距离  $x$  的增加按指数规律而减小，如图 8-13 (c) 所示。这就是被动膜的电缆性质。

我们把神经纤维看成由许多长度为  $\Delta x$  的小段组成，每一小段  $\Delta x$  的膜都可用图 8-14 的等效电路来表示，把相邻小段的等效电路联系在一起就构成神经纤维的等效电路，如图 8-15 所示。现在我们就利用神经纤维的等效电路，建立神经纤维的电缆方程，并从理论上进一步证明被动膜的电缆性质。

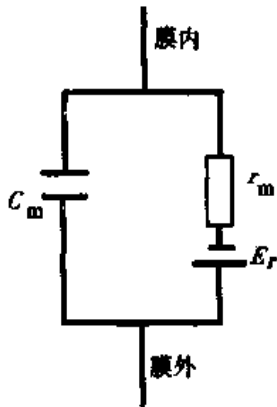


图 8-14 一小段轴突膜的等效电路

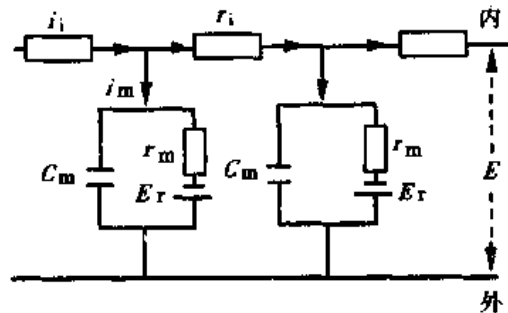


图 8-15 神经纤维等效电路

设与通电电极距离为  $x$  处的神经纤维的膜电位变化为  $\epsilon$ ；因为细胞外液的电阻  $r_0$  很低，所以在等效电路中取  $r_0 = 0$ ；由图 8-15 可知轴浆电流  $i_i$  通过轴浆电阻  $r_i$ ，膜电流  $i_m$  的一部分通过膜电容  $c_m$ ，另一部分通过膜电阻  $r_m$ 。根据欧姆定律和电荷守恒定律，经数学运算，可建立如下方程

$$\frac{r_m}{r_i} \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial x^2} - r_m c_m \frac{\partial \epsilon}{\partial t} - \epsilon = 0 \quad (8-18)$$

令  $\lambda = \sqrt{\frac{r_m}{r_i}}$  称为空间常数， $\tau = r_m c_m$  称为时间常数，则

$$\lambda^2 \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial x^2} - \tau \frac{\partial \epsilon}{\partial t} - \epsilon = 0 \quad (8-19)$$

式(8-18)、(8-19)称为神经纤维的电缆方程。式中  $\epsilon$  随时间  $t$  和距离  $x$  而变化，当膜电流  $i_m$  使膜电容  $c_m$  充电完毕时，则  $\epsilon$  不再随时间而变化，即  $\frac{\partial \epsilon}{\partial t} = 0$ 。这时式(8-19)变为

$$\lambda^2 \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial x^2} - \epsilon = 0 \quad (8-20)$$

式(8-20)的解为

$$\epsilon = \epsilon_0 e^{-\frac{x}{\lambda}}$$

$\epsilon_0$  为通电电极 ( $x=0$ ) 处的膜电位变化，我们不难看出，膜电位变化  $\epsilon$  随距离  $x$  的变

化按指数规律衰减，这与实验的测量结果是完全一致的。

#### 四、动作电位

我们已经知道，当神经或肌肉细胞处于静息状态时，细胞膜外带正电，膜内带负电，这种状态又称为极化。但是当细胞受到外来刺激时，不管这种刺激是电的、化学的、热的或机械的，细胞膜都会发生局部去极化。随着刺激强度的加大，细胞膜去极化的程度也不断地扩展。当刺激强度达到阈值或阈值以上时，受刺激的细胞膜对  $\text{Na}^+$  离子的通透性会突然增加。由于膜外  $\text{Na}^+$  离子的浓度远高于膜内，膜内的电位又低于膜外，于是大量  $\text{Na}^+$  离子在浓度梯度和电场的双重影响下由细胞膜外涌入细胞膜内。这一过程的直接结果是使膜内电位迅速提高，当膜内、外  $\text{Na}^+$  离子的浓度差和电位差的作用相互平衡时，细胞膜的极化发生倒转，结果细胞膜内带正电，膜外带负电，这一过程叫除极。与此同时，电位也由静息状态下的  $-86\text{mV}$  变成  $+60\text{mV}$  左右。

除极之后，细胞膜又使  $\text{Na}^+$  离子不能通透，而  $\text{K}^+$  离子的通透性突然提高，大量  $\text{K}^+$  离子由细胞膜内向膜外扩散，使膜电位又由  $+60\text{mV}$  迅速下降到  $-100\text{mV}$  左右。于是，离子在细胞兴奋时的移位，都获得了恢复，即细胞膜内带负电、膜外带正电，这一过程称为复极。之后，由于“钠-钾泵”的作用，细胞膜内的  $\text{Na}^+$  离子被输送到膜外，同时使细胞膜外的  $\text{K}^+$  离子回到膜内，膜电位又恢复到静息电位值，即  $-86\text{mV}$ 。

由上面的论述可以看出，细胞受刺激所经历的除极和复极过程，伴随着电位的波动过程。实验证明，这一过程仅需  $10\text{ms}$  左右。我们把这种电位波动称为动作电位。图 8-16 给出了一个动作电位的形成过程。细胞在恢复到静息状态后，它又可以接受另一次刺激，产生另一个动作电位。在不断的强刺激下，1 秒之内可以产生几百个动作电位。

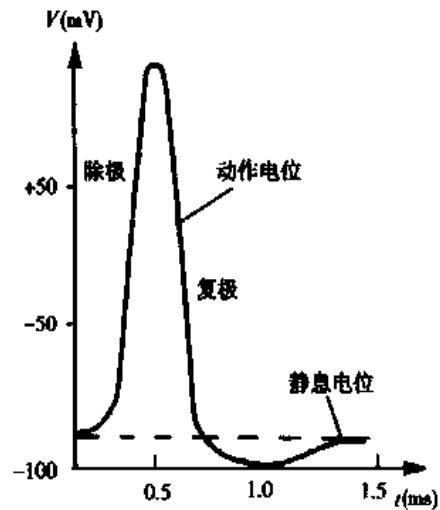


图 8-16 动作电位

#### 思考题与习题八

8-1 两根粗细不同的铜棒接在一起(串联)，在两端加上一定电压。设两铜棒的长度相同，那么：(1)通过两棒的电流强度是否相同？(2)如果略去分界面处的边缘效应，通过两棒的电流密度是否相同？(3)两棒内的电场强度是否相同？(4)两棒两端的电场强度是否相同？

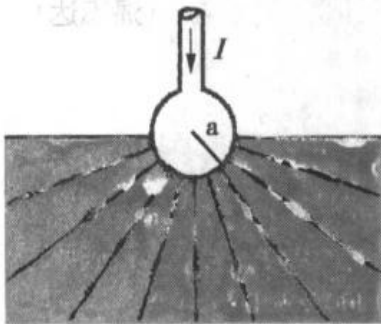


图 8-17 习题 8-2

8-2 把大地看成均匀的导电介质，其电阻率为  $\rho$ 。用一半径为  $a$  的球形电极与大地表面相接，半个球体埋在地下，如图电极本身的电阻可以忽略。试证明此电极的接地电阻为：

$$R = \frac{\rho}{2\pi a}$$

8-3 灵敏电流计能测出的最小电流约为  $10^{-10}\text{A}$ 。问：

(1)  $10^{-10}$  A 的电流通过灵敏电流计时, 每秒内流过导线截面的自由电子数是多少? (2) 如果导线的截面积是  $1\text{mm}^2$ , 导线中自由电子的密度为  $8.5 \times 10^{28}\text{m}^{-3}$ , 这时电子的平均漂移速度是多少? (3) 电子沿导线漂移  $1\text{cm}$  所需时间为多少? ( $6.25 \times 10^{18}\text{s}^{-1}$ ,  $7.4 \times 10^{-15}\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ,  $1.4 \times 10^{12}\text{s}$ )

8-4 如图 8-18 所示, 当电路达到稳态时 ( $t \rightarrow \infty$ ), 求: (1) 电容器上的电压; (2) 各支路电流; (3) 时间常数。 ( $2\text{V}$ 、 $0$ 、 $1.0 \times 10^{-2}\text{A}$ 、 $266\text{s}$ )

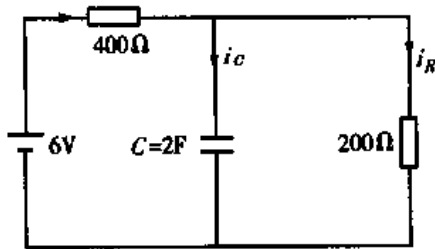


图 8-18 习题 8-4

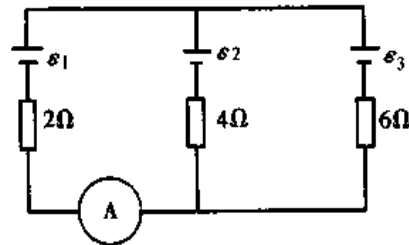


图 8-19 习题 8-5

8-5 在图所示的电路中, 已知  $\epsilon_2 = 12\text{V}$ 、 $\epsilon_3 = 4\text{V}$ ; 安培计的读数为  $0.5\text{A}$ , 其内阻可忽略不计, 电流方向如图 8-19 中所示, 求电源  $\epsilon_1$  的电动势是多少? ( $6.6\text{V}$ )

8-6 如图 8-20 所示,  $\epsilon_1 = 10\text{V}$ ,  $\epsilon_2 = 6\text{V}$ ,  $\epsilon_3 = 20\text{V}$ ,  $R_1 = 20\text{k}\Omega$ ,  $R_2 = 60\text{k}\Omega$ ,  $R_3 = 40\text{k}\Omega$ , 求各支路中的电流。 ( $-0.1\text{mA}$ ,  $-0.2\text{mA}$ ,  $0.1\text{mA}$ )

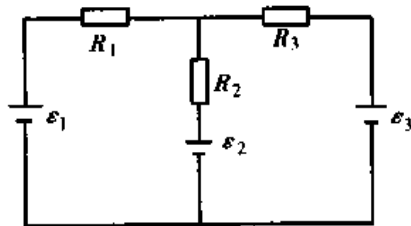


图 8-20 习题 8-6

8-7 如果每个离子所带电荷的电量为  $+1.6 \times 10^{-19}\text{C}$ , 在轴突内、外这种离子的浓度分别为  $10\text{mol}\cdot\text{m}^{-3}$  及  $160\text{mol}\cdot\text{m}^{-3}$ , 求在  $37^\circ\text{C}$  时离子的平衡电势是多少? ( $74\text{mV}$ )

8-8 请用实验测量的方法说明被动膜的电缆性质, 并用神经纤维的电缆方程在理论进一步加以证明。

8-9 什么叫动作电位? 简述其产生过程。

(潘志达)

## 第九章 电磁现象

---

学习本章后，你应：

1. 掌握高斯定理、毕奥-萨伐尔定律、安培环路定理、电磁感应定律。
  2. 理解磁感应强度、霍尔效应、介质中的磁场、位移电流、生物电阻抗。
  3. 了解超导现象、电磁振荡、电磁场的生物效应。
- 

我们知道，磁铁和电流周围存在着磁场，磁场也是一种特殊物质，它具有能量，在空间也有一定的分布。磁现象的本质就是电荷的运动。本章首先介绍有关磁场的基本概念，然后介绍磁场对运动电荷和电流的作用、电磁感应现象、磁场的能量以及磁介质等，最后简单介绍生物磁学在医学上应用等有关知识。

### 第一节 磁场 磁感应强度

#### 一、磁感应强度

在磁铁和电流周围空间存在着磁场。为了描述磁场中各点的强弱和方向，我们引入一个称为磁感应强度的物理量  $B$ ，它是一个矢量。

由于磁场对运动电荷有力的作用，在磁场中放入正的运动电荷  $q_0$ ，根据该电荷的受力情况来定义磁场中各点磁感应强度  $B$  的大小和方向。这一电荷称为运动试探电荷，简称运动电荷。运动电荷本身的磁场应该足够弱，以便使它不影响我们所研究的磁场分布。

当一定速度的运动电荷  $q_0$  通过磁场某点时，我们发现该电荷的受力情况与它的速度方向和磁感应强度方向的夹角有关。当运动电荷的速度方向与磁感应强度方向一致或相反时，运动电荷所受的力为零；当这两个方向相互垂直时，运动电荷所受的力最大，设为  $F_m$ 。 $F_m$  的大小还与运动电荷的电量  $q_0$  和速度  $v$  成正比，但  $F_m$  与乘积  $q_0v$  的比值却是确定的，与  $q_0v$  的值无关。由此可见，比值  $F_m/q_0v$  是位置的函数，它反映了磁场的性质，于是，我们用比值  $F_m/q_0v$  定义该点的磁感应强度，即

$$B = \frac{F_m}{q_0v} \quad (9-1)$$

可见，比值  $B$  是一个与运动电荷的性质无关、而仅与该点处磁场的性质有关的常量。对于磁场中不同的点，该比值一般是不同的。

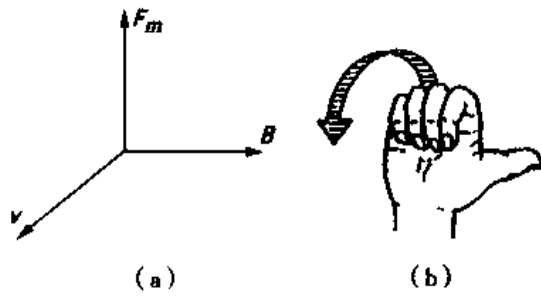


图 9-1 确定磁感应强度  $B$  的方向

在国际单位制中，磁感应强度  $B$  的单位为特斯拉，用符号  $T$  表示，由式(9-1)可知

$$1T = 1N \cdot C^{-1} \cdot S \cdot m^{-1} = 1N \cdot A^{-1} \cdot m^{-1}$$

$T$  是一个比较大的单位，在实际工作中，常常使用较小的单位高斯，用  $G$  表示， $1G = 10^{-4}T$ 。

运动电荷在磁场中所受的力，总是与运动电荷速度  $v$  的方向和磁感应强度  $B$

的方向所组成的平面相垂直，当  $v$  和  $B$  互相垂直时， $F_m$ 、 $v$  和  $B$  三者两两垂直，如图 9-1 (a) 所示。这时，磁感应强度  $B$  的方向可用右手螺旋法则来确定，即将右手拇指与其余四指垂直，先将四指的指向与  $F_m$  方向相同，再使其四指经小于  $\pi$  的角转向该电荷运动速度  $v$  的方向，这时拇指的指向就是磁感应强度  $B$  的方向，如图 9-1 (b) 所示。

## 二、磁通量 磁场中的高斯定理

为了形象地描绘磁场的分布情况，我们在磁场中画一系列的曲线，使曲线上每一点的切线方向与该点磁感应强度  $B$  的方向一致，这样的曲线称为磁感应线。为了使磁感应线也能描述磁场的强弱，规定通过垂直磁场方向的单位面积的磁感应线数目为

$$\oint \mathbf{B} \cdot \cos\theta d\mathbf{S} = \oint \mathbf{B}_n d\mathbf{S} = 0 \quad (9-4)$$

式(9-4)称为磁场中的高斯定理。它反映了磁场是涡旋场的这一重要特性。

## 第二节 电流的磁场

### 一、毕奥-萨伐尔定律

电流的周围空间存在着磁场，为了求任意形状的电流分布所产生的磁场，可以把电流分割成许多小段  $d\mathbf{l}$ ，每一小段中的电流强度为  $I$ ，我们称  $I d\mathbf{l}$  为电流元。它是矢量，其方向为  $d\mathbf{l}$  中的电流强度方向。毕奥-萨伐尔定律给出了电流元在空间某点产生的  $d\mathbf{B}$ 。它指出，电流元  $I d\mathbf{l}$  在空间某点  $P$  处产生的磁感应强度  $d\mathbf{B}$  的大小与电流元  $I d\mathbf{l}$  的大小成正比，与电流元到  $P$  点的距离  $r$  的平方成反比，与  $I d\mathbf{l}$  和  $r$  之间小于  $\pi$  的夹角  $\theta$  的正弦成正比，即

$$d\mathbf{B} = K \times \frac{I d\mathbf{l} \sin\theta}{r^2} \quad (9-5)$$

式中， $K$  为比例系数，其值与介质的种类和选用的单位有关。在国际单位制中， $K = \mu_0/4\pi$ ， $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}$  称为真空磁导率。将  $K$  值代入上式得

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \times \frac{I d\mathbf{l} \sin\theta}{r^2}$$

$d\mathbf{B}$  的方向垂直于  $I d\mathbf{l}$  和  $r$  所在的平面，由右手螺旋法则确定，即右手弯曲的四指由  $I d\mathbf{l}$  的方向沿小于  $\pi$  的  $\theta$  角转向  $r$  的方向，则伸直拇指的指向就是  $d\mathbf{B}$  方向。如图 9-3 所示。

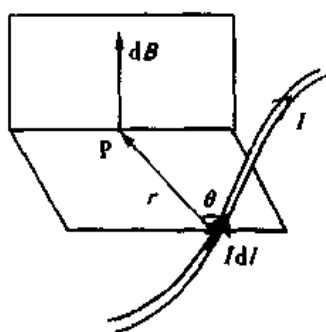


图 9-3 电流元的磁场

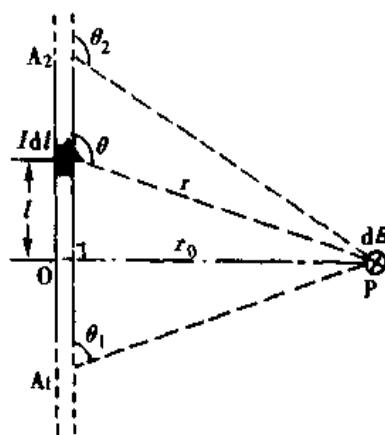


图 9-4 无限长直电流的磁场

**1. 长直电流的磁场** 图 9-4 所示的无限长直导线中，电流  $I$  由下向上流动，求这个电流周围磁场中  $P$  点的磁感应强度。在长直导线上任取一电流元  $I d\mathbf{l}$ ，由式(9-5)得，该电流元在  $P$  点所产生的磁感应强度的大小为

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \times \frac{I d\mathbf{l} \sin\theta}{r^2}$$



$dB$  的方向垂直于  $Idl$  和  $r$  所确定的平面，向纸面里，并且长直导线上各电流元在 P 点所产生的磁感应强度的方向都相同，所以，P 点的磁感应强度就等于各电流元在该点所产生的磁感应强度的代数和。对上式积分得

$$B = \int dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{Idl \sin\theta}{r^2} \quad (a)$$

上式在积分过程中有三个变量  $r$ 、 $Idl$  和  $\theta$ ，为了使变量统一，从点 P 向直导线作垂线 PO，设它的长度为  $r_0$ 。若以垂足 O 为原点，则电流元  $Idl$  到原点 O 的距离为  $l$ ，由图可知

$$l = r_0 \operatorname{ctg}(\pi - \theta) = -r_0 \operatorname{ctg}\theta \quad (b)$$

取  $l$  的微分，得

$$dl = \frac{r_0 d\theta}{\sin^2\theta} \quad (c)$$

$$r = \frac{r_0}{\sin(\pi - \theta)} = \frac{r_0}{\sin\theta} \quad (d)$$

将式(c)和式(d)代入式(a)，得

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{I_s \sin\theta d\theta}{r_0} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2) \quad (9-6)$$

式中， $\theta_1$ 、 $\theta_2$  分别是  $A_1$ 、 $A_2$  端对 P 点的张角。

若导线为无限长，则  $\theta_1 = 0$ ， $\theta_2 = \pi$ ，由上式可以得到

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0} \quad (9-7)$$

可见，长直电流周围的磁感应强度  $B$  与导线中的电流成正比，与距离成反比。磁感应线是一组围绕导线的同心圆。用右手握住直导线，使拇指的方向与电流方向一致，则四指的环绕方向就是磁感应强度的方向。

对于有限长的直导线，在  $r_0 \ll l$  的范围内，式(9-7)仍然成立。

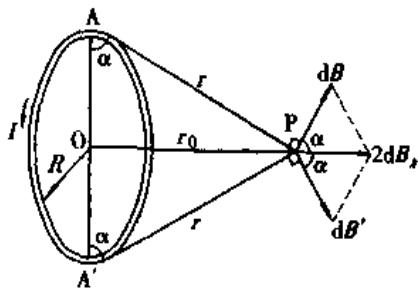


图 9-5 圆形电流轴线上的磁场

**2. 圆电流的磁场** 在图 9-5 中，圆线圈的半径为  $R$ ，其中的电流强度为  $I$ ，它的周围也存在着磁场。现在求线圈轴线上任一点 P 处的磁感应强度。设圆电流的中心为 O，P 点距 O 点的距离为  $r_0$ 。圆电流上任一点 A 处的电流元  $Idl$  在 P 点产生的磁感应强度为  $dB$ ，由于  $Idl$  与  $r$  互相垂直，根据毕奥-萨伐尔定律得

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \times \frac{Idl}{r^2}$$

由于轴对称性，P 点产生的磁感应强度在垂直于轴线方向的分量  $dB_{\perp}$  互相抵消，因此，总磁感应强度将沿轴线方向，其大小等于  $dB_{\parallel} = dB \cos\alpha$  的代数和，即

$$B = \oint dB_{\parallel} = \oint dB \cos\alpha = \oint \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Idl}{r^2} \cos\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \cos\alpha \oint dl$$

因为  $\cos\alpha = \frac{R}{r}$ ,  $\oint dl = 2\pi R$ , 所以

$$B = \frac{\mu_0 R^2 I}{2r^3} \quad (9-8)$$

考虑到  $r^2 = (r_0^2 + R^2)$  和圆线圈的面积  $S = \pi R^2$ , 上式可以写成

$$B = \frac{\mu_0 R^2 I}{2r^3} = \frac{\mu_0 IS}{2\pi(r_0^2 + R^2)^{3/2}} \quad (9-9)$$

可见,  $r_0$  愈大,  $B$  愈小, 即距圆电流中心处磁场愈弱。

圆电流轴线上的磁感应强度方向也可以用右手螺旋定则来判断, 即用右手弯曲的四指代表圆线圈中的电流方向, 则伸直的拇指的指向就是轴线上  $B$  的方向。

在圆心处,  $r = 0$ , 磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} \quad (9-10)$$

当  $r \gg R$ ,  $r_0 \approx r$  磁感应强度近似为

$$B = \frac{\mu_0 IS}{2\pi r^3} \quad (9-11)$$

**3. 直螺线管电流的磁场** 绕成螺线管形的线圈称为螺线管, 密绕的载流直螺线管如图 9-6 (a) 所示, 下面计算其轴线上任一点 P 处磁感应强度。

图 9-6 (b) 是半径为  $R$ , 载有电流  $I$  的密绕直螺线管的截面图。设  $dI$  段在 P 点产生的磁感应强度为  $dB$ , 螺线管单位长度上的匝数为  $n$ , 则  $dI$  段相当于一个电流强度为  $n dI$  的圆电流。根据式 (9-8), 它在 P 点产生的磁感应强度为:

$$dB = \frac{\mu_0 R^2}{2r^3} n I dl \quad (a)$$

从图 8-7 (b) 中可以看出

$$l = R \operatorname{ctg} \beta$$

对  $l$  微分得

$$dl = -\frac{R}{\sin^2 \beta} d\beta \quad (b)$$

又

$$r = \frac{R}{\sin \beta} \quad (c)$$

将式 (b) 和式 (c) 代入式 (a) 得

$$d\beta = -\frac{\mu_0}{2} n I \sin \beta d\beta \quad (d)$$

对 (d) 式从  $A_1$  端到  $A_2$  端积分, 得

$$B = \int_{\beta_1}^{\beta_2} -\frac{\mu_0}{2} n I \sin \beta d\beta = \frac{\mu_0}{2} n I (\cos \beta_2 - \cos \beta_1) \quad (9-12)$$

磁感应强度的方向沿着轴线向右。

若螺线管为无限长,  $\beta_1 = \pi$ ,  $\beta_2 = 0$ , 这时有

$$B = \mu_0 n I \quad (9-13)$$

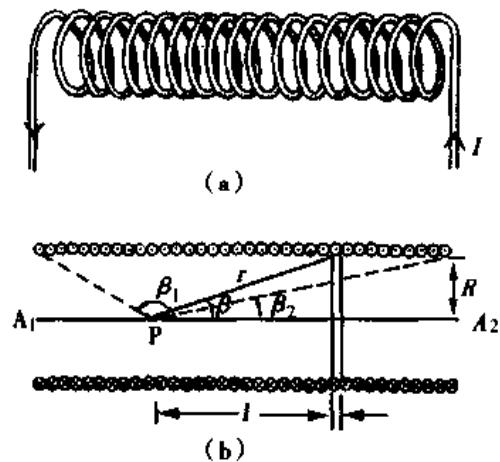


图 9-6 直螺线管电流的磁场

可见,  $B$  的大小与考察点的位置无关, 这表明密绕无限长螺线管轴线上磁场是均匀的。理论分析指出, 密绕螺线管中磁感应线泄露管外很少, 其内部空间的磁场都是均匀的。

在长直螺线管任一端的轴线上, 如图 9-6 (b) 中的  $A_1$  点,  $\beta_1 = \frac{\pi}{2}$ ,  $\beta_2 = 0$  代入式 (9-12) 得

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 n I \quad (9-14)$$

说明在长直螺线管端点轴线上的磁感应强度为管内的一半。对于有限长螺线管, 当  $R \ll l$  时, 上两式也近似适用。

## 二、安培环路定律

图 9-7 是垂直于长直导线的平面  $S$ , 电流  $I$  与该平面相交于点  $O$ 。在此平面内任取一包围电流的闭合曲线  $L$ , 设  $L$  的绕行方向和电流方向成右手螺旋关系,  $L$  上任一点  $A$  的磁感应强度  $B = \mu_0 I / 2\pi r$ 。式中  $r$  为  $A$  点到电流  $I$  的距离,  $B$  的方向为通过  $A$  点的磁感应线(图中的虚线)的切线方向,  $B$  与过  $A$  点所取的线元  $dl$  的夹角为  $\theta$ 。

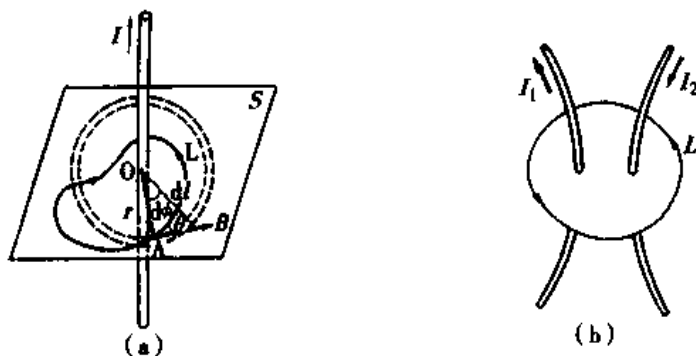


图 9-7 安培环路定理

由图可见,  $dl \cos \theta = r \cdot d\phi$ , 所以  $B$  沿闭合曲线  $L$  的线积分为

$$\oint_L B \cdot dl = \oint B \cdot dl \cos \theta = \oint \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot r d\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi = \mu_0 I \quad (9-15)$$

积分的结果仅和包围在闭合曲线内的电流有关, 而和所选的闭合曲线的形状无关。上式是从无限长直电流的磁场推导出来的, 但它对任意形状电流所产生的磁场都是成立的, 即使所取的闭合曲线不在一个平面内, 上式也同样适用。如果所取的闭合曲线包含有多个电流, 式(9-15)可写为

$$\oint_L B \cos \theta \cdot dl = \mu_0 \sum I \quad (9-16)$$

上式表明, 在电流周围的磁场中, 磁感应强度  $B$  沿任何闭合曲线的线积分与通过闭合曲线内电流强度的代数和成正比。这一结论称为真空中的安培环路定律。

电流的正、负可按下列方法确定, 如果电流的方向与积分回路的绕行方向符合右手螺旋关系时, 电流为正, 如图 9-7 (b) 中  $I_1$ ; 反之为负, 如图 9-7 (b) 中的  $I_2$ ; 如果

闭合曲线中不包含电流或包含等值反向电流时，式(9-16)右边为零。

作为安培环路定律的应用举例，下面求长直螺线管内的磁场。图9-8是一紧密缠绕的长直螺线管，通过的电流是  $I$ ，由于螺线管很长，它内部中间部分的磁场是均匀的方向和管的轴线平行。管外的磁场很弱，可忽略。在螺线管内选一点  $P$ ，过  $P$  点作一矩形封闭曲线  $abcd$ ，对回路  $abcd$  应用安培环路定律得

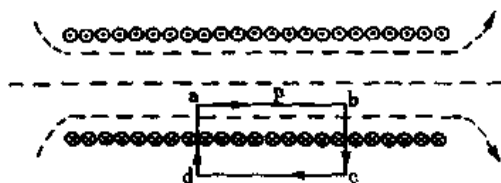


图9-8 通电长直螺线管内的磁场

$$\oint B \cos \theta dl = \int_a^b B \cos \theta dl + \int_b^c B \cos \theta dl + \int_c^d B \cos \theta dl + \int_d^a B \cos \theta dl = \mu_0 \sum I$$

由于  $cd$  在螺线管外， $B = 0$ ，所以  $\int_c^d B \cos \theta dl = 0$ ； $bc$  和  $da$  两条线上各对应点上  $B$  相同，而积分路径相反，所以  $\int_b^c B \cos \theta dl + \int_d^a B \cos \theta dl = 0$ 。 $ab$  在螺线管内，管内为均匀磁场，且  $B$  的方向自  $a$  到  $b$ ，故

$$\oint B \cos \theta dl = \int_a^b B dl = B \overline{ab} = \mu_0 \sum I = \mu_0 \overline{ab} n l$$

$$B = \mu_0 n I \quad (9-17)$$

式(9-17)是从安培环路定律得出的，它和用毕奥 - 萨伐尔定律得出的结论完全相同，但方法较简便，所以在有些情况下常用安培环路定律来求电流的磁场。

### 第三节 场磁对电流的作用

#### 一、磁场对运动电荷的作用

电荷在磁场中运动会受到磁场力的作用，这个力称为洛伦兹力。电荷的运动速度与磁场方向垂直时洛伦兹力最大，与磁场方向平行时洛伦兹力为零。在一般情况下，电荷的运动速度  $v$  与磁感应强度  $B$  之间可以成任意角度，如图9-9所示。这时可以将  $v$  分解成平行于  $B$  的分量  $v_{//} = v \cos \theta$  和垂直于  $B$  的分量  $v_{\perp} = v \sin \theta$  两部分。由于与  $v_{//}$  方向的电荷不受力的作用，因此运动电荷在磁场中所受的力只由  $v_{\perp}$  决定。由式(9-1)可以得出运动电荷在磁场中所受洛伦兹力的大小为

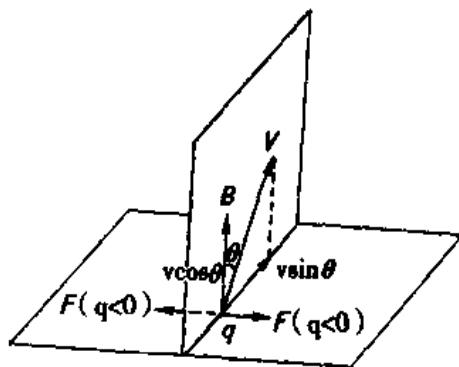


图9-9 洛伦兹力

$$F = qv_{\perp} B = qvB\sin\theta \quad (9-18)$$

洛伦兹力的方向可以由右手螺旋法则来判定，即将右手四指的指向由  $v$  的方向沿着小于  $\pi$  的一侧转向  $B$ ，则竖直的拇指的指向就是  $F$  的方向。如果是负电荷，洛伦兹力的方向和上述方向相反。

## 二、磁场对载流导线的作用

导线中的电流是由大量电子作定向运动形成的，这样的导线称为载流导线。当载流导线处于磁场中时，它所受的磁场力就是导线中所有电子所受的洛伦兹力的总和。在载流导线上任取一电流元  $Idl$ ，电流元所在处的磁感应强度为  $B$ ， $B$  与  $Idl$  的夹角为  $\theta$ 。设导线的横截面积为  $S$ ，单位体积内的电荷数为  $n$ ，则电流元中电荷的总数为  $nSdl$ 。因为每个电荷所受的洛伦兹力  $f = qvB\sin\theta$ ，所以电流元受到的合力大小为  $dF = nSdl \cdot qvB\sin\theta$ ，但通过导线的电流强度  $I = nqvS$ ，故上式可以写成

$$dF = IB\sin\theta dl \quad (9-19)$$

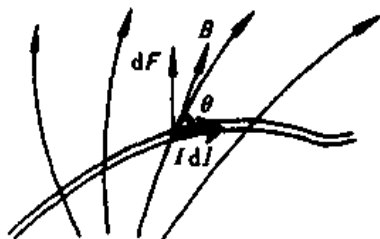


图 9-10 磁场对载流导体的作用

$dF$  就是电流元  $Idl$  在磁场中所受的力，称为安培力，上式也叫安培公式。安培力的方向也可用右手螺旋法则确定，即右手的四指由电流强度  $I$  的方向沿着小于  $\pi$  的一侧向磁感应强度  $B$  的方向弯曲，这时拇指的指向就是安培力  $dF$  的方向。图 9-10 中， $dF$  的方向垂直纸面向外。

长度为  $l$  的载流导线在磁场中所受的力。等于各个电流元所受安培力的矢量和，即

$$F = \int_l dF = \int_l IB\sin\theta dl \quad (9-20)$$

## 三、载流线圈所受磁力矩

将一矩形线圈  $abcd$  放在匀强磁场  $B$  中，已知线圈的两边长分别为  $l_1$  和  $l_2$ ，其中电流强度为  $I$ ，线圈平面与  $B$  之间的夹角为  $\theta$ ，如图 9-11 (a) 所示。边长  $ab$  和  $cd$  所受的安培力分别为

$$F_1 = Il_1 B \sin(\pi - \theta) = Il_1 B \sin\theta$$

$$F_1' = Il_1 B \sin\theta$$

即  $F_1 = F_1'$ ，但它们的方向相反，且作用在一条直线上，所以这两个力互相抵消。

边长  $bc$  和  $da$  所受的安培力分别为

$$F_2 = Il_2 B \quad F_2' = Il_2 B$$

可见  $F_2 = F_2'$ ，它们的方向相反，但不作用在一条直线上，形成一对力偶，如图 9-11 (b) 所示。由于力臂为  $l_1 \cos\theta$ ，因此磁场作用在线圈上的力矩为

$$M = Il_1 l_2 B \cos\theta$$

或

$$M = IBS \cos\theta \quad (9-21)$$

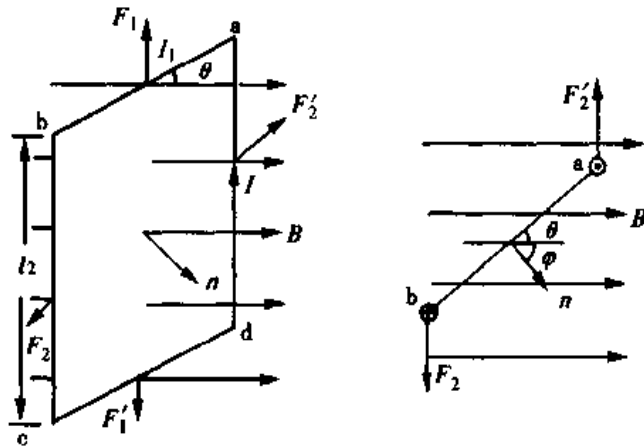


图 9-11 磁场对载流线圈的作用

式中， $S = l_1 l_2$  表示线圈平面的面积， $M$  称为载流线圈的磁力矩。

我们用线圈的法线方向  $n$  来描述线圈的取向，它的方向与线圈的环绕方向有关。让右手弯曲的四指与线圈中电流的环绕方向一致，这时其拇指的指向就定义为线圈法线的正方向。 $n$  与  $B$  的夹角用  $\phi$  表示，显然， $\phi + \theta = \pi/2$ ，式(9-21)可以改写成

$$M = IB S \sin \phi$$

如果线圈有  $N$  匝，则

$$M = NIB S \sin \phi$$

或

$$M = P_m B \sin \phi \quad (9-22)$$

式中， $P_m = NIS$ ，称为载流线圈的磁矩。由于磁矩  $P_m$  仅由载流线圈本身的条件  $N$ 、 $I$  和  $S$  决定，与外磁场的情况无关，因此它是描述载流线圈的本身特性的物理量。磁矩是矢量，它的方向就是载流线圈法线的方向。单位是安培·米<sup>2</sup> ( $A \cdot m^2$ )。

式(9-22)虽然是由矩形载流线圈推导出来的，但可以证明它也适用于处在均匀磁场中的任何形状的平面载流线圈。

图 9-12 (a) 表示一处在均匀磁场中且与  $B$  的夹角为  $\theta$  的载流线圈，图 9-12 (b) 表示一处在匀强电场中且与  $E$  的夹角为  $\theta$  的电偶极子。如果没有其他外力的作用，它们在磁场或电场力矩的作用下，最终都转到与磁场或电场方向一致。

可见载流线圈在磁场中的表现与电偶极子在电场中的表现非常类似，所以也称它为磁偶极子。

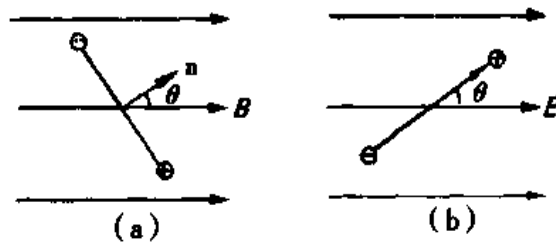


图 9-12 载流线圈和电偶极子的对比

## 四、霍尔效应

在均匀磁场  $B$  中放入通有电流  $I$  的导体或半导体薄片，使薄片平面垂直于磁场方向，这时在薄片的两侧产生一个电势差，这种现象叫霍尔效应，产生的电势差称为霍尔电势差。

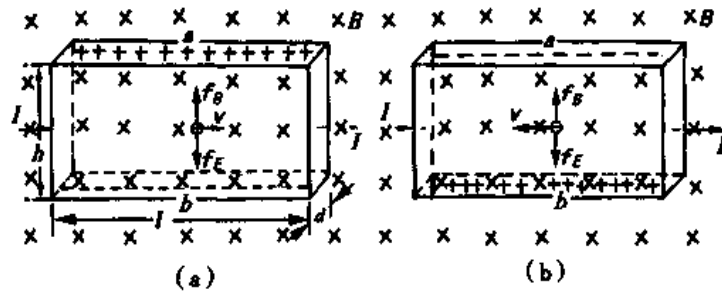


图 9-13 霍尔效应

在图 9-13 中，设薄片中的载流子的电量为  $+q$ ，漂移速度为  $v$ ，方向与电流方向一致，磁场方向垂直纸面向里，这时，电荷  $+q$  受到向上的洛伦兹力  $f = qvB$ ，正电荷向上表面  $a$  聚集，负电荷向下表面  $b$  聚集，形成一个方向向下的电场。此电场阻止载流子的继续移动，随着两侧电荷的积累，电场逐渐加强，当电场力与洛伦兹力相等时达到平衡，此时

$$Eq = qvB$$

即薄片形成稳定电场的场强为

$$E = vB \quad (9-23)$$

则 
$$E = \frac{U_a - U_b}{h} = vB$$

或 
$$U_{ab} = U_a - U_b = vBh$$

由于电流强度为  $I = JS = nqvhd$ ，式中  $J$  为电流密度， $n$  为单位体积内的载流子数，

所以  $v = I / nqhd$ ，则 
$$U_{ab} = \frac{1}{nq} \cdot \frac{IB}{d}$$

令  $K = \frac{1}{nq}$ ，上式变为 
$$U_{ab} = K \cdot \frac{IB}{d} \quad (9-24)$$

$K$  称为霍尔系数，它与薄片的材料有关，材料的载流子密度  $n$  越大， $K$  就越小。为了得到较大的霍尔系数，常采用载流子浓度较低的半导体材料。

霍尔效应广泛应用于半导体材料的测试和研究上，还可利用霍尔效应制成霍尔元件来测量磁场，测量直流和交流电路的电流和功率等。

## 五、质谱仪和回旋加速器

1. 质谱仪 现在已广泛应用于实验室以及医学研究上。利用质谱仪可以分离质量相差只有 1 个质量单位的轻离子，用它来测量质量的准确度可以达到千万分之一。质谱仪的基本结构如图 9-14 所示。待分析的离子经过电场加速后进入速度选择器，

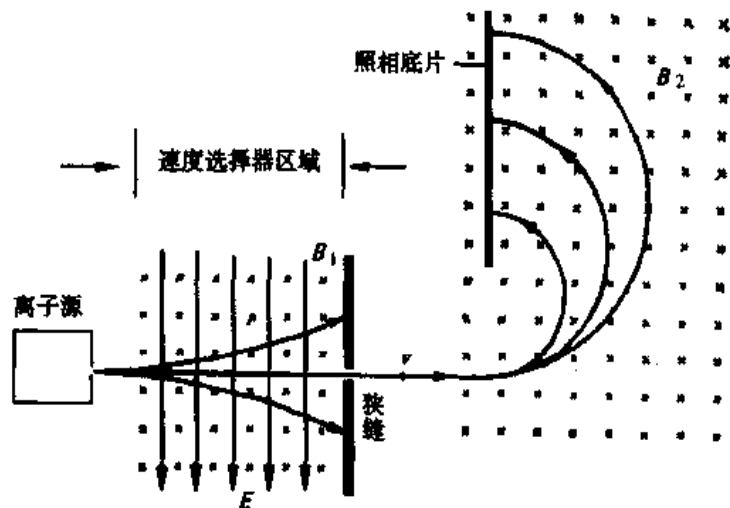


图 9-14 质谱仪

速度选择器由磁场  $B$  和与它互相垂直的电场  $E$  所组成。带电粒子在通过时受到的洛伦兹力为  $Bqv$ ，受到的电场力为  $qE$ 。当两力相等而方向相反时，即：

$$Bqv = qE \quad \text{或} \quad v = \frac{E}{B}$$

粒子不受力的作用，直线通过狭缝。如果粒子的速度大于或小于  $E/B$ ，则它会受到力的作用向旁偏转，不能通过狭缝。所有通过狭缝的离子都带同一种电荷并且具有相同的速度。当这些离子垂直进入另一个磁场，在洛伦兹力作用下作圆周运动。圆周运动的半径为：

$$r = \frac{m \cdot v}{q \cdot B}$$

式中的  $v$  和  $B$  都是不变的量，因此  $r$  和粒子的质量电荷比  $m/q$  成比例。在离子的电荷相同时， $r$  与  $m$  成正比。这些离子在磁场中运动半周后落在照相底版上，根据离子在底版上曝光的位置和浓淡程度，就可以测定和比较不同离子的质量数和丰富度。

**2. 回旋加速器** 回旋加速器的应用也非常广泛，它利用电场和磁场诱导粒子并使之加速，从而形成一高速的带电粒子束。回旋加速器的基本结构如图 9-15 所示。回旋加速器的主要部分是一对金属制成的空盒，两盒相对应的直径边缘是相互平行的，但隔开一窄小缝，离子源位于小缝的中心附近。两盒接至一高频的交流电源上，所以两盒缝隙之间的电场不断地交替变化。整个容器垂直放置在一个强大的均匀磁场中。设有一电荷  $+q$ 、质量为  $m$  的离子从离子源  $S$  射出，此时  $D_1$  为正电位的瞬间，这离子被盒间的电场加速，并

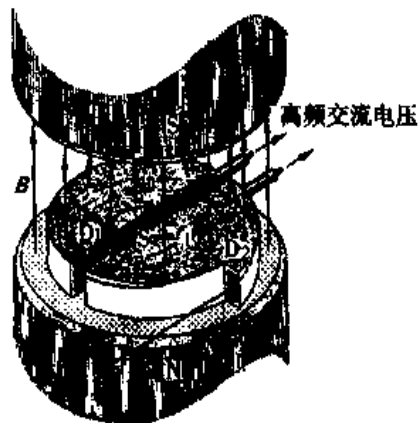


图 9-15 回旋加速器



以  $v_1$  的速度进入  $D_2$  内部的无电场区域。因为这离子的运动与磁场垂直，所以这离子将作圆周运动，其半径为  $r_1 = \frac{mv_1}{Bq}$ 。如果在离子走完一个半圆所需的时间内，电场反向，即它的方向指向  $D_1$ ，当这离子再次经过  $D$  盒间缝隙时又将被加速，在进入  $D_1$  时就具有较大速度  $v_2$ ，并以较大的半径走一半圆，然后再进入缝隙中。则离子的角速度  $\omega = \frac{v}{r} = B \left( \frac{q}{m} \right)$ 。可见，离子的角速度与离子的速度和它运行圆的半径无关，而只依赖于磁感应强度和这离子的荷质比 ( $q/m$ )。所以离子的运动只要与交变电场保持同步，运动若干周后，被加速离子的速度就可以达到很高。

## 六、电磁泵和电磁船

**1. 电磁泵** 电磁泵是一种利用作用在导电液体上的磁力来运送导电液体的装置，它的结构原理如图 9-16 所示。在液体中通过电流，使电流的方向垂直于磁感应强度  $B$ ，则液体受到一个沿管子方向的推力，使它向前流动。这种泵在医学上常用于泵运血液或其他电解溶液。它的特点是没有任何运动的部件，不会使血液中的细胞受到损害。另外它是全部密封的，减少了污染的机会。在人工心肺机和人工肾装置中常采用电磁泵来运送液体。

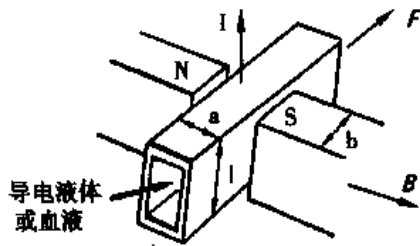


图 9-16 电磁泵

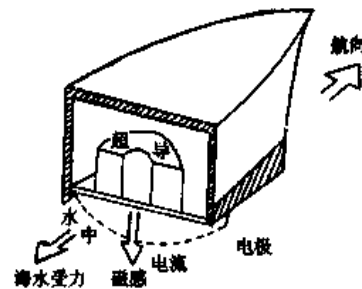


图 9-17 电磁船

**2. 电磁船** 电磁船的左右船舷装有电极，电流沿船体外的海水从正极流回负极，船内装有超导电磁体，产生一个强大的、垂直于海平面的磁场。接通电流后，通有电流的海水受到安培力的作用，其大小为  $F = IBl$ 。与此同时船体受到海水的反作用，被推向相反的方向，使船前进。其原理如图 9-17 所示。电磁船的船速可达到  $180\text{Km}\cdot\text{h}^{-1}$ ，另外，它节省燃料，不用螺旋桨，维修方便，是一种理想的船。

## 七、磁带与磁头

**1. 磁带** 磁带是一种重要的磁表面存储器，它利用磁性材料的磁化来记录信息，可以将各种电信号转化为磁带上的磁化信息，并以剩磁的形式把这些信息存储在磁带上，而记录在磁带上的磁化信息可以通过重放电路转变为电信号，重现原始记录信号。

**2. 磁头** 磁头是实现磁带读/写的关键元件。磁头由高导磁材料构成，上面绕有线圈。由一个线圈兼作写入磁化与读出，或分设读磁头与写磁头。磁头上面面向磁带磁介质的部分开有间隙，称作磁头间隙。写入时，大部分磁通将流经磁头间隙所对的

磁带磁介质局部区域，使该作用区域留下某种磁化状态。读出时，记录有信息的磁带磁介质经过磁头，由于对着磁头的区域中存在磁化状态翻转，使磁头的磁路中发生磁通变化，读出线圈产生感应电势，即读出信号。

## 八、生物医学电磁传感器

用电磁感应原理制成的传感器种类很多，这里主要介绍电磁流量计，它是一种测量血液速度的仪器，原理如图 9-18 所示。

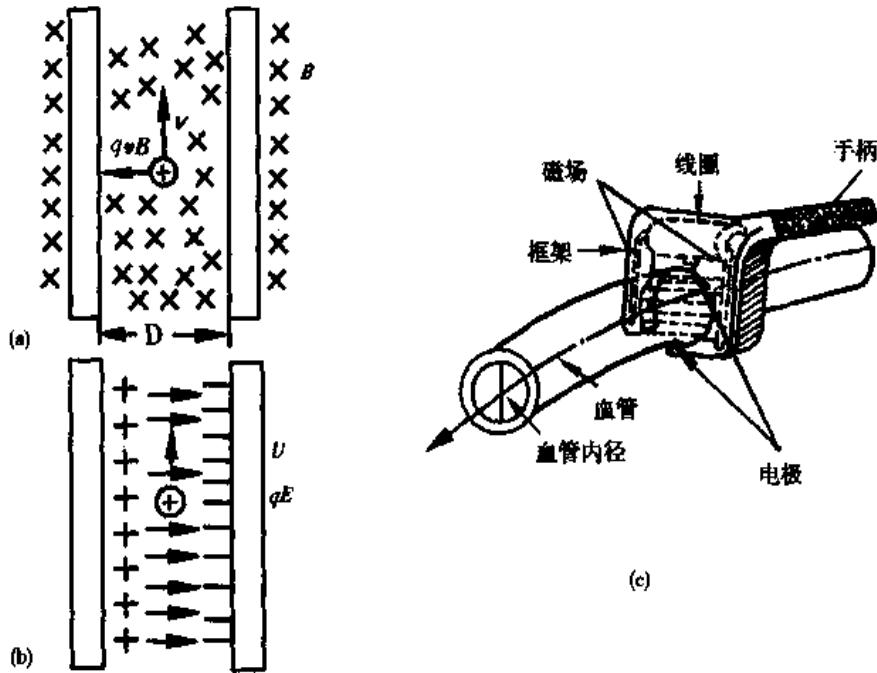


图 9-18 电磁流量计

设血液中的带电粒子以速度  $v$  在直径为  $D$  的血管中运动，它的流向与外加磁场  $B$  互相垂直。血流中带正电  $q$  的粒子受到一个大小为  $qvB$  的洛伦兹力，方向向左。带负电的粒子，则受到向右的洛伦兹力。这样正负粒子分别积聚在两侧的管壁上，在其间形成电势差  $U$  和电场  $E$ ，平衡时

$$qvB = Eq$$

假设正负电荷均匀分布在管内的两侧，其间的电场可以看成是均匀电场，则有

$$E = U/D$$

故得

$$U = DvB \quad (9-25)$$

即在血管相对两壁得到和血流速度成正比的电势  $U$ 。这种流速计主要供心脏和动脉手术中测血流速度用。

## 第四节 磁 介 质

前面我们讨论的电流磁场是指电流在真空(或空气)中而言的，如果电流在其他介质中，情况又有所不同。

在磁场作用下能发生变化,并能反过来影响磁场的物质称为磁介质。实际上所有的物质在磁场作用下都会或多或少地发生变化,并能影响原磁场,因此,都是磁介质。

### 一、介质中的磁场

处于磁场中的磁介质将被磁场磁化,从而产生一附加磁场  $B'$ 。由于附加磁场的存在,介质中的磁感应强度  $B$  应等于真空中的磁感应强度  $B_0$  与附加磁场  $B'$  的矢量和。即

$$B = B_0 + B' \quad (9-26)$$

不同的磁介质在磁场中磁化的程度也不一样,我们用比值  $B/B_0$  来表征介质的磁化程度,即

$$\mu_r = \frac{B}{B_0} \quad \text{或} \quad B = \mu_r B_0 \quad (9-27)$$

$\mu_r$  称为介质的相对磁导率,它是一个无量纲的纯数,其大小由磁介质的性质决定。表 9-1 中列出了一些物质的相对磁导率。式(9-27)表明,磁介质被磁化后,介质中的磁感应强度是真空中磁感应强度的  $\mu_r$  倍。真空中  $\mu_r = 1$ 。

表 9-1 一些物质的相对磁导率  $\mu_r$

|     | 物 质        | $\mu_r$                   |
|-----|------------|---------------------------|
| 顺磁质 | 铝          | $1 + 0.21 \times 10^{-4}$ |
|     | 氧(标准状况)    | $1 + 17.9 \times 10^{-7}$ |
|     | 空气(标准状况)   | $1 + 3.6 \times 10^{-7}$  |
|     | 铂          | $1 + 2.9 \times 10^{-4}$  |
| 抗磁质 | 铋          | $1 - 7.0 \times 10^{-5}$  |
|     | 铜          | $1 - 0.94 \times 10^{-5}$ |
|     | 水          | $1 - 0.88 \times 10^{-5}$ |
|     | 氢(标准状况)    | $1 - 0.21 \times 10^{-6}$ |
| 铁磁质 | 铸钢         | 500 ~ 2200                |
|     | 硅钢         | 7000 (最大值)                |
|     | 纯铁(99.95%) | 1800 (最大值)                |
|     | 坡莫合金       | 100000 (最大值)              |

在充满相对磁导率为  $\mu_r$  的均匀磁介质中,毕奥 - 萨伐尔定律可表示为

$$dB = \mu_r dB_0 = \frac{\mu_r \mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Idl \sin\theta}{r^2}$$

或 
$$dB = \frac{\mu}{4\pi} \cdot \frac{Idl \sin\theta}{r^2} \quad (9-28)$$

上式中  $\mu = \mu_r \mu_0$ , 称为介质的绝对磁导率,简称磁导率。它与  $\mu_0$  有相同的单位都是  $T \cdot m \cdot A^{-1}$ 。

由式(9-28)可以看出,当起磁电流  $I$  为已知时,介质中的磁感应强度与介质有关。

如果将式(9-28)改写为:

$$d\left(\frac{B}{\mu}\right) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{Idl\sin\theta}{r^2}$$

令  $\frac{B}{\mu} = H$ ,  $H$  为新引入的物理量, 它也是矢量, 称为磁场强度, 这样, 上式就变为

$$dH = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{Idl\sin\theta}{r^2} \quad (9-29)$$

式(9-29)说明, 当起磁电流  $I$  给定后, 介质中各处的磁场就确定了。 $H$  与介质的种类无关。在各向同性的介质中,  $H$  的方向与  $B$  的相同。用  $H$  来处理有介质存在时的磁场, 会使问题变得简单得多。

## 二、顺磁质、抗磁质和铁磁质

根据磁介质在磁场中磁化的不同效果, 磁介质可分为三类。

1. 顺磁质 这类磁介质磁化后具有与外磁场同方向的附加磁场, 因此  $B > B_0$ ,  $\mu_r > 1$ 。绝大部分物质属于这一类, 如氧、锰、铬等。顺磁质具有的磁性称为顺磁性。

2. 抗磁质 这类磁介质磁化后具有与外磁场反方向的附加磁场, 因此  $B < B_0$ ,  $\mu_r < 1$ 。如铜、铋、铊及惰性气体。抗磁质具有的磁性称为抗磁性。

3. 铁磁质 这类磁介质在外磁场中能产生很强的、与外部磁场方向相同的附加磁场, 因此  $B \gg B_0$ ,  $\mu_r \gg 1$ 。如铁、镍、钴及某些合金。铁磁质所具有的磁性称为铁磁性。

构成生物体的各种生物大分子也都具有磁性。绝大多数生物大分子是各向异性抗磁质, 少数为顺磁性(如含 Fe 的血红蛋白、肌红蛋白和铁蛋白, 生物体中的自由基等), 只有极少数呈现铁磁性。外加磁场对生物磁性有一定影响, 这可能对一些生物功能和生命现象发生作用。

## 三、超导体及其磁学特性

1911年荷兰物理学家卡曼林-昂尼斯(H. K. Onnes)在检测水银的低温电阻时, 发现在 4.2K 时电阻突然消失, 这时用磁铁穿过水银环路, 使环路感应出电流, 电流就会长时间持续流动不息, 这现象称为超导现象, 这是低温下的奇异特性。昂尼斯因发现超导现象以及将被称为永久气体的氮液化成功, 于 1913 年获诺贝尔物理奖。但是 70 多年来, 由于超导材料的临界温度、临界磁场和临界电流都太低, 因而没有得到应用。至 1986 年, 瑞士物理学家缪勒(Müller)和德国的物理学家柏诺兹(Bednerz)发现钡铜氧化物在 30K 时呈超导性, 这项新突破使他们获 1987 年诺贝尔物理学奖, 同时导致在全世界范围掀起探索高温超导热潮, 并且迅猛发展。1987 年 2 月, 中国科学院物理所宣布赵忠贤等人获得转变中点温度为 92.8K, 出现零电阻温度为 78.5K 的超导材料, 闯进了在液氮温区实现超导, 使我国的超导研究处于世界领先地位。目前超导材料的最高转换温度已达到 123 K。

1. 超导体 我们已经知道, 通常物质的电阻与温度有关, 随着温度的降低, 金属的导电率会变大。昂尼斯在研究物质的电阻随温度变化关系的实验中, 发现水银在 4.2K 低温下, 电阻突然消失(即电阻等于零)。多次反复的实验展示了图 9-19 的结果, 这个图的横坐标是温度(K), 纵坐标是在该温度下的水银电阻与 0℃水银电阻之比。由图可以看出, 水银在 4.2K 附近进入零电阻的新物态。由于物质在低温下电阻突然消失, 就意味着具有超乎寻常的导电能力, 因而人们把物质的温度下降到某一定值时, 该物质的电阻完全消失这一现象称为超导电现象。物质失去电阻的性质叫超导电性。凡是具有超导电性的物质称为超导体。当超导体显示出超导电性时, 我们就说它处于超导态。超导体开始失去电阻时的温度称为超导转变温度或临界温度, 用符号  $T_c$  表示。实际上, 由正常态向超导态的过渡是在一个温度间隔内完成的, 我们把这个温度间隔称为转变宽度, 用符号  $\Delta T_c$  表示。不同性质的材料, 它们的转变宽度是不一样的。在一般情况下, 纯净的单晶样品, 其转变宽度很小; 而多晶体或含有机械应变和杂质的样品, 其转变宽度较大。如图 9-20 所示, 曲线 1 是纯锡单晶, 曲线 2 是纯锡多晶, 曲线 3 是不纯的锡多晶, 由于转变宽度的存在, 通常我们把样品电阻下降到正常态电阻值一半时所处的温度定义为  $T_c$ 。

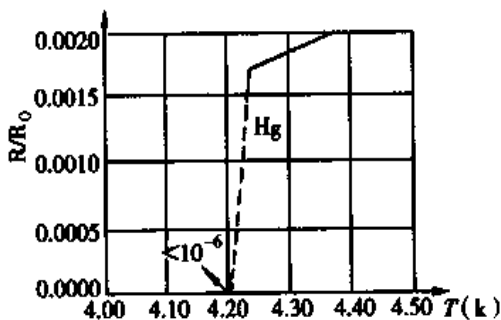


图 9-19 水银电阻随温度的变化

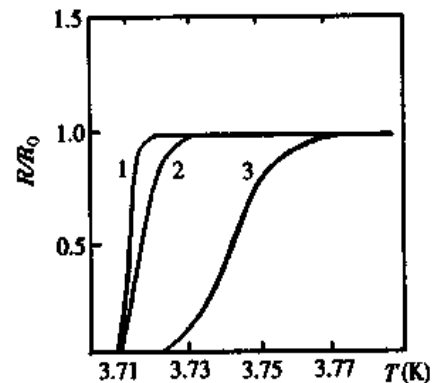


图 9-20 不同样品的超导转变温度

哪些物质可能成为超导体呢? 根据已经发现的超导体可以概述两条: ①超导金属元素位于门捷列夫周期表的中部, 而一价金属、铁磁质和抗铁磁质都不是超导体; ②许多化合物或合金也具有超导性, 一般说来, 它们的转变温度较高。

超导态金属既然电阻为零, 因此, 当恒定直流电流通过超导态金属时, 金属两端不产生电势差, 导体内电场为零, 因而也不产生功耗。用超导金属制成圆环, 并通过电磁感应在环中激起电流, 这种电流持续时间可达数年之久。常温下, 超导体的导电性比普通金属差。

2. 迈斯纳效应 超导体不仅在超导态时具有零电阻的特性, 而且还具有抗磁性, 外界磁场不能渗入超导体内。这一现象是迈斯纳(Meissner)于 1933 年发现的, 故称为迈斯纳效应。迈斯纳对球形导体(单晶锡)的磁场分布进行实验测量发现, 对于超导体来说, 不论是先冷却成为超导体, 后加外磁场; 还是先加外磁场, 后冷却成为超导体, 只要锡球转变成了超导态, 在锡球周围的磁场都会发生突然变化, 磁力线被立即

排斥到锡球之外。也就是说，当样品从正常态转变到超导态后，无论在这之前有没有外加磁场，只要  $T < T_c$ ，超导体内的磁感应强度  $B$  总是零，即具有完全抗磁性。如图 9-21 所示，图 (a) 到图 (b) 表示在无外磁场的情况下，经冷却使样品变为超导体。图 (c) 为样品转变为超导体后加上了外磁场的情况。图 (d) 表示对样品先加上了外磁场，磁通线可以穿过样品内部。图 (e) 表示样品经冷却后变为超导体，这时磁通线绕样品周围而通过。人们判断物质是否具有超导性常常利用迈斯纳效应。

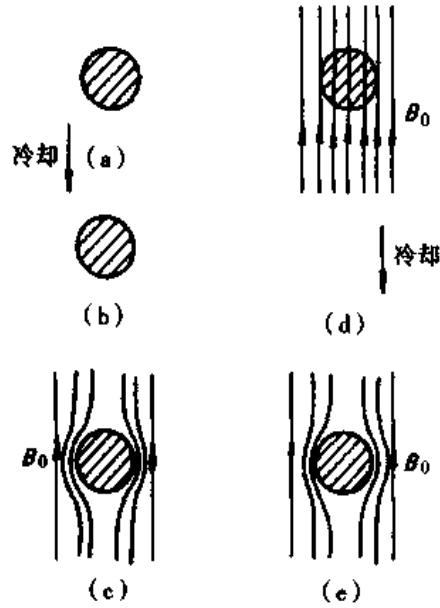


图 9-21 超导体的抗磁性

需要指出，超导体有三个重要的临界参量，即临界温度  $T_c$ 、临界磁场  $H_c$  和临界电流  $I_c$ 。前面我们已经对  $T_c$  作了介绍，我们知道当温度高于临界温度  $T_c$  时，超导态就被破坏了。通过实验还发现，超导电性也可以被外加磁场所破坏。

对于温度为  $T < T_c$  的超导体，当外加磁场超过了某一数值  $H_c$  的时候，超导电性也会被破坏，我们把  $H_c$  称为临界磁场。我们对一长直圆柱形超导体，先将其温度降到临界温度  $T_c$  以下，然后外加一个与圆柱轴线平行的均匀磁场。实验表明，在低于样品  $T_c$  的温度下，当外加磁场强度  $H$  小于某一确定值  $H_c$  时，超导体处于超导态，电阻等于零。当  $H$  增大到  $H_c$  时，突然出现电阻，超导态被破坏而转变为正常态。实验还表明，当通过超导体的电流超过一定的数值  $I_c$  后，超导态也会被破坏，而转变为正常态， $I_c$  称为超导体的临界电流。超导体在医学中有重要应用，超导磁共振成像仪就是应用的例子之一。

## 第五节 磁场的生物效应

人类和动物能够感受到各种物理刺激，例如声、光、电、热等。但能否感知到磁的存在呢？生命活动中伴随有生物电的出现，因此必然也有磁场出现，在外磁场中，对生命活动会带来怎样的影响以及生物磁场如何测定？这些问题是我们这一节所要讨论的内容。

### 一、生物磁现象

地球是一个大磁体，在地球上的各种生物无不受其影响。研究表明某些鸟类、海豚、鱼、蜗牛和某些细菌就是依据地磁场来定向的。

人体的许多功能和活动都是电荷的运动再通过神经系统的活动来传导的，所以，伴随着生物电现象的同时必然有生物磁现象的产生。生物磁信号非常微弱，心磁场约为  $10^{-11}\text{T}$ ；脑磁场只约为  $10^{-12}\text{T}$  等。产生生物磁场的另一个原因是，某些铁磁性物

质被吸入肺脏或随食物进入胃肠器官并沉积在里面，当这些磁性物质被地磁场或外界磁场磁化后，它们就成为小磁石残留在体内，从而也在体外产生一定的生物磁场。此外，在外界因素的刺激下，生物机体的某些部位可产生一定的诱发电位，同时产生一定的诱发磁场，如  $10\mu\text{V}$  的诱发脑电位可引起  $10^{-13}\text{T}$  的诱发脑磁场，这种诱发的磁信号也是生物磁场。

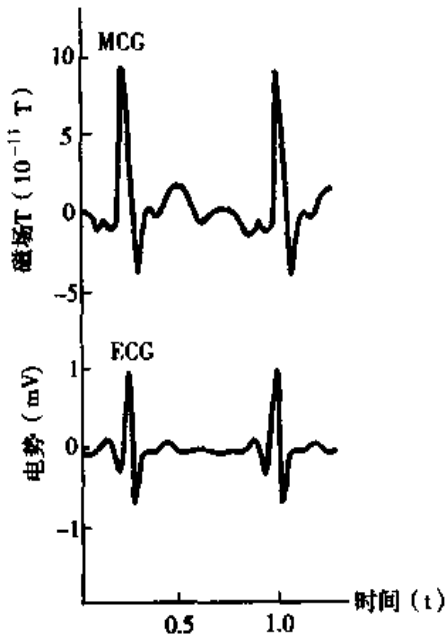


图 9-22 心电图和心磁图

1963 年鲍莱 (Baule) 等人首先记录到人体心脏电流所产生的磁场，称其为心磁图 (MCG)。近年来，随着对心磁图研究的不断深入，并对照研究大量心脏病患者的心磁图和心电图的资料后，发现对某些疾病的诊断，用心磁图方法的灵敏度和准确度都优于心电图，如对左心室肥厚和高血压病的正确诊断率心磁图可达 40% ~ 55%，而心电图只有 14% ~ 20%。此外，心磁图的优点还在于它能测出肌肉、神经等组织损伤时所产生的直流电磁场，故对早期心肌梗死所产生的损伤电位的直流电磁场在心磁图中有反映。所以，对早期和小范围的心肌梗死可及早作出诊断。图 9-22 表示正常心磁图和心电图的对照。

1968 年科恩 (Cohen) 首次在头颅的枕部测到与脑电图相对应的自发脑磁图 (MEG)，目前利用脑磁图来确定癫痫病人的病灶部位明显优于脑电图。

对肺磁场的研究目前也十分活跃，记录肺磁场随时间变化的曲线称为肺磁图 (MPG)，它可比 X 射线更早发现肺受到磁污染的职业病人。利用灵敏的磁强计可探测到肺部强磁物质剩磁产生的肺磁场，并据此来估计肺受到的磁粉尘污染。近年来，肺磁学的研究又开拓出一个新的领域，即对细胞微结构中细胞内运动的磁性进行测量，用以了解细胞游动的力学情况。

目前对生物磁信号的测量除上述几方面外，对眼磁场、神经磁场和肌磁场等的研究也十分活跃，可望在不久将来，上述诸方面都能获得广泛的临床应用。

## 二、磁场的生物效应

大量实验和临床实践表明：磁场对生命机体的活动及其生理、生化过程有一定影响。这些影响与磁场强度、磁场类型 (恒定磁场或变化磁场)、磁场方向以及作用时间有关。小鼠在磁场完全被屏蔽的环境中体内酶活性发生强烈的变化，寿命显著缩短；而  $0.5\text{T}$  的磁场则对小鼠有致死作用。恒定磁场对组织的再生和愈合有抑制作用，而脉冲磁场却对骨质愈合有良好的效果。交变磁场的频率也影响其对生物机体的作用，例如在研究磁场对血液的作用时，发现频率为  $50 \sim 20000\text{Hz}$  的脉冲磁场中，只有频率为  $1 \sim 2\text{kHz}$  的磁场会促进血液的纤溶性质，其他频率的磁场对纤溶性有抑制作用。磁

场对生物的作用与磁场方向有关，通常是当磁场方向和生物体轴保持某一角度时其作用最大。例如当磁场的方向从大鼠背部指向腹部时会减少白细胞的数目。如果磁场方向是任意的，则磁场的强度要增大2倍才能明显地看到白细胞的减少。磁场的生物效应还与磁场作用时间的长短有关。

目前磁场疗法已广泛地应用于临床，对某些疾病如活血化瘀、消炎镇痛、安神降压、肌肉劳损、关节炎及气管炎等均有较好的疗效。

至于治疗的机制、病种、各种类型磁场的强度、作用部位、治疗时间等均在不断实践和探索中。

### 三、生物磁场的测定

地球磁场的强度约为  $10^{-5}\text{T}$ ，城市中的各种磁噪声也十分严重，强度可达  $10^{-8} \sim 10^{-6}\text{T}$ ，在这样强的磁噪声中要测量十分微弱的生物磁信号，必须有高灵敏度的磁强计和良好的磁屏蔽室，以防止周围环境的噪声干扰。由于这些条件的限制，使得对生物磁信号的研究进展的很缓慢。直到60年代后期，随着测量技术的不断发展，陆续研制出了一系列的测量手段，如感应线圈式磁强计灵敏度可达  $10^{-8}\text{T}$ ，磁通门式磁强计灵敏度可达  $10^{-10}\text{T}$ ，超导量子干涉仪又称 SQUID 磁强计，灵敏度可达  $10^{-15}\text{T}$ 。下面仅对 SQUID 磁强计作些介绍。

超导量子干涉仪就是一个磁电变换器，由磁通量变化转变成电量的变化，由于灵敏度极高，故可以测量记录人体磁场。SQUID 磁强计的核心部件是约瑟夫逊器件构成的超导环，它对环内磁通的变化非常灵敏，是一种灵敏度极高的磁场传感器。

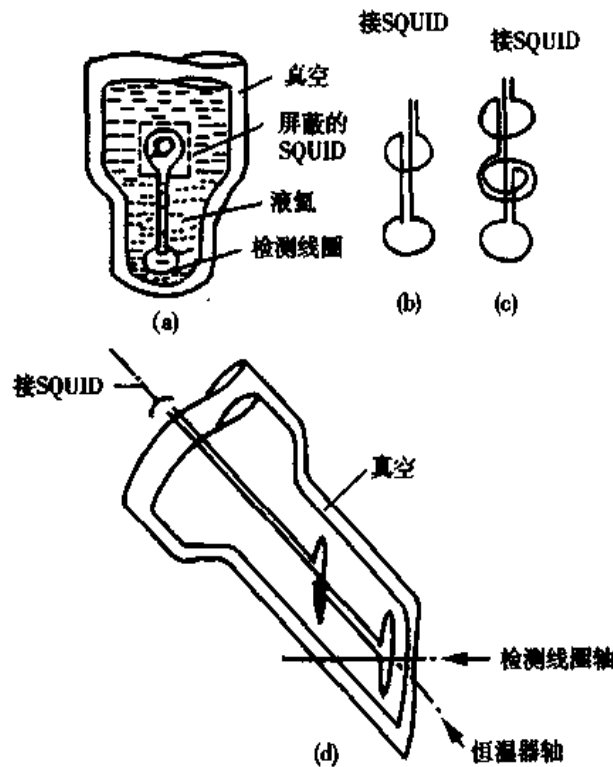


图 9-23 磁强计和梯度计



SQUID 磁强计结构示意图如 9-23 (a)所示, 它有三部分, 即 SQUID 本身, 被密封在一个超导屏蔽的小盒内, 可对干扰磁场进行部分屏蔽; 第二部分是检测线圈, 用来探测磁场; 第三部分是杜瓦瓶, 内盛液氮。SQUID 及探测线圈均置于瓶中液氮内, 保证其需要的温度, 可达 4.2K。为了提高抗干扰能力, 通常将检测线圈改为梯度仪, 图 9-23 (b)、(c)分别为一阶微分梯度仪和二阶微分梯度仪。梯度仪是由两个相隔很近、同样的线圈沿同轴反向串接而成。当两线圈所处磁场不均匀时, 才有磁通变化, 从而引起超导环内的磁通发生相应的变化; 而在均匀磁场中时, 超导环内总磁通维持

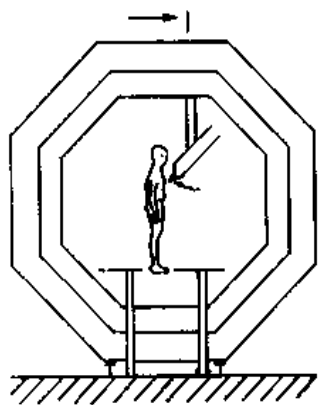


图 9-24 磁屏蔽室装置及人体受测试的示意图

恒定, 即它对均匀磁场是不灵敏的, 因而抵抗来自远处的干扰。当把每一瞬的干扰磁场视为均匀场时, 梯度仪将无信号输出给 SQUID。人体磁场在梯度仪这个小范围内是不均匀的, 靠近人体的线圈处的磁场变化产生的信号必然大于另一线圈处的磁场变化产生的信号, 梯度仪将两个线圈的信号差输出给 SQUID, 这就提高了信噪比。当把每一瞬时干扰磁场视为均匀梯度场时, 采用二阶微分梯度仪, 它是由两个梯度仪同轴反向串接而成, 两个梯度仪所测得的干扰磁场信号互相抵消。人体磁场不是均匀梯度场, 取其信号差输出, 这种二阶微分梯度仪具有更高的抗干扰能力, 可使信噪比提高 3~4 个数量级。图 9-23 (d)是一个倾斜 45°的梯度仪, 当其沿长轴转动时, 可连续测出磁场在坐标上的 2 个分量的值。使用磁

强计时, 检测线圈不与皮肤接触, 可相隔 3~5cm。据报道, 由于超导体研究的发展, 国外有用 Y-Ba-Cu-O 超导材料制成的各种氧化物超导容器, 它对外磁噪声有着优越的屏蔽效应, 可使外界干扰磁场减弱约  $10^7$  倍。它比高磁导率的常规合金制成的超导屏蔽容器的屏蔽作用高 2~3 个数量级。它的另一个优点是可以利用价格较廉的液氮冷却。用这种超导容器制成的超导量子干涉仪, 不仅进一步提高了信噪比, 而且成本大大降低, 对生物磁学的发展具有重要意义。

若将人体置于磁屏蔽室中进行各种生物磁信号的测量, 可得到更精确的测量结果。磁屏蔽室如图 9-24 所示。为了屏蔽地磁噪声, 可用三层坡莫合金包围; 为了屏蔽交变磁场, 可用铝包围; 磁屏蔽室可使信噪比提高 10000 倍以上。我国已建有磁屏蔽室, 而且正在研究高水平的超导量子干涉仪。

## 第六节 电磁感应定律

自从奥斯特发现了电流产生磁场的现象以后, 人们就致力研究电磁效应的逆现象, 即如何利用磁场来产生电流, 这个研究导致了电磁感应现象的发现。

### 一、电磁感应定律

法拉第经过 10 年的精心研究, 终于在 1831 年第一次发现了磁也能产生电。他指

出：只要穿过闭合回路的磁通量发生变化，回路中就有电流产生。这种现象称为电磁感应，这样产生的电流称为感应电流。闭合回路中磁通量变化的直接结果是产生感应电动势，感应电流只是感应电动势存在的外观表现。

法拉第从实验中总结出感应电动势与磁通量变化之间的关系，建立法拉第电磁感应定律，指出：不论任何原因使通过回路面积的磁通量发生变化时，回路中感应电动势  $\epsilon_i$  的大小与磁通量对时间的变化率成正比。用 SI 单位制，则数学表示式为

$$\epsilon_i = - \frac{d\phi}{dt} \quad (9-30)$$

式中负号是表示感应电动势的方向，可用下述方法确定。在回路上先任意规定一个绕行方向作为回路的正方向，再用右手螺旋定则确定这回路的正法线方向，将通过回路面积的磁通量  $\phi$  与正法线方向相同者规定为正值，相反者为负值。于是  $\epsilon_i$  的正负完全由  $\frac{d\phi}{dt}$  决定：如  $\frac{d\phi}{dt} > 0$ ，则  $\epsilon_i < 0$ ，表示感应电动势的方向与回路上所选定的绕行正方向相反；如  $\frac{d\phi}{dt} < 0$ ，则  $\epsilon_i > 0$ ，表示感应电动势的方向与回路上所选定的绕行正方向相同。这与楞次定律是一致的，即：闭合回路中感应电流的方向，总是企图使感应电流本身所产生的通过回路面积的磁通量，去反抗引起感应电流的磁通量的改变。

使通过回路面积的磁通量发生变化的方法很多。例如，可以变化磁感应强度  $B$ ；可以变化回路的面积  $S$ ；也可以变化回路面积的法线与磁感应强度方向之间的夹角  $\theta$ 。不论是哪种方法，都可以用法拉第电磁感应定律来计算感应电动势。式(9-30)只适用于单匝导线组成的回路。如果回路不是单匝线框而是多匝线圈，那么当磁通量变化时，每匝中都将产生感应电动势。由于匝与匝之间是互相串联的，整个线圈的总电动势就等于各匝所产生的电动势之和。令  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N$  分别是通过各匝线圈的磁通量，则

$$\begin{aligned} \epsilon_i &= - \frac{d\phi_1}{dt} - \frac{d\phi_2}{dt} - \dots - \frac{d\phi_N}{dt} \\ &= - \frac{d}{dt} (\phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_N) = - \frac{d\psi}{dt}, \end{aligned} \quad (9-31)$$

式中  $\psi = \phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_N$  称为磁通匝链数或全磁通。如果穿过每匝线圈的磁通量相同，均为  $\phi$ ，则  $\psi = N\phi$ 。

$$\epsilon_i = - \frac{d\Psi}{dt} = - N \frac{d\phi}{dt}. \quad (9-32)$$

## 二、动生电动势

电磁感应可分两种情形来理解。一种是在稳恒磁场中运动的导体内产生感应电动势，称为动生电动势；另一种是导体不动，因磁场变化而产生的感应电动势，称为感生电动势。

作为法拉第电磁感应定律的一个应用，我们计算图 9-25 所示的 abcd 回路中，因导线 ab 的运动是导体在稳恒磁场中运动而产生电动势，故为动生电动势。我们可以用导线切割磁力线的概念来进行计算。设导线 ab 的长度为  $l$ ，在匀强磁场  $B$  中以速

度  $v$  向右运动，并假定  $l$ 、 $v$ 、 $B$  三者互相垂直。先设定逆时针方向为回路正方向。在  $dt$  时间内， $l$  向右移动  $dx$  距离。因  $dS = ldx > 0$ ，又因磁通量  $\phi$  与回路法线方向相反，故  $d\phi = d(-BS) = -Bl dx < 0$ ，或  $\frac{d\phi}{dt} < 0$ ，于是

$$\epsilon_i = -\frac{d\phi}{dt} = Bl \frac{dx}{dt} = Blv。$$

$\epsilon_i$  为正，说明电动势方向与原设方向相同。

我们也可以利用金属电子理论来分析动生电动势这一现象。在图 9-25 中，磁场方向垂直于纸面向里，当导线  $ab$  在纸面内以速度  $v$  向右运动时，导线内每个电子受到大小为  $f = evB$  的洛伦兹力的作用，使电子沿导线向  $b$  端移动，结果在  $b$  端出现负电荷，而在  $a$  端出现正电荷。这些正负电荷在导体内部产生一静电场  $E$ ，方向从  $a$  指向  $b$ 。这电场使导体内的电子受到一个从  $b$  指向  $a$ 、大小为  $eE$  的静电力作用，阻止电子由  $a$  向  $b$  的运动。因此在磁场中运动着的导体内，每个电子要受到两个相反方向的作用。当达到平衡时，这两个力相等，即：

$$eE = evB，$$

所以

$$E = vB$$

上式说明，平衡时，导体内部存在一个静电场  $E$  和一个非静电场  $vB$ ，两者大小相等而方向相反，因此导体内的自由电子就不再向  $b$  端积累， $ab$  可看成是一个电源， $a$  端成为电源的正极， $b$  端为负极。根据定义，电源电动势的大小等于把单位正电荷从电源的负极经电源内部移到正极时非静电力所作的功，于是有

$$\epsilon_i = \int_0^l vB dl = vBl$$

从这些分析可见，形成动生电动势的根本原因是洛伦兹力，此力为非静电力。动生电动势只可能存在于作切割磁力线运动的这段导体上，这段导体相当于一个开路的电源， $a$  端为正极， $b$  端为负极。如果与外电路相连接，电流将从  $a$  端流出通过外电路而流向  $b$  端。在  $ab$  的内部，电流是由  $b$  流向  $a$ ，可见动生电动势  $\epsilon_i$  在导线  $ab$  中的方向是从  $b$  指向  $a$  的。而不动的那部分导体上则没有电动势，它只提供电流流动的通路。

### 三、感生电动势 涡旋电场

洛伦兹力能够说明导线在磁场中切割磁力线运动时所引起的电磁感应现象，即动生电动势。但不能说明导线回路保持不动，而使穿过回路面积的磁通量发生变化时所引起的电磁感应现象。后一情况下产生感生电动势，需按麦克斯韦关于电磁场的理论来说明。他认为，感生电动势是由于随时间变化的磁场  $\left(\epsilon_i = -\frac{d\phi}{dt}\right)$  在其周围空间产生了电场所致。这种电场与静电场不同，它的电力线没有起点也没有终点，是一些涡旋状的闭合曲线，因此叫涡旋电场。在涡旋电场中如果有导体回路存在，在导体回路

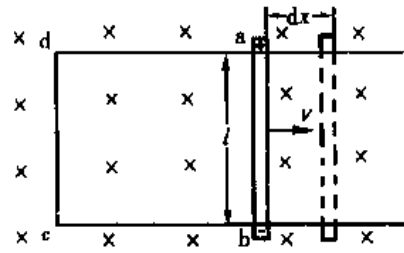


图 9-25 导体在磁场中运动

中就将产生感生电动势。如果空间没有任何导体回路，只要磁场随时间变化，空间就会有涡旋电场存在。

## 第七节 生物电阻抗

### 一、生物体的交流等效电路

电阻抗是交流电路中的一个基本概念，简称阻抗。某一导电体的阻抗，在数值上相当于通过单位电流强度时，该物体两端的电势差。阻抗包括电阻和电抗两部分，不论电阻和电抗，单位都是欧姆( $\Omega$ )。电抗又可分为由电容而引起的容抗和由电感而引起的感抗两类。对于生物体来说，感抗是可以忽略的，而容抗却不能忽略。生物体内含有电阻率不相同的各种物质，几乎到处存在着不可忽视的电容，因此可以认为，生物体内的阻抗是由电阻和容抗两部分构成的。由电阻和电容组成的电路，基本上可分为串联和并联两种。

在  $R$ 、 $C$  串联的情况下，阻抗  $Z$  与电阻  $R$  和容抗  $Z_c$  之间的关系为

$$Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}} \quad (9-33)$$

在  $R$ 、 $C$  并联的情况下，阻抗  $Z$  与电阻  $R$  和容抗  $Z_c$  之间的关系为

$$Z = \frac{R}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}} \quad (9-34)$$

电阻抗的倒数是电导纳，简称导纳，用符号  $Y$  表示，即  $Y = \frac{1}{Z}$ ，单位为西门子(S)。导纳也是研究生物体功能情况常用的概念。

明确了有关阻抗的一些基本概念之后，我们以人体内物质构成为例，采用模型化的办法，建立各种等效电路，近似分析人体阻抗的特点。

首先，我们分析一个细胞的阻抗。由于细胞膜的存在，细胞具有膜电容。对于频率较低的交流电和频率较高的交流电，膜电容所具有的容抗是不一样的，前者容抗较大，因此，可认为频率较低的交流电是不能通过细胞内部的，电流主要通过细胞外液；而后者容抗较小，交流电能够通过细胞内部，而且交流电的频率越高，通过细胞内部的电流也越强。这两种情况分别如图 9-26 (a)、(c) 所示。而图 9-26 (b) 所表示的是交流电的频率稍高时，会有部分电流通过细胞。

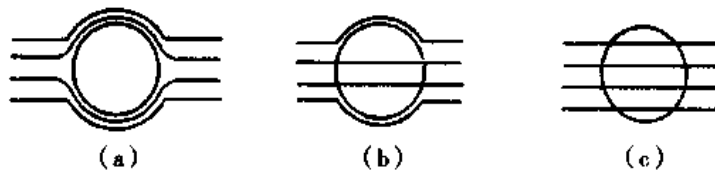


图 9-26 细胞膜电容对不同频率电流的影响示意图

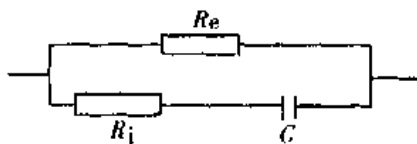


图 9-27 细胞的等效电路

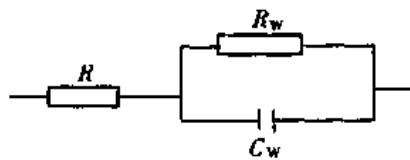


图 9-28 与电解过程有关的电极附近的阻抗

细胞的这种阻抗特点可用图 9-27 细胞的等效电路来表示，图中  $C$  表示细胞的膜电容， $R_i$  表示细胞内液的电阻， $R_e$  表示细胞外液的电阻。

其次，我们再来分析人体内局部组织的阻抗等效电路。因为对人体的组织或器官进行电测量时，都有通电电极的存在，当电极与体内物质接触时会产生电化学反应，这一过程可导致双重层电容  $C_w$  的建立，其容抗是总阻抗中的一部分。另外，由于通电会使体内局部组织中的体液电解，因此体液的阻抗也发生了变化，用  $R_w$  表示。 $C_w$  和  $R_w$  所代表的阻抗常称为瓦尔堡(Warburg)阻抗，如果用  $R$  表示电极附近的纯电阻，三者综合考虑，则电极附近的等效电路可用图 9-28 来表示。

了解这些概念之后，就可以比较全面地分析体内局部组织总阻抗的等效电路，图 9-29 就是这种等效电路中的一例。图中  $E_A$ 、 $E_B$  代表电极 A、B 附近出现的极化电动势； $C_0$  代表两电极与体内电介质所构成的电容， $C_{1A}$ 、 $C_{1B}$  分别代表两电极处的双重层电容； $R_1$  代表体内物质的纯电阻， $R_{2A}$ 、 $R_{2B}$  分别代表两电极附近与电解过程有关的纯电阻； $R_{WA}$ 、 $C_{WA}$ ， $R_{WB}$ 、 $C_{WB}$  分别代表两电极附近的瓦尔堡阻抗。当  $E_A$ 、 $E_B$  和  $C_0$  可以忽略时，则图 9-29 中的等效电路便可简化为图 9-30 (a) 所示的等效电路。很明显，当电极间通以高频交流电时  $Z_c = \frac{1}{\omega C}$  便很小，可忽略不计，相当于电容的高频短路。在这种情况下，阻抗  $Z$  近似等于电阻  $R_1$ 。图 9-30 (b) 给出了等效电路的阻抗与频率之间的这种关系。也就是说，这时可把体内物质的阻抗看成是由纯电阻构成的。

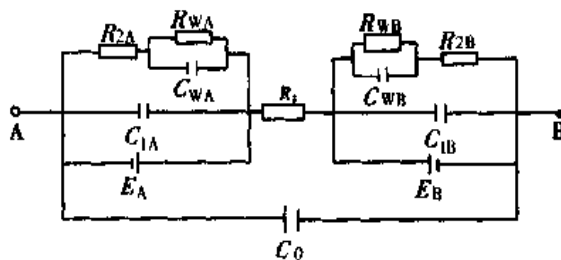


图 9-29 包括电极在内的局部组织阻抗的等效电路

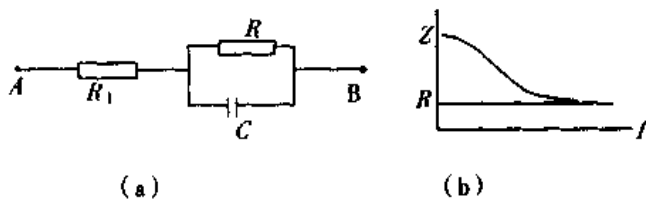


图 9-30

(a) 在图 9-29 基础上简化了的等效电路；(b) 等效电路的阻抗-频率曲线

## 二、机体阻抗测量

尼博尔(Nyboer)于1940年从理论上推导了电阻抗和容积的关系,建立了Nyboer公式,奠定了机体阻抗测量的理论基础。如图9-31所示,假设一充满血液的血管为圆柱形导体,其长度为 $L$ ,横截面积为 $S$ ,容积为 $V$ ,轴向电阻为 $R$ ,电阻率为 $\rho$ ,在长度不变的情况下,电阻与容积之间的变化关系可以根据电阻公式并求一阶导数给出。

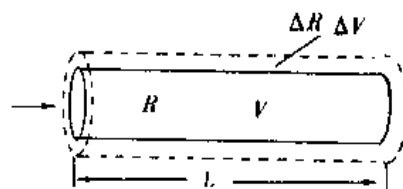
$$R = \rho \frac{L}{S} = \rho \frac{L^2}{V}$$

对上式求导数

$$\frac{dR}{dV} = -\frac{\rho L^2}{V^2}, \quad V = \rho \frac{L^2}{R}$$

所以

$$dV = -\frac{\rho L^2}{R^2} dR \quad (9-35) \quad \text{图 9-31 血管的圆柱形导体模型}$$



对于交流电,设阻抗为 $Z$ ,则

$$dV = -\frac{\rho L^2}{|Z|^2} dZ \quad (9-36)$$

上式表明,导体的容积变化量和它的阻抗变化量之间,在数量上成正比。式中的负号说明,容积增加时阻抗是减小的。

由Nyboer公式我们可以看出,采用测量阻抗变化的方法用来反映体内某一部分容积的变化是可行的。因此,常用这种方法来观察机体内搏动性血流和呼吸所造成的容积变化。显然,如果把一段血管的长度看成是不变的,便可利用阻抗的变化来反映血管截面积的变化,据此变可进一步判断血管内血流量的变化。

## 三、阻抗图与阻抗微分图

把阻抗随时间的变化描记下来,称之为阻抗图。常用来分析血管容积或截面积随

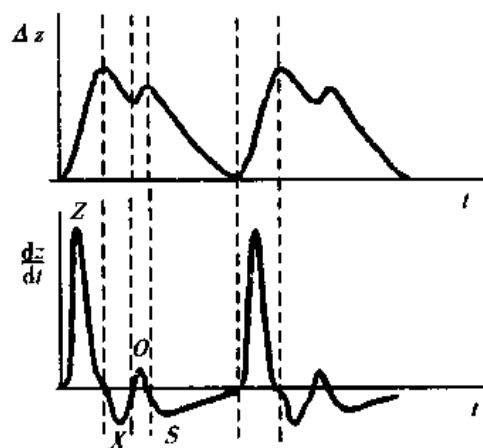


图 9-32 阻抗微分图与阻抗图的关系

时间的变化情况。由于阻抗的变化所反映的是体内某一段血管截面积的变化,因而也反映了血流量的变化。用于这种目的的阻抗图,临床上又常称为血流图。

在描记阻抗图时,取纵轴向上表示阻抗减小,即负值坐标,单位为欧姆( $\Omega$ ),用以表示血管容积增加或血管扩张;横轴为时间坐标,单位为秒(s),用以表示某种生理过程的时间间期。另外,对阻抗求一阶导数,即阻抗变化率 $\frac{dZ}{dt}$ ,以其为纵坐标,以时间为横坐标,就得到阻抗微分图。图9-32给出了阻抗

图和阻抗微分图之间的关系。我们把两者——对照，进一步说明它们之间的关系及其应用。在阻抗图中  $\Delta Z$  的上升支处，在较短的时间内阻抗变化很大，表明血管容积的变化率也很大，与之对应阻抗微分图  $\frac{dZ}{dt}$  上出现了一个波幅很大的 Z 波。这个 Z 波的波幅的微分  $\left. \frac{dZ}{dt} \right|_{\max}$ ，称为血管的最大扩张速度，反映充盈血管的最大瞬时流量。同理，在血管开始收缩时， $\Delta Z$  从峰顶开始下降，在阻抗微分图上出现 X 波，其幅度可以代表血管收缩的速度。当血管再扩张时，在阻抗图切迹后形成重搏波的上升支，在阻抗微分图上出现与之对应的 O 波，它的幅度可以代表血管再扩张的速度。最后，在血管缓慢的再收缩过程中，阻抗图上出现了重搏波后的下降支，在阻抗微分图上形成了幅度较小的 S 波，它表示血管再收缩的速度。Z、X、O、S 四个波是阻抗微分图上的四个主要部分。据此，可以认为阻抗图和阻抗微分图能反映血管容积的瞬时改变和瞬时流量。如果是靠近心室的血管，则可求出心室的每搏输出量  $SV$ 。

根据公式(9-36)不难看出，若想求出  $dV$ ，必须测出血液电阻率  $\rho$ 、血管长度  $L$  (可认为是测量电极间距离)、基础阻抗  $Z$  (习惯上常以  $Z_0$  表示)、阻抗增量  $dZ$ 。因为  $\rho$ 、 $L$ 、 $Z_0$  都比较容易测量，关键就是如何求出  $dZ$ 。库比塞克(Kubicek)提出解决  $dZ$  的方法被比较普遍地采用。

$$dZ = \left. \frac{dZ}{dt} \right|_{\max} T \quad (9-37)$$

式中  $\left. \frac{dZ}{dt} \right|_{\max}$  是阻抗对时间一阶导数的最大值， $T$  是心室射血时间，可由  $0.15 \left. \frac{dZ}{dt} \right|_{\max}$  所确定的点和 X 波峰点之间来确定。如图 9-33 所示。在此基础上，还建立了测量心室每搏射血量  $SV$  的公式

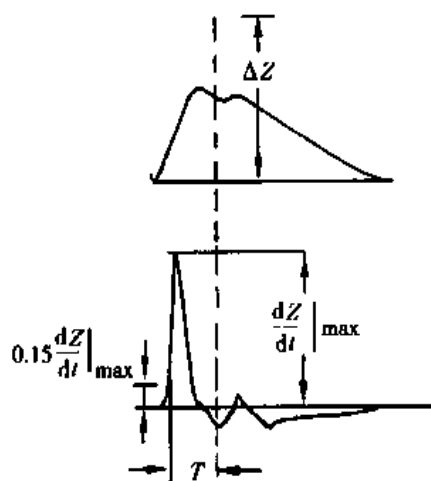


图 9-33 确定  $dZ$  的方法

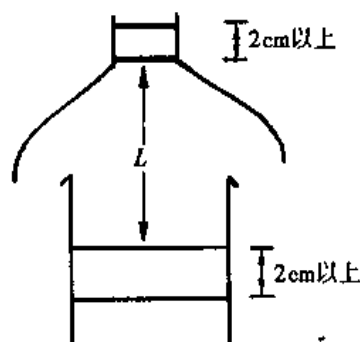


图 9-34 心阻抗图测量的环形电极位置

$$SV = \rho \left( \frac{L}{Z_0} \right)^2 \left. \frac{dZ}{dt} \right|_{\max} T \quad (9-38)$$

Kubicek 用恒流式仪器，采用环形四电极法，将两测量电极一个置于颈下缘，另一个置于剑突部位，两电源电极置于两测量电极外不小于 2 cm 处，如图 9-34 所示。据此

公式计算的每搏量(SV)，结果比较满意。

## 第八节 电磁振荡和电磁波

### 一、位移电流

根据基尔霍夫定律，在一个有传导电流的回路中，流入回路任一处的电流应等于流出该处的电流，这就是我们所说的电流的连续性。但是，如果回路中含有正在充电或放电的电容器，情况就不同了。设图 9-35 (a)、(b) 两个电路中，分别表示电容器正在充电和放电。不论是充电或放电，在同一时刻，通过电路中导体上任何截面的电流强度都相等。而这种在金属导体中的传导电流，却不能在电容器两极板间的真空或电介质中流动。此时，虽然电容器的一个极板有传导电流流入，但没有流出；而另一极板只有传导电流流出，却没有流入。对整个电路来说，传导电流是不连续的。为此，麦克斯韦(Maxwell)提出，把电流的定义加以推广，就可以认为流入极板的电流等于流出极板的电流，这样电流连续性的理论仍成立。

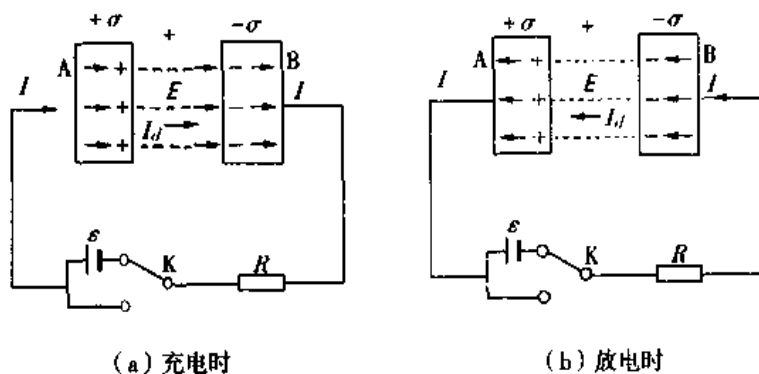


图 9-35 位移电流

设电容器中充满各向同性的均匀介质，电容器在充电或放电时，极板上的电量  $q$  (或面电荷密度  $\sigma$ ) 都随时间变化。若极板的面积为  $S$ ，则通过回路中导体上的传导电流强度和电流密度分别为

$$i = \frac{dq}{dt} = S \frac{d\sigma}{dt}$$

$$j = \frac{d\sigma}{dt} \quad (9-39)$$

虽然电容器两极板间传导电流为零，电流不连续。但是，如果按麦克斯韦的思想，把电流概念推广，引进位移电流的概念，就会使电流的连续性原理仍然成立。为了说明这一点，我们首先介绍电位移矢量，用  $D$  表示电位移，可以证明，电容器极板间介质中的电位移  $D$  等于极板上的面电荷密度  $\sigma$ ；穿过电容器极板间介质中的电通量  $\Phi_D$  等于电位移  $D$  与极板面积  $S$  的乘积。上述关系，可表示为如下两式

$$D = \sigma,$$



$$\Phi_D = DS$$

电容器在充电或放电时，极板上的电量  $q$  (或面电荷密度  $\sigma$ ) 及  $D$  和  $\Phi_D$  都随时间变化，它们对时间的变化率为

$$\begin{aligned} \frac{dD}{dt} &= \frac{d\sigma}{dt} = j, \\ \frac{d\Phi_D}{dt} &= S \frac{dD}{dt} = \frac{dq}{dt} = S \epsilon \frac{dE}{dt} = i \end{aligned} \quad (9-40)$$

把式(9-39)和式(9-40)相比较，可以发现，在电容器两极板间虽然没有自由电荷定向移动形成的传导电流，但却有一个变化的电场，其中的电通量  $\Phi_D$  和电位移  $D$  对时间的变化率分别等于电路中的传导电流强度  $i$  和电流密度  $j$ 。基于这种指导思想，麦克斯韦引进位移电流强度和位移电流密度的概念，并定义为：通过电场中某一截面的位移电流强度  $i_D$  等于通过该截面的电位移通量  $\Phi_D$  对时间的变化率；电场中某一点的位移电流密度  $j_D$  等于该点电位移矢量  $D$  对时间的变化率。

$$\begin{aligned} i_D &= \frac{\partial \Phi_D}{\partial t} = S \epsilon \frac{dE}{dt} \\ j_D &= \frac{\partial D}{\partial t} = \epsilon \frac{dE}{dt} \end{aligned} \quad (9-41)$$

在一般情况下，位移电流密度  $j_D$  和传导电流密度  $j_C$  同时存在，它们的和称为全电流密度  $j_t$ 。

$$j_t = j_D + j_C$$

对应于全电流强度，则有

$$i_t = i_D + i_C = \int_S j_D \cdot dS + \int_S j_C \cdot dS = \int_S \frac{\partial D}{\partial t} \cdot dS + \int_S j_C \cdot dS \quad (9-42)$$

式(9-42)称为全电流定律，根据该定律，我们就不难对电容器充、放电过程中电流连续性的理解：电荷以传导电流的形式流入极板，以位移电流的形式穿过两极板间的空间，再以传导电流的形式从另一极板流出。在电路中，所有各截面的全电流强度处处相同。因此，全电流总是连续的。引入全电流概念后，通过某一截面的全电流是指通过该截面的传导电流和位移电流的代数和。

最后我们必须明确指出，传导电流和位移电流都能在空间产生磁场，这是它们惟一的共同点。然而，二者又有本质上的区别。传导电流意味着电荷的运动，通过电阻时能产生焦耳热；而位移电流意味着电场的变化，在空间或电介质中不产生焦耳热。

## 二、麦克斯韦方程组

麦克斯韦在前人成就的基础上，引入位移电流和涡旋电场，建立了系统完整的电磁场理论。这个理论的中心就是电场和磁场的相互影响，即电磁场所必须满足的方程组，现列出如下。

电场的高斯定理

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \Sigma q \quad (9-43)$$

磁场的高斯定理

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (9-44)$$

电场的环路定理

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (9-45)$$

磁场的安培环路定理

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \left( j_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \right) \quad (9-46)$$

上述方程组，称为麦克斯韦方程组的积分形式。对于各向同性的介质来说，还须补充三个描述其性质的方程式

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}$$

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}$$

麦克斯韦方程组的积分形式加上描述介质性质的三个方程，全面总结了电磁场的基本规律，是处理宏观电磁现象的经典理论，利用它们原则上可以解决宏观电动力学的各种问题。

### 三、电磁振荡

由一个无电阻的自感线圈  $L$  和一个电容器  $C$  所组成的回路叫  $LC$  振荡电路。所说的电磁振荡，是指在  $LC$  电路中电荷和电流随时间作周期性变化的现象。

在任一时刻，线圈中的自感电动势和电容器两端的电势差应相等，即

$$-L \frac{di}{dt} = \frac{q}{C}$$

因为  $i = \frac{dq}{dt}$ ，代入上式得

$$-L \frac{d^2 q}{dt^2} = \frac{q}{C}$$

整理后得

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0$$

令  $\omega^2 = \frac{1}{LC}$

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega^2 q = 0 \quad (9-47)$$

式(9-47)的解为

$$q = Q_0 \cos(\omega t + \phi)$$

$$i = \frac{dq}{dt} = -Q_0 \omega \sin(\omega t + \phi) = -I_0 \sin(\omega t + \phi) \quad (9-48)$$

上面的讨论再次证明， $LC$  回路中的电流和电容器上的电量以及相关的磁场和电场都作周期性的变化，这就是电磁振荡。振荡的角频率、频率、周期分别为

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{LC}$$

实际上， $LC$  回路的电阻不可能为零，这种振荡只能是阻尼振荡，最后会完全停止。若要使振荡继续，则必须补充能量。

#### 四、电磁波和电磁波谱

我们已经知道，变化的电场和变化的磁场都不是孤立地存在的，它们相互联系、相互激发，组成统一的电磁场。麦克斯韦据此预言了电磁波的存在，电磁波具有如下一些性质。

##### 1. 电磁波的频率和波源的振荡频率相同

电磁波是横波，其电场矢量  $E$  和磁场矢量  $B$  相互垂直，且都垂直于传播方向。

##### 2. 电磁波在真空中以光速传播

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{8.85 \times 10^{-12} \times 4\pi \times 10^{-7}}} = 2.9979 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

电磁波在其他介质中的传播速度取决于介质的磁导率  $\mu$  和介电常数  $\epsilon$ 。

##### 3. 正弦电磁波的波动方程

$$E = E_m \sin\omega\left(t - \frac{x}{c}\right),$$

$$B = B_m \sin\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

式中  $E$  和  $B$  分别是电场矢量与磁场矢量， $E_m$  和  $B_m$  分别是它们的幅值， $x$  是离电磁波源的距离。

1887年赫兹(H. Hertz)用火花放电的方法产生了波长为  $10 \sim 100\text{m}$  的电磁波，并证明了这些波具有光波的性质，进一步验证了麦克斯韦的设想。把各种波长的电磁波，

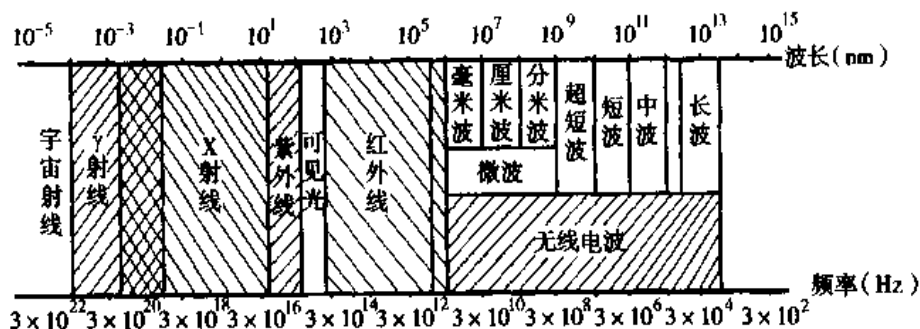


图 9-36 电磁波谱

包括无线电波、微波、红外线、可见光、紫外线和 X 射线的波长由长到短，频率由低到高地排列起来，就组成了电磁波谱，如图 9-36 所示。

## 五、电磁场对生物体的作用

高频交变电流伴随着交变的电场和磁场，在医学上主要用来对人体内部各种组织和器官加热；在外科可以用于电切割、电凝固或电干燥。这方面的情况，这里不再介绍，我们将重点介绍微波对生物体的作用。

微波是高频电磁波，频率在  $3 \times 10^8 \sim 3 \times 10^{12}$  Hz 之间，波长在 0.001 ~ 1m 之间，一定剂量的微波作用于生物体可产生热效应并伴随相应的生物效应。

### 1. 对神经系统的影响

微波对神经系统的作用与照射方式、照射剂量等因素有关。短时间、小剂量照射，可加强大脑皮质的兴奋过程；长时间、大剂量照射，可加强抑制过程，尤以照射头部这种作用最明显。小剂量微波的作用，可改变大脑皮质条件反射。大剂量微波的作用，可影响自主神经的调解功能，引起血液循环、呼吸频率的变化及皮肤和直肠温度的变化。

### 2. 对血液系统的影响

实验证明，微波照射后的血相变化与微波的辐射频率、功率密度、辐射时间密切相关。长期辐射可引起白细胞总数升高，多核细胞、淋巴细胞、嗜酸性粒细胞增多，而红细胞可能增多或减少。

### 3. 对心血管系统的影响

微波照射对血液循环有明显影响，可使动、静脉扩张，对缓解痉挛、促进血管张力的恢复、改善供血有明显作用。但功率密度较大的微波照射也可使心跳加快，随即又变慢，最后停跳。在小功率密度照射下，不会引起心血管系统的显著变化。

### 4. 对消化系统的影响

高强度的微波辐射，对消化系统有明显的损害。肝脏出现剧烈充血，肝细胞肿胀、变性并出现大小不等的空泡。胃出现充血，甚至溃疡。也可引起盲肠粘膜糜烂和充血。在低强度微波的辐射下，不会引起消化系统组织形态的明显改变。

### 5. 对呼吸系统的影响

大剂量的微波辐射，可引起肺极度充血，血管剧烈扩张，肺泡上皮脱落并有血液经毛细血管涌入肺泡腔，造成肺出血、水肿，可致死。但小剂量的微波对肺的炎症有一定的治疗作用。

### 6. 对内分泌系统的影响

微波能促使甲状腺激素增加或使甲状腺代谢增强。对于下丘脑-垂体-肾上腺，不同剂量的微波影响不同，可抑制也可促进激素的产生。除此，一定剂量的微波照射可增加血液的激素含量。

### 7. 对代谢过程的影响

微波可刺激代谢过程，影响生物氧化反应和组织的氧消耗，可抑制自由基的氧化，从而降低细胞中毒性产物自由基和过氧化物的浓度。

## 8. 对生殖系统的影响

经常受微波照射的妇女可有月经不调, 哺乳期泌乳不足。对于男性, 当微波辐射使睾丸升温超过  $35^{\circ}\text{C}$  时, 精子的产量即明显减少或停止。

## 9. 对眼睛的影响

对于人的眼睛, 当微波的功率密度大于  $10\text{ mW}\cdot\text{cm}^{-2}$ , 小于  $300\text{ mW}\cdot\text{cm}^{-2}$  时能使晶状体产生可恢复性损害。当功率密度大于  $300\text{ mW}\cdot\text{cm}^{-2}$  时, 产生不可恢复性损害。

## 10. 对皮肤和肌肉的影响

大剂量微波反复辐射皮肤会出现凝固性坏死, 肌纤维与横纹模糊不清。皮肤、肌肉在小剂量微波的辐射下, 没有明显的组织学变化。

除了上面所述, 微波还具有治疗作用。微波治疗机是用磁控管产生高频振荡, 用同轴电缆传输, 用辐射器把导出的微波能量以电磁波的形式辐射出去, 传到需治疗部位。在微波的热效应作用下, 可抑制肿瘤生长, 减低肿瘤细胞的氧代谢而使其损伤, 并能提高癌细胞对放、化疗的敏感性。

## 思考题与习题九

9-1 讨论库仑定律与毕奥-萨伐尔定律的类似与不同。

9-2 一个半径为  $0.2\text{ m}$ , 阻值  $200\Omega$  的圆形电流回路连着  $12\text{ V}$  的电压, 回路中心的磁感应强度是多少?  $(1.9 \times 10^{-7}\text{ T})$

9-3 一无限长直导线通有  $I = 15\text{ A}$  的电流, 把它放在  $B = 0.05\text{ T}$  的外磁场中, 并使导线与外磁场正交, 试求合磁场为零的点至导线的距离。  $(6.0 \times 10^{-5}\text{ m})$

9-4 在图 9-37 中, (1) 求 (a) 中半圆  $c$  处磁感应强度是多少?  $(\frac{\mu_0 I}{4a})$   
(2) 如图 (b) 总电流分成两个相等的分电流时, 圆心处的磁感应强度时多少? (0)

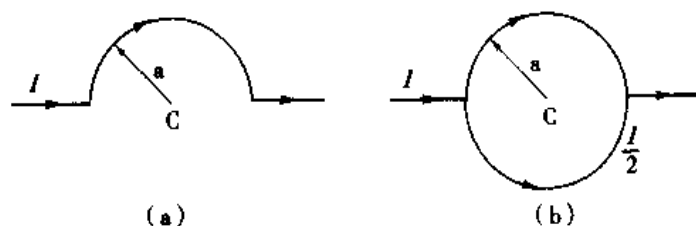


图 9-37 习题 9-4

9-5 一铜片厚度  $h = 2.0\text{ mm}$ , 放在  $B = 3.0\text{ T}$  的匀强磁场中, 已知磁场方向与铜片表面垂直, 铜的载流子密度  $n = 8.4 \times 10^{22}\text{ cm}^{-3}$ , 当铜片中通有与磁场方向垂直的电流  $I = 200\text{ A}$  时, 铜片两端的霍尔电势为多少?  $(2.2 \times 10^{-5}\text{ V})$

9-6 一根载有电流  $I$  的导线由三部分组成,  $AB$  部分为四分之一圆周, 圆心为  $O$ , 半径为  $a$ , 导线其余部分伸向无限远, 求  $O$  点的磁感应强度。  $(\frac{\mu_0 I}{2\pi a} (1 + \frac{\pi}{4}))$

9-7 如图所示, 一长螺线管, 其长度  $l = 1.0\text{ m}$ , 截面积  $S = 10\text{ cm}^2$ , 匝数  $N_1 = 1000$ , 在其中段密绕一个匝数  $N_2 = 20$  的短线圈, 计算这两个线圈的互感。如果线圈 1 内电流的变化率为  $10\text{ A}\cdot\text{s}^{-1}$ , 则线圈 2 内的感应电动势为多少?  $(25\mu\text{H}, -250\mu\text{V})$

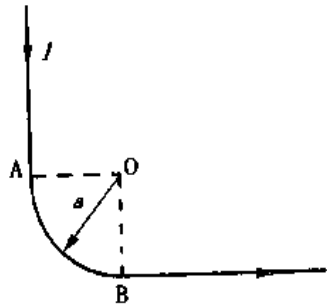


图 9-38 习题 9-6

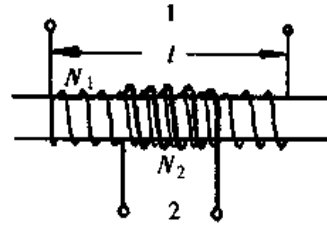


图 9-39 习题 9-7

9-8 一长直螺线管，长为  $l$ ，截面积为  $S$ ，线圈匝数为  $N$ ，求其自感系数  $L$ 。 ( $\mu n^2 V$ )

9-9 如图 9-40 所示，一回路处在  $B = 0.50T$  的匀强磁场中，回路平面与磁场垂直， $ab$  段长  $l = 0.50m$ ，并以  $v = 4.0m \cdot s^{-1}$  的速度向右匀速运动，电阻  $R = 0.50\Omega$ ，略去摩擦。求：(1)作用在  $ab$  上的拉力；

(2) 拉力所作功的功率；(3)感应电流消耗在电阻  $R$  上的功率；(4)讨论能量的转化。

(①0.50N, ②2.0W, ③2.0W)

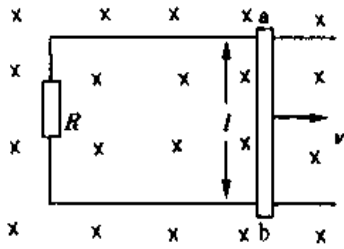


图 9-40 习题 9-9

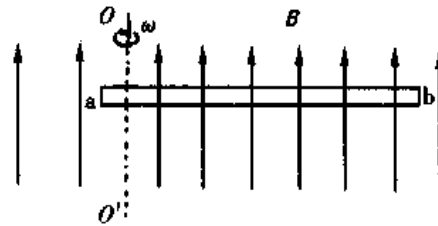


图 9-41 习题 9-10

9-10 在图 9-41 中，一长度  $l = 0.5m$  的金属棒以五分之一处为轴在水平面内匀速旋转，转动的角速度  $\omega = 12s^{-1}$ 。已知该处的匀强磁场  $B = 0.5T$ ，方向竖直向上，试求  $a, b$  两端的电势差  $U_{ab}$ 。

(-0.45V)

9-11 一长直螺线管，直径为  $1.0cm$ ，长  $10cm$ ，共  $1000$  匝。

试求：(1)螺线管的自感系数；(2)当通以  $1A$  电流时，线圈中储存的磁场能量和磁场能量密度。

(① $9.86 \times 10^{-4}H$ ; ② $4.93 \times 10^{-4}J$ ; ③ $62.8J \cdot m^{-3}$ )

9-12 将一导线弯成半径  $R = 5cm$  的圆形环，当其中通有  $I = 40A$  的电流时，圆心处的磁场能量密度为多少？

( $0.1J \cdot m^{-3}$ )

9-13 Nyboer 公式的基本内容是什么？何谓阻抗图，简述心阻抗图和阻抗微分图之间的关系。

9-14 位移电流和传导电流有什么区别？

9-15 麦克斯韦方程组包含那几个电磁场的基本定理，写出其公式。

9-16 电磁波有哪些性质？

(潘志达)

## 第十章 波动光学

---

学习本章后，你应：

1. 掌握杨氏双缝干涉、夫琅禾费单缝衍射、光栅衍射的基本原理和公式。
  2. 理解光程、光程差、半波损失等概念及薄膜干涉、劈尖干涉、牛顿环、迈克耳孙干涉仪的有关原理和公式。
  3. 掌握偏振的有关概念及马吕斯定律，理解布儒斯特定律和光的双折射。
  4. 理解偏振光的干涉及物质的旋光性。
  5. 了解圆孔衍射、光弹效应、克尔效应及液晶的光学特性。
- 

光是一种电磁波，可见光的波长范围约为  $400 \sim 760 \text{ nm}$ ，不同波长的可见光给人以不同颜色的感觉。光的传播遵循波动的一般规律。本章主要讨论光的干涉、衍射、偏振等现象，阐明其波动性质和基本规律，这些性质和规律不仅在理论上富有重要意义，而且在现代科学技术中有许多应用。

### 第一节 光的干涉

离出来的，它们的频率相同，振动方向相同，在相遇点有恒定的相位差。当原子或分子辐射的初相位改变时，两个波列的初相位也作相应的改变，所以这两束光波在相遇点的相位差总是保持不变，因而满足相干条件，在相遇区域可以产生干涉现象。来自同一光源的同一点的两束相干光波，相当于来自两个频率相同、振动方向相同、初相位相同或相位差保持恒定的光源，这样的光源称为相干光源，相干光源发出的光称为相干光。两束光波的干涉实质上就是同一波列分离出来的两个波列的干涉。为了使同一波列分离出来的两个波列能够重叠并发生干涉，两束光波在相遇点的光程差(光程定义见后)不能太大，否则一光波的波列已通过，而另一光波的相应波列尚未到达，则两波列之间没有重叠，不能产生干涉现象。能够产生干涉现象的最大光程差称为相干长度，相干长度等于一个波列的长度。光源的单色性越好，波列的长度就越长，相干长度也就越大，光源的相干性就越好。激光光源具有很高的单色性，其相干长度比普通单色光源的相干长度大得多，所以激光光源是目前最好的相干光源。

从同一普通光源获得相干光源一般有两种方法，一种是分割波阵面法，如杨氏双缝实验等。另一种是分割振幅法，如薄膜干涉等。

## 二、光程和光程差

相位差的计算在分析光的叠加现象时十分重要。为了方便地比较和计算光经过不同介质时引起的相位差，需引入光程和光程差的概念。

设有一频率为  $\nu$  的单色光，它在真空中的波长为  $\lambda$ ，传播速度为  $c$ 。当它在折射率为  $n$  的介质中传播时，传播速度为  $u = c/n$ ，波长  $\lambda' = u / \nu = c / n\nu = \lambda / n$ 。这说明，一定频率的光在折射率为  $n$  的介质中传播时，其波长为真空中波长的  $1/n$ 。波传播一个波长的距离，相位变化  $2\pi$ ，若光波在介质中传播的几何路程为  $r$ ，则相位变化为

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{r}{\lambda'} = 2\pi \frac{nr}{\lambda}$$

上式表明，光波在介质中传播时，其相位的变化，不但与光波传播的几何路程及光在真空中的波长有关，而且还与介质的折射率有关。如果对于任意介质，都采用真空中的波长  $\lambda$  来计算相位的变化，那么就需要把介质中的几何路程  $r$  乘以折射率  $n$ 。这就是说，就相位变化而言，单色光在折射率为  $n$  的介质中所通过的几何路程  $r$ ，相当于在真空中通过  $nr$  的几何路程。折射率  $n$  和几何路程  $r$  的乘积  $nr$  称为光程。光程之差称为光程差。决定光波相位变化的，不是几何路程和几何路程差，而是光程和光程差。

例如图 10-1 所示，从光源  $S_1$  和  $S_2$  发出的同相位的两束相干光波，在与  $S_1$ 、 $S_2$  等距离的 P 点相遇，其中一束光波经过空气，而另一束光波还经过厚度为  $l$ 、折射率为  $n$  的介质，虽然两束光波的几何路程都是  $r$ ，但光程不同，光波  $S_1P$  的光程就是几何路程  $r$ ，而光波  $S_2P$  的光程却是  $(r - l) + nl$ ，

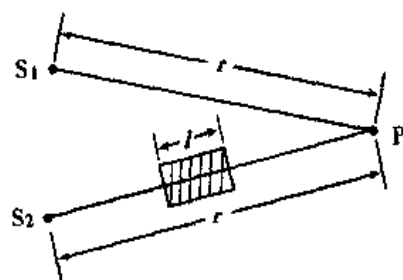


图 10-1 光程和光程差



两者的光程差为

$$\delta = (r - l) + nl - r = (n - 1)l$$

由此光程差引起的相位差为

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n - 1)l$$

### 三、杨氏双缝实验

1801年，英国物理学家、医生托马斯·杨(Thomas Young)首先用实验的方法观察到了光的干涉现象。图 10-2 所示的是杨氏双缝干涉实验。在单色平行光前放一狭缝 S，S 前又放有与 S 平行而且等距离的两条平行狭缝  $S_1$  和  $S_2$ 。根据惠更斯原理， $S_1$ 、 $S_2$  形成两个新的相干光源，由  $S_1$  和  $S_2$  发出的光波在空间相遇，产生干涉现象，在屏幕 AC 上形成如图 10-3 (a) 所示的稳定的明暗相间的干涉条纹。

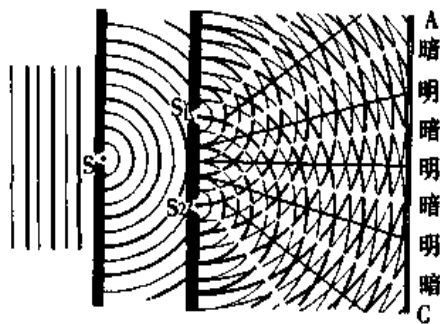


图 10-2 杨氏双缝干涉实验

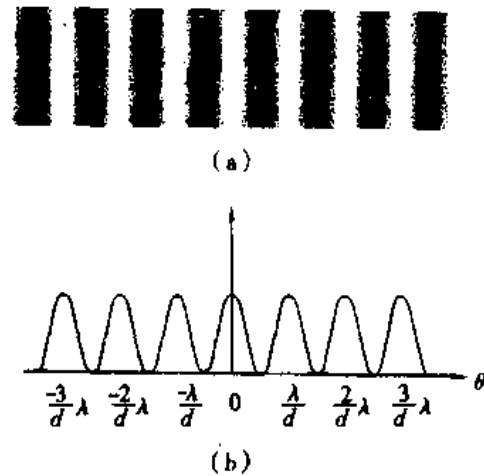


图 10-3 杨氏双缝干涉条纹

下面分析屏幕上出现明暗条纹应满足的条件。如图 10-4 所示，设  $S_1$ 、 $S_2$  间的距离为  $d$ ，其中点为  $M$ ，从  $M$  到屏幕  $AC$  的距离为  $D$ ，且  $D \gg d$ 。在屏幕上任意取一点  $P$ ， $P$  与  $S_1$  和  $S_2$  间的距离分别为  $r_1$  和  $r_2$ ， $P$  到屏幕的中心点  $O$  ( $M$  点在屏幕上的投影) 的距离为  $x$ ，则由  $S_1$ 、 $S_2$  所发出的光波到  $P$  点的光程差为；

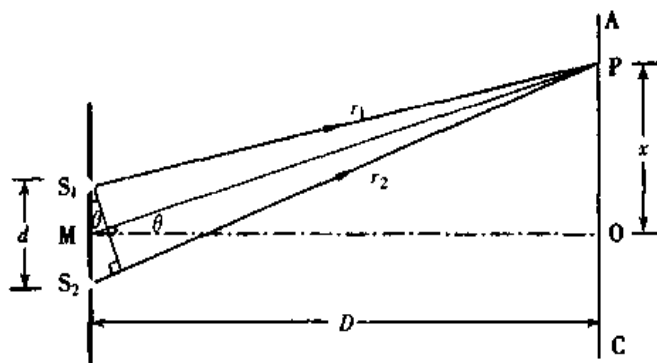


图 10-4 干涉条纹的推导

$$\delta = r_2 - r_1 \approx d \sin \theta \approx d \frac{x}{D}$$

根据波动理论, 若入射光的波长为  $\lambda$ , 则

$$\delta = d \sin \theta = \pm k \lambda, \text{ 或 } x = \pm k \frac{D}{d} \lambda, k = 0, 1, 2, \dots \quad (10-1)$$

两光波在 P 点加强, 光强为极大, P 点处出现明条纹。式中  $k$  为干涉的级数, 当  $k = 0$  时,  $x = 0$ , 即在 O 点处出现明条纹, 称为中央明条纹或称零级明条纹。与  $k = 1, 2, \dots$  对应的明条纹分别称为第一级, 第二级……明条纹。式中的正、负号表示条纹在中央明条纹两侧对称分布。图 10-3 (b) 的曲线表示方向角  $\theta$  与亮度的关系。

$$\text{当 } \delta = d \sin \theta = \pm (2k - 1) \frac{\lambda}{2}, \text{ 或 } x = \pm (2k - 1) \frac{D}{d} \frac{\lambda}{2}, k = 1, 2, 3, \dots \quad (10-2)$$

两光波在 P 点互相削弱, 光强为极小, P 点处出现暗条纹。与  $k = 1, 2, 3, \dots$  对应的暗条纹分别称为第一级, 第二级, 第三级, ……暗条纹。

由式(10-1)或式(10-2)可以计算出相邻明条纹或暗条纹中心间的距离, 即条纹间距为

$$\Delta x = \frac{D}{d} \lambda \quad (10-3)$$

此结果表明  $\Delta x$  与  $k$  无关, 因此干涉条纹是等间距分布的。用不同波长的单色光源做实验时, 条纹的间距不相同, 波长短的单色光条纹间距小; 波长长的单色光条纹间距大。如果用白光做实验, 只有中央明条纹是白色的, 其他各级都是由紫到红的彩色条纹。

[例 10-1] 在杨氏双缝实验中, 已知双缝间的距离为 0.60 mm, 缝和屏幕相距 1.50 m, 若测得相邻明条纹间的距离为 1.50 mm。(1) 求人射光的波长。(2) 若以折射率  $n = 1.30$ , 厚度  $l = 0.01$  mm 的透明薄膜遮住其中的一缝, 原来的中央明纹处, 将变为第几级明条纹?

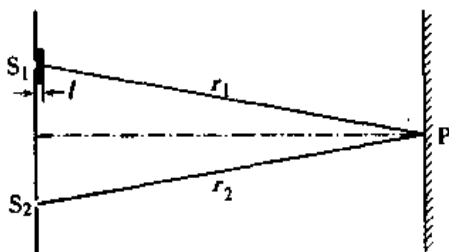


图 10-5 例题 10-1

解: (1) 由  $\Delta x = \frac{D}{d} \lambda$  得

$$\lambda = \frac{\Delta x d}{D} = \frac{1.50 \times 10^{-3} \times 0.60 \times 10^{-3}}{1.50} = 6.00 \times 10^{-7} (\text{m}) = 600 (\text{nm})$$

(2) 未遮薄膜时, 中央明纹处的光程差为  $\delta = r_1 - r_2 = 0$ , 遮上薄膜后, 光程差为

$$\delta = r_1 - l + nl - r_2 = (n - 1)l$$

设此处为第  $k$  级明纹, 则

$$(n - 1)l = k \lambda$$

$$k = \frac{(n - 1)l}{\lambda} = \frac{(1.30 - 1) \times 0.01 \times 10^{-3}}{6.00 \times 10^{-7}} = 5$$

原来的中央明纹处将变为第 5 级明条纹。

#### 四、洛埃镜实验

洛埃镜实验的装置如图 10-6 所示。KL 为一块背面涂黑的玻璃片(洛埃镜)。从狭缝  $S_1$  射出的光,一部分直接射到屏幕 E 上,另一部分经玻璃面 KL 反射后到达屏幕上,反射光可看成是由虚光源  $S_2$  发出的。 $S_1$ 、 $S_2$  构成一对相干光源。图中画有阴影的区域表示相干光叠加的区域,这时,在处在阴影区域的屏幕 E 上,可以观察到明暗相间的干涉条纹。

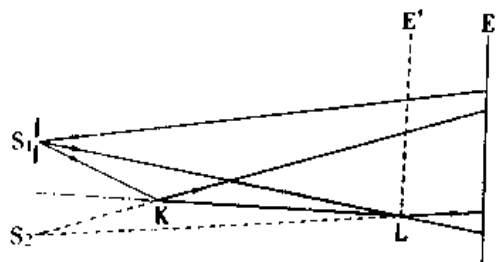


图 10-6 洛埃镜实验简图

若把屏幕移到和镜端相接触的位置  $E'L$  上时,在屏幕和镜面的接触处将出现一暗条纹。这表明,直接射到屏幕上的光与由镜面反射出来的光在 L 处的相位相反,即相位差为  $\pi$ 。由于直接射到屏幕上的光不可能有这个变化,所以只能认为光从空气射向玻璃发生反射时,反射光有大小为  $\pi$  的相位突变。

相位差  $\pi$  相当于光波多走(或少走)了半个波长的距离,这个现象称为半波损失。

洛埃镜实验不但显示了光的干涉现象,证实了光的波动性,而且更重要的是它证明了光由光疏介质射向光密介质表面发生反射时,反射光会发生半波损失。

#### 五、薄膜干涉

薄膜干涉现象在日常生活中可以观察到。太阳光照在肥皂膜及水面的油膜上,都能观察到彩色花纹,这就是薄膜干涉现象。光波照射透明薄膜时,在膜的前后两个表面都有部分被反射。这些反射光波是同一入射光的两个部分,只是经历了不同的路径而有恒定的相位差,因此它们是相干光,在它们相遇时就会产生干涉现象。

在图 10-7 中,设薄膜厚度为  $e$ , 折射率为  $n$ 。为了简便起见,假设光波垂直入射(图中为了清楚,入射角画得稍大于零),光波到达膜的表面时,一部分被反射,另一部分进入薄膜,在膜的后表面被反射回来再经前表面折射而出,穿越薄膜的反射光波要比直接反射的光波多走一段光程  $2ne$ 。但是光波在前表面反射时有半波损失,因此如果这段光程恰好等于波长  $\lambda$  的整数倍时,两反射光波正好是反相相遇,互相削弱。削弱的条件是

$$2ne = k\lambda, \text{ 或 } e = \frac{k\lambda}{2n}, k = 1, 2, 3, \dots \quad (10-4)$$

如果光程差  $2ne$  等于半波长的奇数倍,则两反射光波同相相遇,互相加强。加强的条件是

$$2ne = (2k - 1)\frac{\lambda}{2}, \text{ 或 } e = (2k - 1)\frac{\lambda}{4n}, k = 1, 2, 3, \dots \quad (10-5)$$

当薄膜折射率小于膜外介质的折射率时,虽然前表面

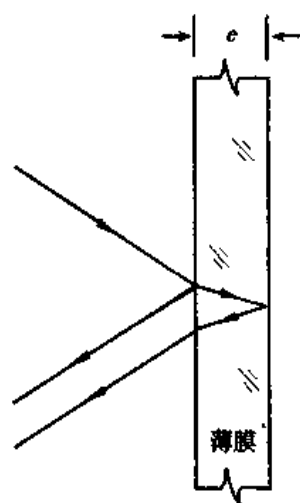


图 10-7 薄膜干涉

的反射没有半波损失，但后表面的反射却有半波损失，因此削弱和加强的条件仍然适用。如果薄膜的折射率介于前后介质的折射率之间，则加强和削弱的条件就要对调一下。

· [例题 10-2] 照相机的透镜常镀上一层透明薄膜，目的是利用干涉原理来减少表面的反射，使更多的光进入透镜。常用的镀膜物质是氟化镁( $\text{MgF}_2$ )，它的折射率  $n = 1.38$ 。如果要使可见光谱中  $\lambda = 550 \text{ nm}$  的光有最小反射，问膜的厚度应是多少？

解：假设光线垂直入射(图 10-8 中入射角接近于零)，由于两次反射都有半波损失，因此两反射光波互相削弱的条件是

$$2ne = \frac{\lambda}{2}$$

即 
$$e = \frac{\lambda}{4n} = \frac{550}{4 \times 1.38} = 99.6 \text{ (nm)}$$

由于被削弱的波长是可见光谱中的黄绿色部分，其他颜色仍有部分被反射，因此镀膜后的透镜表面为青紫色。

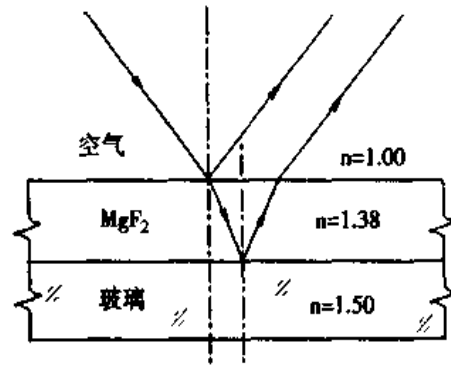


图 10-8 例题 10-2

如果入射光不是垂直入射，那么后表面反

射的光波和前表面反射的光波的光程差为  $\delta = 2e \sqrt{n^2 - \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2}$ 。由此可见，对于厚度均匀的平面薄膜来说，光程差是随光线的倾角(指入射角  $i$ )的改变而改变的。具有相同入射角  $i$  的入射光有相同的光程差，它们将形成同一干涉条纹。这种干涉条纹称为等倾条纹。

## 六、等厚干涉

当平行光垂直地照射到厚度不均匀的薄膜上时，从薄膜前后表面反射的光的光程差仅与薄膜的厚度有关，厚度相同的地方，光程差相同，干涉条纹的级数也相同，这种干涉条纹称为等厚条纹，相应的干涉现象，称为等厚干涉。劈尖干涉和牛顿环就是这一类干涉。

1. 劈尖干涉 一个劈尖形状的介质薄片或膜，简称为劈尖。它的两个表面都是平面，其间有一个很小的夹角  $\theta$ ，如图 10-9 (a)所示。两表面的交线称为劈尖的棱边。如果用平行的单色光垂直入射到劈面上，从劈尖上、下表面反射的光，在劈尖的上表面附近相遇，而发生干涉。因此，当观察劈尖表面时，就会看到干涉条纹。以  $e$  表示在入射点 A 处劈尖的厚度，则两束相干的反射光相遇时光程差为

$$\delta = 2ne + \frac{\lambda}{2}$$

由于各处劈尖的厚度  $e$  不同，所以光程差也不同，出现明暗条纹的条件为

$$\delta = 2ne + \frac{\lambda}{2} = k\lambda, \quad k = 1, 2, 3, \dots \text{明条纹} \quad (10-6)$$

$$\delta = 2ne + \frac{\lambda}{2} = (2k + 1)\frac{\lambda}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \text{暗条纹} \quad (10-7)$$

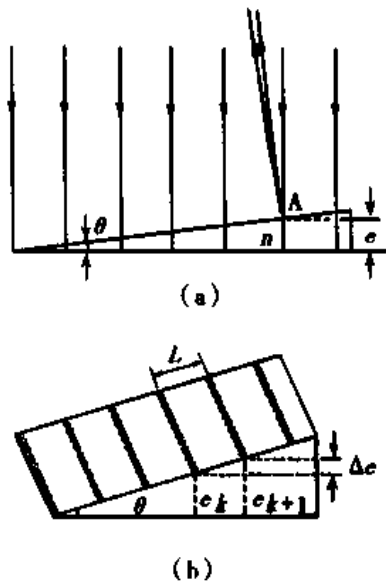


图 10-9 劈尖干涉

以上两式表明，每级明条纹或暗条纹都与一定的劈尖厚度相对应，因此这种干涉条纹是等厚条纹。由于劈尖的等厚线是一些平行棱边的直线，所以干涉条纹是一些与棱边平行的明暗相间的直条纹，如图 10-9 (b) 所示。

在棱边处  $e = 0$ ，只是由于有半波损失，两相干光相差为  $\pi$ ，因而形成暗条纹。

以  $L$  表示相邻两条明条纹或暗条纹在表面上的距离，则由图 10-9 (b) 可求得

$$L = \frac{\Delta e}{\sin\theta}$$

式中  $\theta$  为劈尖角， $\Delta e$  为相邻两条明纹或暗纹对应的厚度差，由式(10-6)或式(10-7)可知

$$\Delta e = e_{k+1} - e_k = \frac{\lambda}{2n}$$

$$\text{则 } L = \frac{\lambda}{2n\sin\theta} \quad (10-8)$$

通常  $\theta$  很小，所以  $\sin\theta \approx \theta$ ，上式又可写为

$$L = \frac{\lambda}{2n\theta} \quad (10-9)$$

式(10-8)和式(10-9)表明，劈尖干涉形成的干涉条纹是等间距的。条纹间距与劈尖角  $\theta$  有关， $\theta$  越大，条纹间距越小，条纹越密。当  $\theta$  大到一定程度时，条纹就密得无法分开。所以干涉条纹只能在劈尖角度很小时才能观察到。

2. 牛顿环 在一块光平的玻璃片 B 上，放置一个曲率半径  $R$  很大的平凸透镜 A，在 A、B 间形成一薄的劈形空气层，如图 10-10(a) 所示。当用平行单色光垂直入射平凸透镜时，在空气层的上、下表面发生反射，形成两束向上的相干光，这两束相干光在平凸透镜下表面处相遇而发生干涉，在透镜下表面上，可以观察到一组以接触点 O 为中心的同心圆环，称为牛顿环，如图 10-10(b) 所示。这两束相干光的光程差为

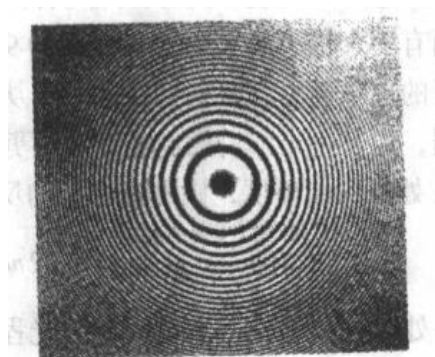
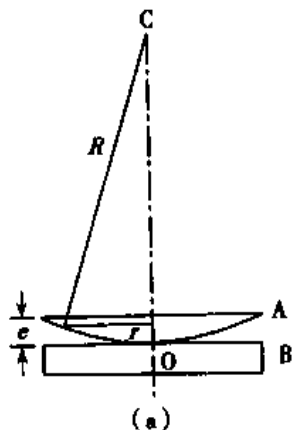


图 10-10 牛顿环实验

$$\delta = 2e + \frac{\lambda}{2}$$

其中  $e$  是空气层的厚度,  $\lambda/2$  是光在空气层下表面即和玻璃的分界面上反射时产生的半波损失。由于这一光程差由空气薄层的厚度决定, 所以牛顿环也是一种等厚条纹。又因为空气层的等厚线是以  $O$  为中心的同心圆, 所以干涉条纹成为明暗相间的圆环。形成明环的条件为

$$2e + \frac{\lambda}{2} = k\lambda, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (10-10)$$

形成暗环的条件为

$$2e + \frac{\lambda}{2} = (2k + 1)\frac{\lambda}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (10-11)$$

在中心处  $e = 0$ , 因有半波损失, 两相干光光程差为  $\lambda/2$ , 所以形成一暗斑。

设牛顿环的半径为  $r$ , 由图 10-10 (a) 可以看出,  $r$  与  $R$  的关系为

$$\begin{aligned} r^2 &= R^2 - (R - e)^2 \\ &= 2Re - e^2 \end{aligned}$$

因为  $R \gg r$ , 此式中  $e^2$  可以略去, 于是得

$$r^2 = 2Re$$

则明环半径为

$$r = \sqrt{\frac{(2k-1)R\lambda}{2}}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (10-12)$$

暗环半径为

$$r = \sqrt{kR\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (10-13)$$

可见半径  $r$  与环的级数的平方根成正比, 所以从环心越向外, 圆环的分布越密。

## 七、迈克耳孙干涉仪

迈克耳孙干涉仪的结构原理如图 10-11 所示。  $M_1$  和  $M_2$  是两块经过精密磨光的平面反射镜, 分别安装在相互垂直的两臂上。

其中  $M_2$  是固定的,  $M_1$  用精密螺旋控制, 可沿  $M_1$  镜面的法线方向移动。  $G_1$  和  $G_2$  是两块厚度和折射率都很均匀的相同的玻璃板, 两者平行放置, 且与  $M_1$ 、 $M_2$  成  $45^\circ$  角。在  $G_1$  朝着  $E$  的一面镀有一层半透明、半反射的薄银层, 使光源射来的光分成振幅近于相等的反射光束 1 和透射光束 2, 因此  $G_1$  称为分光板。

自面光源  $S$  发出的光, 射向分光板  $G_1$  经分光后, 反射光束 1 射向  $M_1$ , 经  $M_1$  反射后再透过  $G_1$  向  $E$  处传播; 透射光束 2 则透过

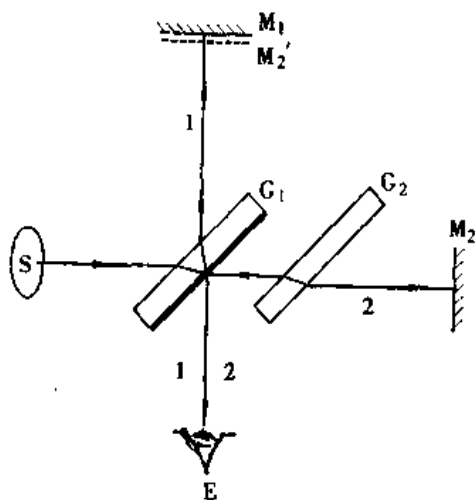


图 10-11 迈克耳孙干涉仪

$G_1$  及  $G_2$  向  $M_2$  传播, 经  $M_2$  反射后, 再穿过  $G_2$  经  $G_1$  的薄银层反射后也向 E 处传播, 到达 E 处的光 1 和光 2 是相干的, 在 E 处可观察到干涉图样。 $G_2$  的作用是能使光 1、2 都是三次穿过玻璃板, 这样光束 1 和光束 2 的光程差就和玻璃板中的光程无关了。因此,  $G_2$  称为补偿板。

从  $M_2$  反射的光, 可以看成是从  $M_2$  经  $G_1$  的反射而生成的虚像  $M_2'$  处发出的, 因此在 E 处看到的干涉图样就如同由  $M_1$  和  $M_2'$  之间的空气薄膜产生的一样。当  $M_1$ 、 $M_2$  相互严格垂直时,  $M_1$ 、 $M_2'$  之间形成的是平行平面空气膜, 这时在 E 处观察到的是同心圆的等倾条纹; 当  $M_1$ 、 $M_2$  不严格垂直时,  $M_1$ 、 $M_2'$  之间形成的是空气劈尖, 这时在 E 处观察到的是近似平行的等厚条纹。当  $M_1$  移动时, 空气膜厚度改变, 干涉条纹将发生相应的变化。当  $M_1$  移动距离为  $\lambda/2$  时, 观察者可看到一条明条纹或一条暗条纹移过视场中的某一参考标记。如果数出条纹移动的数目  $N$ , 则可算出  $M_1$  平移的距离为

$$\Delta d = N \cdot \frac{\lambda}{2} \quad (10-14)$$

迈克耳孙干涉仪的主要特点是两相干光束在空间上是完全分开的, 并且可用移动反射镜或在光路中加入另外介质的方法, 改变两光束的光程差。迈克耳孙干涉仪和以它为原型而发展起来的多种干涉仪有广泛的用途, 如用于精密测量长度、测折射率、测光谱线的波长和精细结构等。

## 第二节 光的衍射

光波绕过障碍物传播的现象称为光的衍射。衍射后所形成的明暗相间的图样称为衍射图样。干涉和衍射现象都是波动所固有的特性。通常根据观察方式的不同, 把光的衍射现象分为两类: 一类是光源和观察屏(或二者之一)与障碍物之间的距离是有限的, 这一类衍射称为菲涅耳衍射; 另一类是光源和观察屏与障碍物之间的距离都是无限远的, 这一类衍射称为夫琅禾费衍射。下面的讨论只限于夫琅禾费衍射。实验中观察光的夫琅禾费衍射时, 是借助于两块会聚透镜来实现的, 一块放在障碍物前, 把点光源发出的光变成平行光, 一块放在障碍物后, 使经过障碍物后的衍射光在透镜的焦平面上成像。这样既可增加衍射图样的强度, 又可保持衍射的性质不变, 更便于观察。

### 一、单缝衍射

单缝衍射的实验装置如图 10-12 所示。光源 S 放在透镜  $L_1$  的焦点上, 观察屏 E 放在透镜  $L_2$  的焦平面上。当平行光垂直照射到狭缝 K 上时, 在屏幕 E 上将出现明暗相间的衍射图样。

如果 S 是单色光源, 其衍射图样是一组与狭缝平行的明暗相间的条纹, 正对狭缝的是中央明纹, 两侧对称分布着各级明暗条纹。条纹的分布是不均匀的, 中央明纹光强最大亦最宽, 其他明纹的光强迅速下降且随着级数的增大逐渐减小, 如图 10-13 所

示。图中的曲线表示光强的分布，光强的极大值、极小值与各级明、暗条纹的中心相对应。

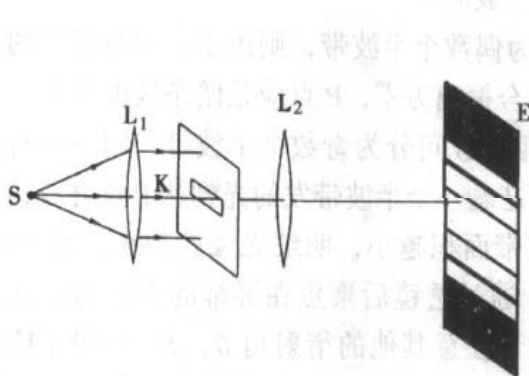


图 10-12 单缝衍射

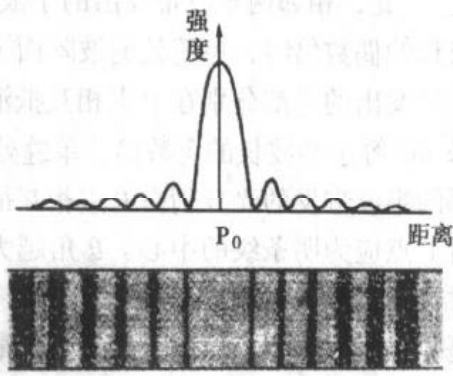


图 10-13 单缝衍射图样

单缝衍射可用半波带法加以说明。如图 10-14 (a) 所示，设单缝的宽度为  $a$ ，入射光的波长为  $\lambda$ 。根据惠更斯原理，当平行光垂直照射到狭缝上时，位于狭缝所在处的波阵面  $AB$  上的每一点都是一个新的波源，向各个方向发射子波，狭缝后面空间任意一点的光振动，都是这些子波传到该点的振动的相干叠加，其加强或减弱的情况，决定于这些子波到达该点时的光程差。假设衍射角为任意角  $\theta$  的一束平行光，经过透镜  $L_2$  聚焦在屏幕  $E$  上的  $P$  点，从  $A$  点作  $AC$  垂直于  $BC$ ，由于平行光经过透镜会聚后不会产生附加的光程差，这束光线的两边缘光线之间的光程差为：

$$BC = a \sin \theta$$

$BC$  亦是这束平行光的最大光程差， $P$  点的明暗程度完全决定于光程差  $BC$  的量值。

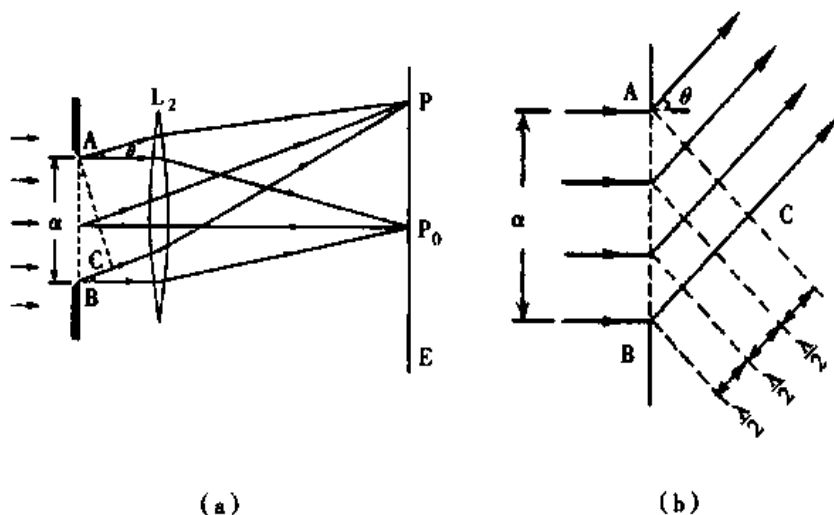


图 10-14 单缝衍射条纹的形成

如果这个光程差  $BC$  刚好等于入射光的半波长的整数倍，可作一些平行于  $AC$  的平面，使两相邻平面之间的距离都等于  $\lambda/2$ ，这些平面将把单缝处的波阵面  $AB$  分为整数个面积相等的部分，每一个部分称为一个半波带，如图 10-14 (b) 所示。由于各



个半波带的面积相等，因而各个半波带发出的子波在 P 点所引起的光振幅接近相等，而相邻两半波带上的任何两个对应点发出的子波在 P 点的光程差都是  $\lambda/2$ ，即相差为  $\pi$ 。因此，相邻两半波带发出的子波在 P 点合成时将互相抵消。这样如果 BC 等于半波长的偶数倍时，单缝处的波阵面 AB 可分为偶数个半波带，则由于一对对相邻的半波带发出的光都分别在 P 点相互抵消，所以合振幅为零，P 点应是暗条纹的中心。如果 BC 等于半波长的奇数倍，单缝处的波阵面 AB 可分为奇数个半波带，则一对对相邻的半波带发的光分别在 P 点相互抵消后，还剩一个半波带发的光到达 P 点合成，这时 P 点应为明条纹的中心。 $\theta$  角越大，半波带面积越小，明纹光强就越小。当  $\theta = 0$  时，各衍射光沿原方向传播，光程差为零，通过透镜后聚焦在屏幕的中心  $P_0$ ，这就是中央明纹的中心位置，该处光强最大。对于任意其他的衍射角  $\theta$ ，BC 一般不能恰好等于半波长的整数倍，AB 亦不能分成整数个半波带，此时，衍射光束形成介于最明和最暗之间的中间区域。综上所述可知，当平行光垂直于单缝平面入射时，单缝衍射条纹的明暗条件为

$$a \sin \theta = \pm 2k \frac{\lambda}{2}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \text{暗纹中心} \quad (10-15)$$

$$a \sin \theta = \pm (2k + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \text{明纹中心} \quad (10-16)$$

$$\theta = 0 \quad \text{中央明纹中心} \quad (10-17)$$

式中  $k$  为衍射的级数， $k = 1, 2, 3, \dots$  依次为第一级、第二级、第三级……暗纹和明纹。

两个第一级暗条纹中心间的距离即为中央明纹的宽度，考虑到一般  $\theta$  角较小，中央明纹的半角宽度为

$$(\theta \approx \sin \theta = \frac{\lambda}{a}) \quad (10-18)$$

以  $f$  表示透镜  $L_2$  的焦距，则屏上中央明纹的宽度为

$$\Delta x = 2f \tan \theta \approx 2f \sin \theta = 2f \frac{\lambda}{a} \quad (10-19)$$

屏上各级暗条纹的中心与中央明纹中心的距离为

$$x = \pm k f \frac{\lambda}{a} \quad (10-20)$$

相邻暗条纹之间的宽度  $f\lambda/a$ ，就是一条明条纹的宽度，所以中央明纹的宽度是其他明纹宽度的 2 倍，也是第一级暗纹的中心与中央明纹的中心的距离的 2 倍。

式(10-19)表明，中央明纹的宽度正比于波长  $\lambda$ ，反比于缝宽  $a$ 。缝越窄，衍射越显著；缝越宽，衍射越不明显。当缝宽  $a \gg \lambda$  时，各级衍射条纹向中央靠拢，密集得以致无法分辨，只能观察到一条明条纹，它就是透镜所形成的单缝的像，这个像相应于从单缝射出的光是直线传播的平行光束。由此可见，光的直线传播现象是光的波长较障碍物的线度小很多时，衍射现象不显著的情形。

当缝宽  $a$  一定时，入射光的波长  $\lambda$  越大，衍射角也越大。因此，若以白光照射，中央明纹将是白色的，而其两侧则呈现出一系列由紫到红的彩色条纹。

## 二、圆孔衍射

在图 10-12 所示的单缝衍射装置中，如果用一直径为  $D$  的小圆孔代替狭缝，那么在光屏上就可得到如图 10-15 所示的圆孔衍射的图样。图样的中央是一明亮的圆斑，周围是一组明暗相间的同心圆环，由第一暗环所包围的中央亮斑称为艾里斑。理论计算证明，艾里斑的光强占整个入射光强的 84%，其半角宽度为

$$\theta \approx \sin\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D} \quad (10-21)$$

若以  $f$  表示透镜  $L_2$  的焦距，艾里斑的半径为

$$r = f\theta = 1.22f \frac{\lambda}{a} \quad (10-22)$$

$\lambda$  是入射光的波长，显然  $D$  愈小，或  $\lambda$  愈大，衍射现象越明显。

圆孔衍射现象是许多光学仪器中不可避免的现象，它影响到成象的质量。后面在学习显微镜的分辨本领时，还将深入地讨论这个问题。



图 10-15 圆孔衍射图样

## 三、光栅衍射

光栅(又称为衍射光栅)是一种利用衍射原理制成的光学元件。透射光栅由大量等宽等间距的狭缝组成。缝的宽度  $a$  和两缝间不透光部分的宽度  $b$  之和，即  $d = a + b$  称为光栅常量。在一块很平的玻璃片上，用金刚石刀尖或电子束刻出一系列等宽等距的平行刻痕，刻痕处因漫反射而不太透光，相当于不透光的部分，未刻过的地方相当于透光的狭缝，这样就制成了透射光栅。实用的光栅每毫米内有几十条、上千条甚至几万条刻痕，原刻的光栅是非常贵重的，实验室中通常使用的是复制的光栅。

图 10-16 是光栅衍射的原理示意图，当平行光垂直照射到光栅  $G$  上时，光栅上的每一条狭缝都将在屏幕  $E$  的同一位置上产生单缝衍射的图样，又由于各条狭缝都处在同一波阵面上，所以各条狭缝的衍射光也将在屏幕  $E$  上相干叠加，结果在屏幕  $E$

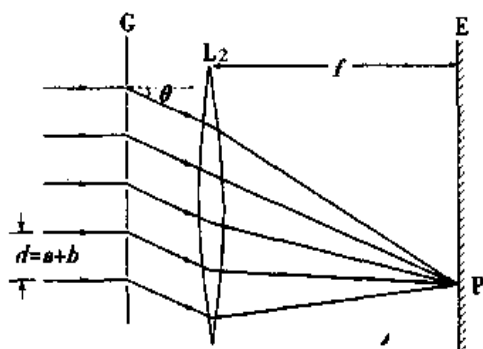


图 10-16 光栅衍射

上形成了光栅的衍射图样。光栅衍射图样是单缝衍射和多缝干涉的总效果。

在衍射角为任意角  $\theta$  的方向上，从任意相邻两狭缝相对应点发出的光到达  $P$  点的光程差都是  $d\sin\theta$ 。由波的叠加规律可知，当  $\theta$  满足下式时，所有的缝发出的光到达  $P$  点时都是同相的，它们将彼此加强，形成明条纹。

$$d\sin\theta = \pm k\lambda, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (10-23)$$

式(10-23)称为光栅方程。式中  $k$  表示明条纹的级数,  $k=0$  的明条纹称为中央零级明条纹, 又称为零级像,  $k=1, 2, \dots$  时分别称为第一级、第二级……明条纹(或像)。只有在满足光栅方程的那些特殊方向上各缝发出的光才能彼此都加强。因此, 光栅各级明条纹细窄而明亮。

由光栅方程可以看出, 光栅常量愈小, 各级明条纹的衍射角就愈大, 即各级明条纹分得愈开。对给定长度的光栅, 总缝数愈多, 明条纹愈亮。对光栅常量一定的光栅, 入射光波长愈大, 各级明条纹的衍射角也愈大。如果是白光(或复色光)入射, 则除中央零级明条纹外, 其他各级明条纹都按波长不同各自分开, 形成光栅光谱。通过光栅光谱可以了解原子、分子的内部结构, 还可以了解物质由哪些元素组成及每种元素所占的百分比, 因此光栅已成为光谱分析仪器的核心部件。

如果满足光栅方程的  $\theta$  角, 同时又满足单缝衍射形成暗纹的条件  $a \sin \theta = \pm k' \lambda$ , 则在光栅衍射图样上便缺少这一级明条纹, 这一现象称为光栅的缺级现象。所缺的级数  $k$  为

$$k = \pm \frac{d}{a} k', \quad k' = 1, 2, 3, \dots \quad (10-24)$$

例如当  $d/a = 4$  时, 则缺级的级数为  $\pm 4, \pm 8, \dots$ 。

### 第三节 光的偏振

#### 一、自然光和偏振光

光波是一种电磁波, 电磁波是横波, 其电场强度矢量  $E$  和磁场强度矢量  $H$  的振动方向都垂直于波的传播方向, 并且它们之间也互相垂直。在光波的  $E$  矢量和  $H$  矢量中, 能引起感光作用和生理作用的主要是  $E$  矢量, 所以一般把  $E$  矢量称为光矢量, 把  $E$  矢量的振动称为光振动, 并以它的振动方向代表光的振动方向。由于原子、分子发光的独立性和间歇性, 普通光源发出的光中, 包含有各个方向的光矢量, 没有哪一个方向比其他方向更占优势, 也就是说, 在所有可能的方向上,  $E$  矢量的振幅都相等, 这样的光称为自然光, 如图 10-17 (a) 所示。普通光源发出的光都是自然光。

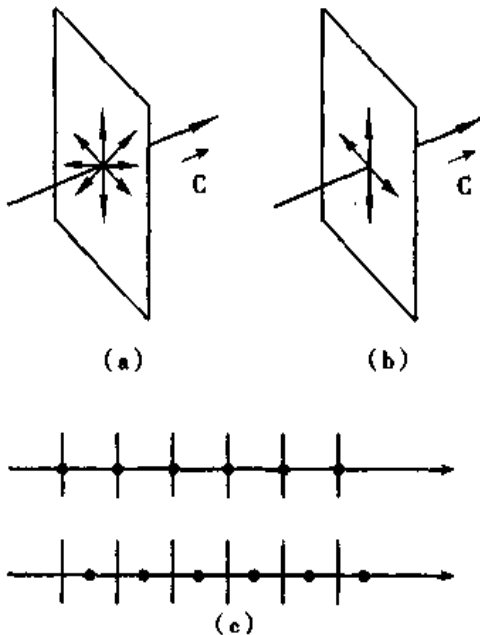


图 10-17 自然光的图示法

如果在垂直于光波传播方向的平面内, 光矢量只沿一个固定的方向振动, 这样的光称为线偏振光, 亦称为平面偏振光, 简称为偏振光, 如图 10-18 (a)、(b) 所示。偏振光的振动方向和光的传播方向构成的平面称为

偏振光的振动面，与振动面垂直而且包含有传播方向的平面称为偏振面。由于任何一个方向的振动都可以分解为某两个相互垂直的方向的振动，因此自然光可以分解为方向垂直取向任意的两个偏振光，这两个偏振光振幅相等，其强度各等于自然光强度的一半。所以自然光也可以用图 10-17 (b)、(c) 所示的符号表示。值得注意的是，这两个分量是相互独立的，没有固定的相位关系，不能合成一个偏振光。

如果光波中，光矢量在某一确定方向上最强，或者说有更多的光矢量取向于该方向，这样的光称为部分偏振光，如图 10-18 (c)、(d) 所示。还有一种偏振光，它的光矢量随时间作有规律的改变，光矢量的末端在垂直于传播方向的平面上的轨迹呈现出椭圆或圆，这样的光称为椭圆偏振光或圆偏振光。如果迎着光线看时光矢量顺时针旋转，则称为右旋椭圆(或圆)偏振光；光矢量逆时针旋转，则称为左旋椭圆(或圆)偏振光。

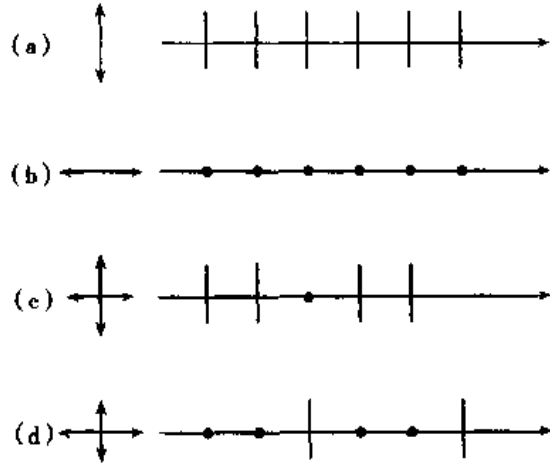


图 10-18 偏振光部分偏振光的图示法

## 二、马吕斯定律

自然光通过某些装置后会变成偏振光，能够把自然光变成偏振光的装置称为起偏器。起偏器的作用像一个滤板，它只让光波中沿某一特定方向振动的成分通过，因此通过起偏器后的光波即成为在该特定方向振动的偏振光。人眼不能分辨光波的振动方向，无法辨别自然光和偏振光。用于检测光波是否偏振并确定其振动方向的装置称为检偏器。任何起偏器都可以作为检偏器。

在图 10-19 中，用两块圆片 P 和 A 分别表示起偏器和检偏器。假设光波在通过起偏器和检偏器时，只有那些在片中平行线的方向上振动的成分才能通过，这个方向称为透射轴。在图 10-19 (a) 中，自然光通过 P 后，成为在水平方向振动的偏振光，因为 P 和 A 的透射轴是一致的，所以能够通过 P 的振动成分也同样能通过 A，在 A 的后面透射光强最强。如果把 A 绕光波进行方向转 90°，如图 10-19 (b) 所示，它就只能让垂直振动的光波通过了。然而在通过 P 的偏振光中没有这样的振动分量，因此在 A 的后面光强将为零，称为消光。

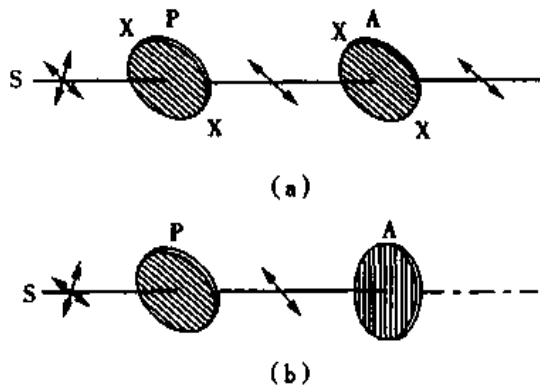


图 10-19 起偏和检偏

如果检偏器 A 和起偏器 P 的透射轴既不互相平行，也不互相垂直，而是成一个角度  $\theta$ ，如图 10-20 所示，那么只有

如果检偏器 A 和起偏器 P 的透射轴既不互相平行，也不互相垂直，而是成一个角度  $\theta$ ，如图 10-20 所示，那么只有

部分光波可以通过 A。假设在 A 和 P 之间的偏振光的振幅为  $E_0$ ，在不考虑反射和吸收的情况下，透射光的振幅则为  $E_1 = E_0 \cos \theta$ ，因光的强度与光的振幅的平方成正比，因此，通过 A 的偏振光的强度  $I$  和通过前的强度  $I_0$  有如下的关系。

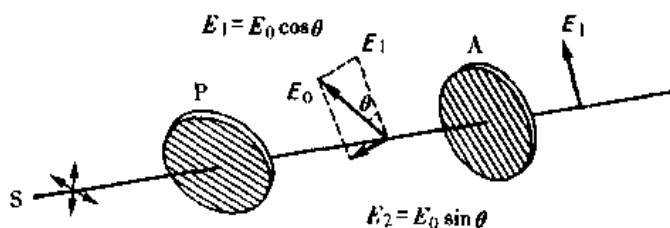


图 10-20 马吕斯定律

$$\frac{I}{I_0} = \frac{E_1^2}{E_0^2} = \frac{E_0^2 \cos^2 \theta}{E_0^2} = \cos^2 \theta$$

由此得  $I = I_0 \cos^2 \theta$  (10-25)

这一公式称为马吕斯定律。它指出，通过检偏器的偏振光的强度与检偏器的透射轴的方向有关，如果透射轴方向与入射光振动方向之间的角度为  $\theta$ ，则通过它的光强与  $\cos^2 \theta$  成正比。

由式(10-25)可见，当  $\theta = 0^\circ$  或  $180^\circ$  时， $I = I_0$ ，光强最大；当  $\theta = 90^\circ$  或  $270^\circ$  时， $I = 0$ ，没有光从检偏器射出，这就是两个消光位置。当  $\theta$  为其他值时，光强  $I$  介于 0 和  $I_0$  之间。

当用检偏器检验部分偏振光时，透射光的强度随其透射轴的方向而变，设透射光强的极大值和极小值分别为  $I_{\max}$  和  $I_{\min}$ ，则两者相差越大，就说明该部分偏振光的偏振程度越高，通常用偏振度  $P$  来描述部分偏振光的偏振程度，它的定义为

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \quad (10-26)$$

显然，对于自然光有  $I_{\max} = I_{\min}$ ， $P = 0$ ；对于线偏振光  $I_{\min} = 0$ ， $P = 1$ ，即线偏振光是偏振度最大的光，故线偏振光亦称为全偏振光。

### 三、布儒斯特定律

自然光在两种各向同性介质的分界面发生反射和折射时，反射光和折射光一般都是部分偏振光。在反射光中垂直于入射面的光振动多于平行光振动，而在折射光中，平行入射面的光振动多于垂直光振动，如图 10-21 所示。

1812 年，布儒斯特(D. Brewster)发现，反射光的偏振化程度和入射角有关。当入射角  $i_0$  和折射角  $\gamma$  之和等于  $90^\circ$  时，即反射光和折射光垂直时，反射光即成为光振动垂直于入射面的偏振光，如图 10-22 所示，这时的入射角称为布儒斯特角或起偏角。根据折射定律有

$$n_1 \sin i_0 = n_2 \sin \gamma = n_2 \cos i_0$$

即  $\text{tg } i_0 = \frac{n_2}{n_1}$  (10-27)

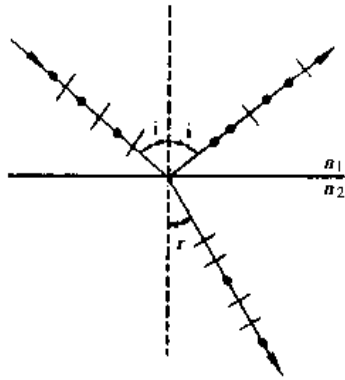


图 10-21 反射光和折射光的偏振

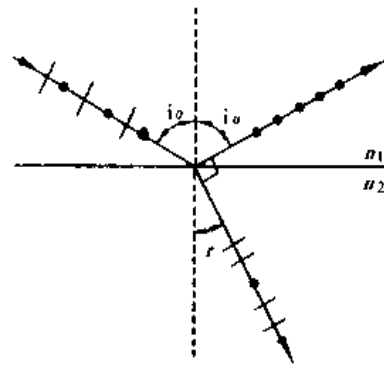


图 10-22 布儒斯特角

式(10-27)称为布儒斯特定律。当自然光以布儒斯特角入射时，反射光中只有垂直于入射面的光振动，入射光中平行于入射面的光振动全部被折射，垂直于入射面的光振动也大部分被折射，而反射的仅是其中的一部分。因此，反射光虽然是完全偏振的，但光强较弱；而折射光虽然是部分偏振的，光强却很强。

例如，当自然光以布儒斯特角从空气射向玻璃时，由玻璃反射获得的偏振光仅占入射自然光总能量的 7%。如果让自然光以布儒斯特角入射到如图 10-23 所示的玻片堆上，则入射光中垂直于入射面的光振动，在玻片堆的每一个分界面上都要被反射掉一部分，而与入射面平行的光振动在各分界面上都不被反射。当玻片数量足够多时，从玻片堆透射出的光就非常接近偏振光，其振动方向与入射面平行。因此，玻片堆可以作起偏器或检偏器。

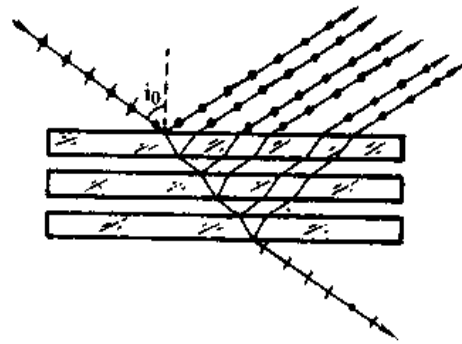


图 10-23 玻片堆

#### 四、光的双折射

当我们透过透明的方解石晶体( $\text{CaCO}_3$ )观察书上的字迹时，可以看到字迹的双重像，如图 10-24 所示。这表明一束光射入晶体后，折射光分成了两束，这种现象称为双折射。在双折射产生的两束折射光中，一束折射光总是遵守折射定律，这束折射光称为寻常光，简称  $o$  光。另一束折射光则不遵守折射定律，它不一定在入射面内，而且对不同的人射角  $i$ ， $\sin i / \sin \gamma$  的量值也不是常量，这束折射光称为非常光，简称  $e$  光。在入射角  $i = 0$  时， $o$  光沿原方向传播， $e$  光一般不沿原方向传播。此时如果把晶体绕光的入射方向慢慢转动， $o$  光始终不动， $e$  光则随着晶体的转动而转动，如图 10-25 所示。

在方解石晶体内存在一个特殊方向，光沿着这个特殊方向传播时，不发生双折射，这个特殊方向称为晶体的光轴。光轴仅标志双折射晶体的一个特定方向，任何平行于这个方向的直线都是晶体的光轴。只有一个光轴的晶体称为单轴晶体，有两个光轴的晶体称为双轴晶体。方解石、石英、红宝石、冰等是单轴晶体，云母、硫磺、蓝



图 10-24 双折射现象

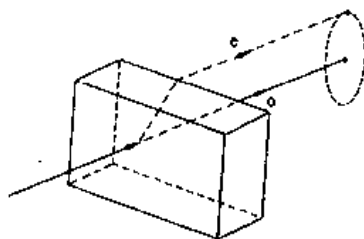


图 10-25 o光和e光

宝石等是双轴晶体。本节的讨论仅限于单轴晶体。

在晶体中任一已知光线与光轴所组成的平面称为该光线的主平面。o光和e光都是偏振光，但是它们的振动方向不同。o光的振动方向垂直于o光的主平面；e光的振动方向在e光的主平面内。当晶体光轴在入射面内时，o光和e光的主平面重合，o光和e光的振动方向互相垂直。一般情况下，o光的主平面与e光的主平面有一个不大的夹角，因而，o光和e光的振动方向不完全垂直。

双折射现象可以用惠更斯原理来说明。在晶体内部，o光在各个方向上折射率相等，传播速度也相等；e光在各个方向上的折射率不相等，传播速度也不相等。因此在晶体中，子波源发出的o光的波阵面是球面，e光的波阵面是旋转椭球面如图10-26所示。由于o光和e光沿光轴方向具有相同的传播速度，因此任何时刻o光和e光的两个波阵面在光轴上都是相切的。换言之，在光轴方向上，o光和e光具有相同的传播速度和折射率。然而在垂直于光轴的方向上，o光和e光的传播速度相差最大。若o光的传播速度用 $u_o$ 表示，折射率用 $n_o$ 表示。e光在垂直于光轴方向上的传播速度用 $u_e$ 表示，折射率用 $n_e$ 表示，真空中的光速用 $c$ 表示，则有 $n_o = c/u_o$ ， $n_e = c/u_e$ ， $n_o$ 和 $n_e$ 称为晶体的主折射率。在有些晶体中， $u_o > u_e$ ，即 $n_o < n_e$ ，这类晶体称为正晶体，如石英和冰等。在另外一些晶体中， $u_o < u_e$ ，即 $n_o > n_e$ ，这类晶体称为负晶体，如方解石和红宝石等。

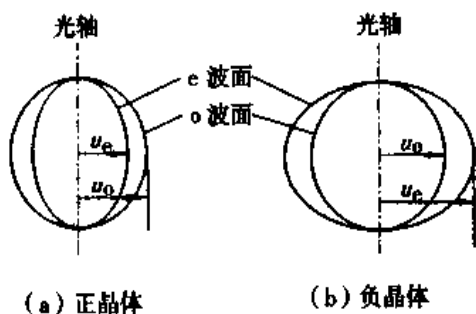


图 10-26 单轴正晶体和负晶体中的子波波阵面

当自然光入射到晶体上时，波阵面上的每一点都可以作为子波源向晶体内部发出球面子波和椭球面子波，作所有各点所发子波的包络面，即得晶体中o光的波面和e光的波面。从入射点引向相应子波波阵面与光波波面的切点的连线，就是晶体中o光、e光的传播方向。图10-27分别作出了三种不同情况下单轴负晶体中o光和e光的传播方向。从图中(a)、(b)可以看出o光、e光折射后沿不同方向传播，产生了

双折射。在(c)图中，尽管o光、e光的传播方向没有改变，但两者的波面并不重合，它们一快一慢沿同一方向传播，到达同一位置时，两者间有一定的相位差，仍然是有双折射的。

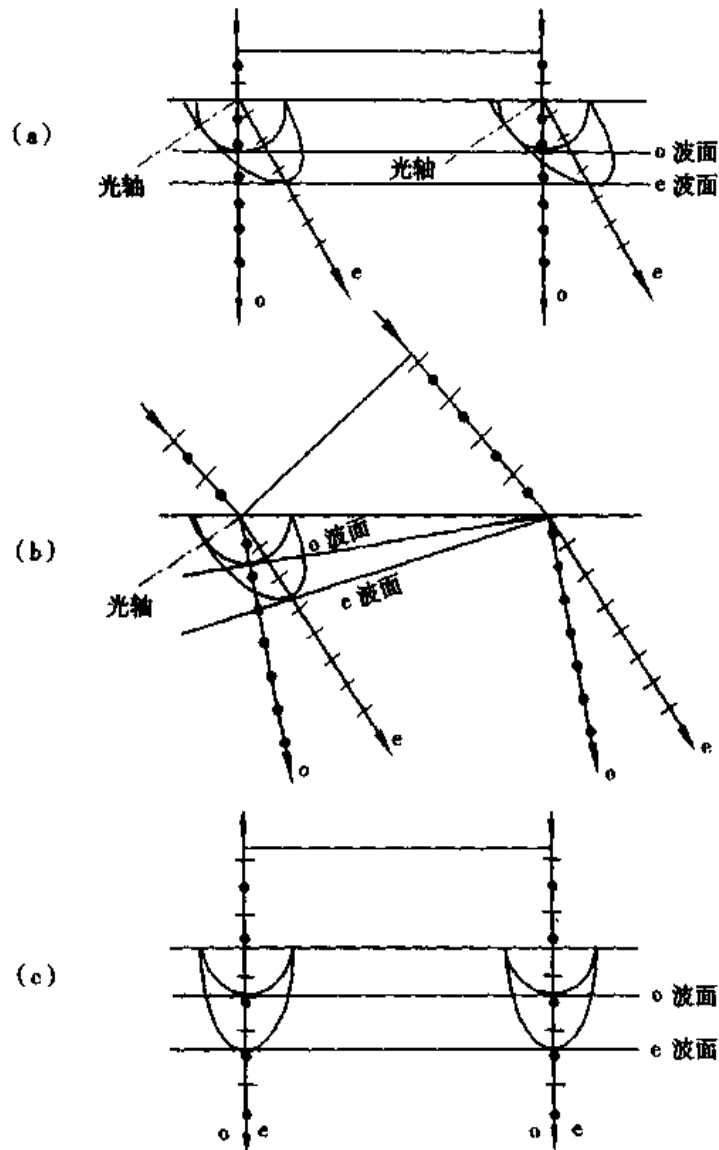


图 10-27 双折射的惠更斯波阵面

(a) 光线垂直入射时的双折射现象 (b) 光线倾斜入射时的双折射现象  
(c) 正入射时晶体的折射(晶体光轴与表面平行)

## 五、二向色性和偏振片

有些单轴晶体除了能产生双折射外，对  $o$  光和  $e$  光的吸收程度有很大的不同，例如电气石晶体，它对  $o$  光有强烈的吸收作用，而对  $e$  光则吸收很少。一般在  $1\text{mm}$  厚的电气石晶体内几乎就能把  $o$  光全部吸收掉，而  $e$  光只略微被吸收。自然光通过这样的晶体片后，就变成了偏振光。晶体对互相垂直的两个光振动具有选择吸收的这种性能，称为晶体的二向色性。除电气石晶体外还有一些有机化合物晶体，如碘化硫酸奎宁等亦有二向色性。用具有二向色性的晶体可以制成起偏器和检偏器。

一种应用很广的新型起偏器是人造的偏振片。最常用的偏振片是 H 偏振片，它是先把聚乙烯醇薄膜加热，沿一定方向拉伸  $3\sim 4$  倍，然后浸入含碘的溶液中，取出



烘干后而制成的。在制作过程中进行拉伸时，聚乙烯醇的长形碳氢化合物分子会沿拉伸方向规则地排列起来；浸入含碘溶液后，碘原子就会附着在沿直线排列的长链分子上，形成一条条能导电的碘分子链。由于电子可以沿着碘分子链运动，因此偏振片将强烈地吸收沿碘分子链方向的电场。所以，电振动矢量平行于拉伸方向的偏振光将被吸收，不能通过偏振片。只有电振动矢量垂直于拉伸方向的偏振光才能透过。此外，常用的偏振片还有 K 偏振片，它是将聚乙烯醇薄膜放在高温炉中，通以氯化氢作为催化剂，除去聚乙烯醇分子中若干个水分子，形成聚合乙烯的细长分子，再单方向拉伸而成。

作为起偏器和检偏器，偏振片虽然还有一些缺点，例如还不能使自然光 100% 的偏振化，对不同波长能量的吸收具有选择性。但是由于偏振片的制造工艺简单，而且面积可以制作得很大，重量又轻，价格低廉，所以在实验技术及日常生活中应用很广。

#### 第四节 偏振光的干涉

自然光通过双折射物质后，所产生的 o 光和 e 光是不相干的。因为在自然光中，不同振动面上的光振动是由光源中不同原子和分子所产生的，相互之间没有联系，也没有恒定的相位差，所以不能产生干涉现象。但是由同一单色偏振光通过双折射物质后，所产生的 o 光和 e 光却是可能相干的。它们的振动方向互相垂直，振动频率相同，相位差恒定，只要设法将它们的振动方向引到同一方向上来，就能满足相干条件，从而实现偏振光的干涉。

图 10-28 是观察偏振光干涉的装置示意图。P<sub>1</sub> 和 P<sub>2</sub> 是两块透射轴方向互相垂直的平行偏振片（即正交的偏振片）。C 是一与 P<sub>1</sub>、P<sub>2</sub> 平行的单轴晶片。其厚度为  $d$ ，主折射率为  $n_o$  和  $n_e$ ，光轴平行于晶面且与 P<sub>1</sub> 的透射轴方向成  $\alpha$  角。单色自然光垂直入射于偏振片 P<sub>1</sub>，通过 P<sub>1</sub> 后成为偏振光，通过晶片 C 后，分解为 o 光和 e 光合成椭圆或圆偏振光。这两束光射入 P<sub>2</sub> 时，只有沿 P<sub>2</sub> 的透射轴方向的光振动才能通过。通过 P<sub>1</sub>、C 和 P<sub>2</sub> 的光振动的振幅矢量如图 10-29 所示。图中 P<sub>1</sub>、P<sub>2</sub> 分别表示两偏振片的透射轴方向， $c$  表示晶片的光轴方向， $E$  为通过 P<sub>1</sub> 的偏振光的振幅。在忽略吸收和其他损耗的情况下，通过晶片 C 后的 o 光和 e 光的振幅为

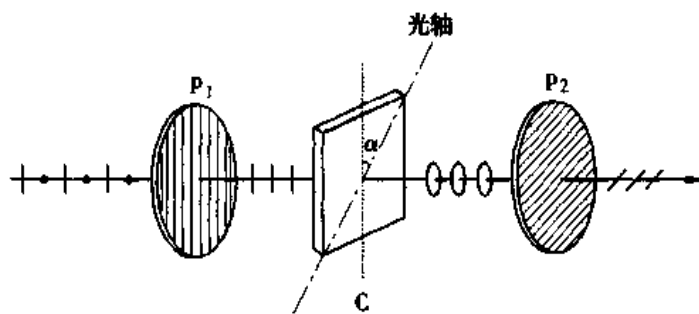


图 10-28 偏振光的干涉装置示意图

$$E_o = E \sin \alpha$$

$$E_e = E \cos \alpha$$

通过  $P_2$  后的两束光的振幅则为

$$E_{2o} = E_o \cos \alpha = E \sin \alpha \cos \alpha$$

$$E_{2e} = E_e \sin \alpha = E \sin \alpha \cos \alpha$$

即  $E_{2o} = E_{2e}$ ，这两束光的总相位差为

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)d + \pi \quad (10-28)$$

式中，第一项是通过晶片  $c$  时产生的相位差。第二项是通过  $P_2$  时产生的附加相位差。从振幅矢量图上可见  $E_{2o}$  和  $E_{2e}$  方向相反，因而附加相位差为  $\pi$ 。如果  $P_1$  和  $P_2$  的透射轴方向平行，就没有这个附加的相位差。

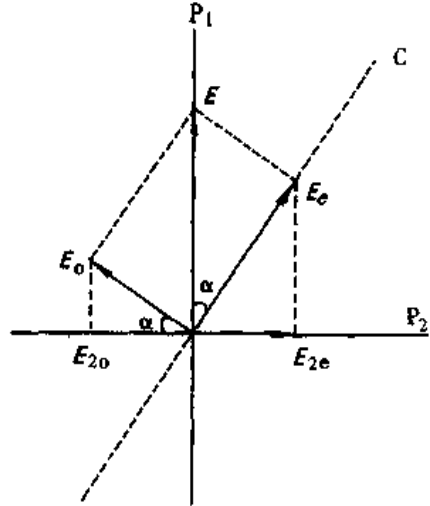


图 10-29 偏振光干涉的振幅矢量图

通过  $P_2$  后的这两束光是由同一偏振光分解而来，振动频率相同，振动方向相同，相位差恒定，所以它们是相干的，因此从偏振片  $P_2$  射出时发生干涉。在  $P_1$  和  $P_2$  的正交的情况下，当满足下式时，干涉加强：

$$\Delta\varphi = 2k\pi, \text{ 或 } (n_o - n_e)d = (2k - 1)\frac{\lambda}{2}, k = 1, 2, 3, \dots \quad (10-29)$$

当满足下式时，干涉减弱：

$$\Delta\varphi = (2k + 1)\pi, \text{ 或 } (n_o - n_e)d = k\lambda, k = 1, 2, 3, \dots \quad (10-30)$$

如果晶片厚度均匀，当用单色自然光入射，干涉加强时， $P_2$  后面的视场最亮；干涉减弱时视场最暗，并无干涉条纹。当晶片厚度不均匀时，各处干涉情况不同，则视场中将出现干涉条纹。当白光入射时，对各种波长的光来讲，由(10-28)式可知，干涉加强和减弱的条件因波长的不同而各不相同。所以当晶片厚度一定时，视场将出现一定的色彩，这种现象称为色偏振。如果这时晶片各处厚度不同，则视场中将出现彩色条纹。

色偏振是检定双折射现象的极灵敏的方法，当两主折射率差  $n_o - n_e$  很小时，用直接观察  $o$  光和  $e$  光的方法很难确定双折射的发生。但是，将具有微弱的各向异性物质制成薄片放在正交的两偏振片之间，通过视场是否变亮或显示出色彩就可鉴定。偏光显微镜就是根据以上原理制成的。

## 第五节 偏振光的应用

### 一、光弹效应

某些透明的各向同性的介质如玻璃、塑料等，在机械力的作用下发生形变时，会变为各向异性的，从而使光产生双折射，这种现象称为光弹效应，亦称为应力双折射。如果对这些介质施加的是压力或张力，它们就显示出负单轴晶体或正单轴晶体的

特性，其有效光轴都在应力的方向上，所引起的双折射与应力成正比，即

$$n_o - n_e = kp \quad (10-31)$$

式中， $n_o$  和  $n_e$  为介质对 o 光和 e 光的主折射率， $k$  是由介质的性质决定的比例系数， $p$  为应力。

如果把这些介质制作成片状，插在两块正交的偏振片之间，如图 10-30 所示。当对介质 C 施加压力或张力时，C 所产生的 o 光和 e 光，通过 P<sub>2</sub> 将产生干涉，出现干涉

生与消失。利用它可以制成弛豫时间极短( $10^{-9}$ s)的断续器或调制器,如高速光闸和电光调制器等。目前已广泛用于高速摄影、电影、电视和激光通讯等许多领域。

### 三、物质的旋光性

当偏振光沿光轴方向通过石英晶体时,其振动面会发生旋转,这一现象是阿喇果(D. Arago)于1811年首先发现的。后来在许多其他晶体如氯酸钠( $\text{NaClO}_3$ )和溴酸钠( $\text{NaBrO}_3$ )等以及某些液体如松节油、糖的水溶液和酒石酸溶液等中也发现了这种现象。偏振光通过物质时振动面发生旋转的现象称为旋光现象。能使偏振光的振动面旋转的性质,称为旋光性。具有旋光性的物质称为旋光物质。

实验表明,对于单色偏振光,旋光物质使振动面旋转的角度 $\psi$ 与偏振光通过的物质的厚度 $L$ 成正比,即

$$\psi = \alpha L \quad (10-33)$$

如果物质为溶液,振动面旋转的角度还与溶液的浓度 $c$ 成正比,即

$$\psi = \alpha c L \quad (10-34)$$

其中,比例系数 $\alpha$ 称为物质的旋光率。不同物质的旋光率不同,对于同一种物质, $\alpha$ 的值与偏振光的波长有关,即对给定长度的旋光物质,不同波长的偏振光将旋转不同的角度,这种现象称为旋光色散。固体物质的旋光率 $\alpha$ 在数值上等于单位长度的旋光物质所引起的偏振光的振动面的旋转角度;溶液的旋光率 $\alpha$ 在数值上等于单位长度的单位浓度的溶液所引起的偏振光的振动面旋转的角度。旋光率一般用 $[\alpha]_t^\lambda$ 表示, $t$ 指温度, $\lambda$ 指偏振光的波长。(10-34)式也可写为

$$\psi = [\alpha]_t^\lambda \frac{c}{100} L \quad (10-35)$$

式中浓度 $C$ 以100ml溶液中溶质的克数为单位, $L$ 以dm为单位,一般在测量时取 $t = 20^\circ\text{C}$ ,采用钠光源(其波长相当于太阳光谱中的D线),这时的旋光率写成 $[\alpha]_D^{20}$ 。式(10-35)常用于测定旋光性溶液的浓度,在医学和制糖工业中,用来测定旋光溶液的旋光率和浓度的旋光仪或糖量计就是根据这个原理设计的。

偏振光的振动面的旋转具有方向性,迎面观察通过旋光物质的光,振动面按顺时针方向旋转的称为右旋,按逆时针方向旋转的称为左旋。光的振动面究竟是左旋还是右旋,与旋光物质的结构有关。石英和许多有机物质都具有左右旋两种旋光异构体。某些药物也有左右旋之分,且左旋药和右旋药疗效不同。一些生物物质如不同的氨基酸和DNA等也有左右旋的不同等等。

为了解释物质的旋光性,菲涅耳作了如下假设:线偏振光在旋光晶体中沿光轴传播时,分解成了左旋和右旋圆偏振光,它们的传播速度略有不同,或者说它们的折射率不同,经过旋光晶片后产生了附加的相位差,从而使出射的合成线偏振光的振动面有了一定角度的旋转。

如果旋光物质对特定波长的入射光有吸收,而且对左旋和右旋圆偏振光的吸收能力不同,那么在这种情况下不仅左旋和右旋圆偏振光的传播速度不同,而且振幅也不同。于是,随着时间的推移,左右旋圆偏振光的合成光振动矢量的末端,将循着一个

椭圆的轨迹移动，这就是说，由速度不同振幅也不相同的左右旋圆偏振光叠加所产生的不再是线偏振光，而是椭圆偏振光，这种现象称为圆二色性。

在研究分子的内旋转、分子的相互作用以及微细立体结构方面，旋光法和圆二色性法有着其他方法不可替代的作用。

## 第六节 液晶的光学特性

### 一、液晶的分类和结构

液晶是液态晶体的简称，它是介于结晶态与液态之间的一种物质态。它既具有晶体的各向异性，又具有液体的流动性。根据形成的条件和组成，液晶可分为热致液晶和溶致液晶两大类。热致液晶是加热液晶物质时形成的各向异性熔体，它只能在一定的温度范围内存在。溶致液晶是由符合一定结构要求的化合物与溶剂组成的液晶体系。根据分子排列方式的不同，热致液晶又可分为近晶相(或称层状相)、向列相(或称丝状相)和胆甾相(或称螺旋状相)三种。

向列相液晶是由长径比很大的棒状分子组成，分子质心没有长程有序，分子不排列成层，它能上下、左右、前后滑动，只在分子长轴方向上保持相互平行或近于平行，如图 10-32(a)所示。

近晶相液晶是由棒状或条状分子组成，分子排列成层，层内分子长轴相互平行，其方向可以垂直于层面或与层面成倾斜排列，分子质心位置在层内无序，可以自由平移。分子可以前后、左右滑动，但不能在上下层之间移动，如图 10-32(b)所示。

胆甾相液晶的分子呈扁平形状，排列成层，层内分子相互平行。分子长轴平行于层平面，不同层的分子长轴方向稍有变化，沿层的法线方向排列成螺旋状结构，如图 10-32(c)所示。当不同层的分子长轴排列沿螺旋方向经历  $360^\circ$  的变化后，又回到初始取向，这个周期性的层间距称为胆甾相液晶的螺距。

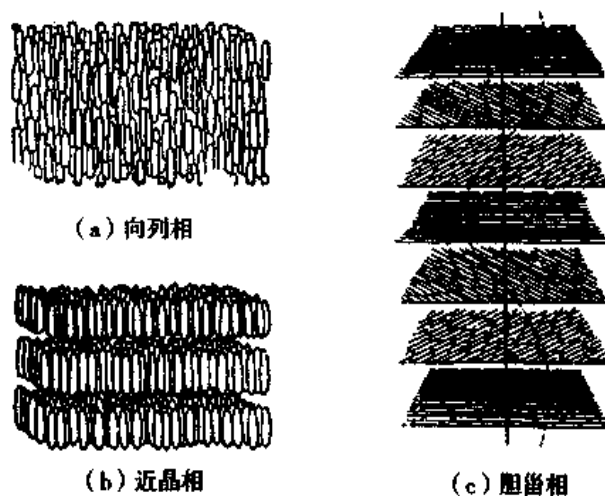


图 10-32 热致液晶的分子排列

## 二、液晶的双折射现象

液晶具有晶体的各向异性,当光线射入液晶后也会产生双折射现象。双折射现象实质上表示液晶中各个方向上的介电常数以及折射率是不同的。通常用符号 $\epsilon_{//}$ 和 $\epsilon_{\perp}$ 分别表示沿液晶分子长轴方向和垂直于长轴方向上的介电常数,并且把 $\epsilon_{//} > \epsilon_{\perp}$ 的液晶称为正性液晶或P型液晶;而把 $\epsilon_{//} < \epsilon_{\perp}$ 的液晶称为负性液晶或N型液晶。

多数液晶只有一个光轴方向,在液晶中光沿光轴方向传播时不发生双折射。一般向列相液晶和近晶相液晶的光轴沿分子长轴方向,胆甾相液晶的光轴垂直于层面。

## 三、胆甾相液晶的选择反射

胆甾相液晶在白光照射下,呈现美丽的色彩,这是它选择反射某些波长的光的结果。实验表明,其反射光的波长 $\lambda$ 满足晶体衍射的布拉格(W.H.Bragg)公式,即

$$\lambda = 2nP\sin\varphi \quad (10-36)$$

式中 $n$ 是平均折射率, $P$ 是胆甾相液晶的螺距, $\varphi$ 是入射光与液晶表面间的夹角,如图10-33所示。此式表明,沿不同角度可以观察到不同颜色的光。当温度变化时,胆甾相液晶的螺距会发生敏锐的变化,因而反射光的颜色也随之发生变化。胆甾相液晶的这种特性被广泛用于液晶温度计和各种测量温度变化的显示装置上。

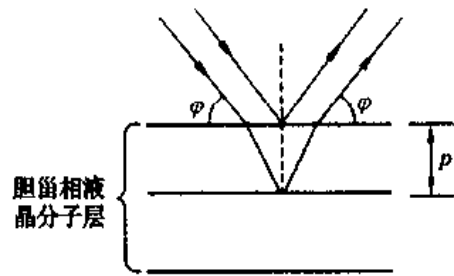


图 10-33 胆甾相液的选择反射

## 四、液晶的电光效应

在电场作用下,液晶的光学特性发生变化,称为电光效应。下面介绍两种电光效应。

**1. 电控双折射效应** 在玻璃表面涂上二氧化锡( $\text{SnO}_2$ )薄膜就形成透明电极。将液晶注入透明电极之间,形成厚度约为 $10\mu\text{m}$ 的薄膜,称为液晶盒。液晶分子长轴方向与电极表面垂直时称为垂面排列,平行表面时称为沿面排列。将垂面排列的液晶盒放在两正交的偏振片之间,如图10-34所示。未加电场时,通过偏振片 $P_1$ 的光在液晶内沿光轴方向传播,不发生双折射。由于两偏振片正交,所以装置不透明。加电场并超过某一数值(阈值)时,电场使液晶分子轴方向倾斜,使在液晶中传播的光发生双折射,装置由不透明变为透明。光轴的倾斜随电场的变化而变化,因而两双折射光束间的相位差也随之变化。当入射光为复色光时,出射光的颜色也随之变化。

**2. 动态散射** 把向列相液晶注入带有透明电极的液晶盒内,未加电场时,液晶盒透明,加电场并超过某一数值(阈值)时,液晶盒由透明变为不透明,这种现象称为动态散射。这是因为盒内离子和液晶分子在电场作用下互相碰撞,使液晶分子产生紊乱运动,使折射率随时发生变化,因而使光发生强烈散射的结果。去掉电场后,则恢复透明状态。但是如果在向列相液晶中混以适当的胆甾相液晶,则散射现象可以保存

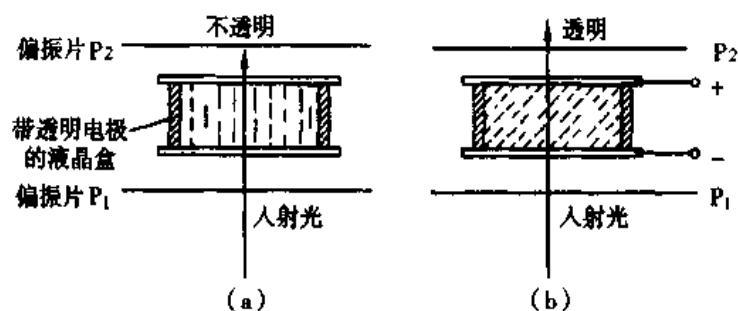


图 10-34 电控双折射

(a) 未加电场 (b) 加电场

一些时间, 这种情况称为存储的动态散射。动态散射在液晶显示技术中有广泛的应用。

存在于生物体内的液晶称为生物液晶。生物液晶就其形成方式而言, 都是溶致液晶。在人体的某些组织和器官, 如神经髓鞘、肾上腺皮质、卵巢、胆囊、胆汁及细胞膜等中, 都存在着液晶态的物质。对生物组织中的液晶物质的研究已成为现今生物物理研究中一项引人注目的内容。

### 思考题与习题十

10-1 在杨氏实验中, 如果光源  $S$  到两狭缝  $S_1$  和  $S_2$  的距离不等, 例如  $SS_1 > SS_2$ , 则对实验结果有什么影响?

10-2 为什么挡住光线容易, 而挡住声音难?

10-3 在观察单缝衍射时, (1)如果单缝垂直于它后面的透镜的光轴向上或向下移动, 屏上衍射图样是否改变? 为什么? (2)若将光源  $S$  垂直于光轴向上或向下移动, 屏上的衍射图样是否改变? 为什么?

10-4 在杨氏实验中, 两狭缝相距  $0.2 \text{ mm}$ , 屏与缝相距  $1 \text{ m}$ , 第 3 明条纹距中央明条纹  $7.5 \text{ mm}$ , 求光波波长。 (500 nm)

10-5 在杨氏实验中, 两缝相距  $0.3 \text{ mm}$ , 要使波长为  $600 \text{ nm}$  的光通过后在屏上产生间隔为  $1 \text{ mm}$  的干涉条纹, 问屏距缝应有多远? (0.5 m)

10-6 波长  $500 \text{ nm}$  的光波垂直入射一层厚度  $e = 1 \mu\text{m}$  的薄膜。膜的折射率为  $1.375$ 。问: (a)光在膜中的波长是多少? (b)在膜内  $2e$  距离含多少波长? (c)若膜两侧都是空气, 在膜面上反射的光波与经膜底面反射后重出膜面的光波的相差为多少? (363.63nm; 5.5;  $10\pi$  或  $12\pi$ )

10-7 用一层透明物质涂在玻璃上, 使波长  $520 \text{ nm}$  的光反射最少。若玻璃的折射率为  $1.50$ , 透明物质折射率为  $1.30$ , 求涂层最小厚度。 (100 nm)

10-8 一玻璃劈尖, 折射率  $n \approx 1.52$ , 波长  $\lambda = 589.3 \text{ nm}$  的钠光垂直入射, 测得相邻条纹间距  $L = 5.0 \text{ mm}$ , 求劈尖夹角。 ( $8''$ )

10-9 用单色光观察牛顿环, 测得某一明环的直径为  $3.00 \text{ mm}$ , 它外面第 5 个明环直径为  $4.60 \text{ mm}$ , 平凸透镜的半径为  $1.03 \text{ m}$ , 求此单色光的波长。 (590 nm)

10-10 钠光 ( $589 \text{ nm}$ ) 通过单缝后在  $1 \text{ m}$  处的屏上产生衍射条纹, 若两个第一级暗纹之间的距离为  $2 \text{ mm}$ , 求单缝宽度。 (0.589 mm)

10-11 一单色光垂直入射一单缝, 其衍射的第三级明纹的位置恰与波长为  $600 \text{ nm}$  的单色光入

射该缝时衍射的第二级明纹位置重合, 试求该单色光的波长。 (428.6 nm)

10-12 用波长为 500 nm 的单色光, 垂直照射到一宽度为 0.5 mm 的单缝上, 在缝后置一焦距为 0.8 m 的凸透镜, 试求屏上中央明纹和其他明纹的宽度。

( $1.6 \times 10^{-3}$  m;  $8.0 \times 10^{-4}$  m)

10-13 一束单色平行光垂直入射到每毫米 500 条缝的光栅上, 所成二级像与原入射方向成  $30^\circ$  角, 求波长。 (500 nm)

10-14 一束白光垂直入射光栅, 如果其中某一光波的三级像与波长 600 nm 的光波的二级像重合, 求这光的波长。 (400 nm)

10-15 用波长为 589 nm 的钠光, 垂直入射到每毫米 500 条缝的光栅上, 最多能看到几级明条纹? (3 级)

10-16 两块偏振片的透射轴互成  $90^\circ$  角, 在它们之间插入另一偏振片, 使它的透射轴与第一片的透射轴夹角为  $\theta$  角。射向第一偏振片的自然光强度为  $I_0$ , 求通过三块偏振片后的光强。(a)  $\theta = 45^\circ$ ; (b)  $\theta = 30^\circ$ 。 ( $I_0/8$ ;  $3I_0/32$ )

10-17 两块偏振片的透射轴互相垂直, 在它们之间插入两块偏振片, 使相邻两片偏振片透射轴都夹  $30^\circ$  角。如果入射的自然光强度为  $I_0$ , 求通过所有偏振片后光的强度。 (0.21  $I_0$ )

10-18 平行平面玻璃板放置在空气中, 空气折射率近似为 1, 玻璃折射率  $n = 1.50$ 。试问当自然光以布儒斯特角入射到玻璃的上表面时, 折射角是多少? 当折射光在下表面反射时, 其反射光是否是偏振光? (33.7°; 是偏振光)

(杨海珉)



# 第十一章 几何光学

学习本章后，你应：

1. 掌握单球面折射成像的原理、计算方法和符号规则。
2. 掌握共轴球面系统、薄透镜成像的规律和基本公式。
3. 掌握光学显微镜的分辨本领和放大率；了解医学上常用的几种显微镜。
4. 了解眼睛的光学系统，非正视眼屈光不正的矫正。

## 第一节 球面折射

### 一、单球面折射

当两种不同折射率的透明媒质的分界面为球面的一部分时，所产生的折射现象称为单球面折射。单球面折射的规律是了解各种透镜以及眼睛等光学系统的基础。

图 11-1 是两种不同的均匀透明媒质，其折射率分别为  $n_1$  和  $n_2$ ，NM 为折射面，C 为球面的曲率中心， $r$  为曲率半径，通过曲率中心 C 的直线 OCI 为折射面的主光轴，并且假设  $n_1 < n_2$ ，球面与主光轴的交点为折射面的顶点。

现在来研究主光轴上的物点 O 发出的光线经单球面折射后成像于主光轴上点 I 的位置。物点 O 到顶点 P 的距离  $OP = u$  叫物距，像点 I 到顶点 P 的距离  $PI = v$  叫像距。自 O 点发出的光线沿主光轴入射到折射面的顶点 P，其方向不改变；沿靠近光轴的任一方向的光线入射到折射面的 A 点，经折射后与主光轴交于 I 点，则 I 点就是物点 O 的像。由折射定律有

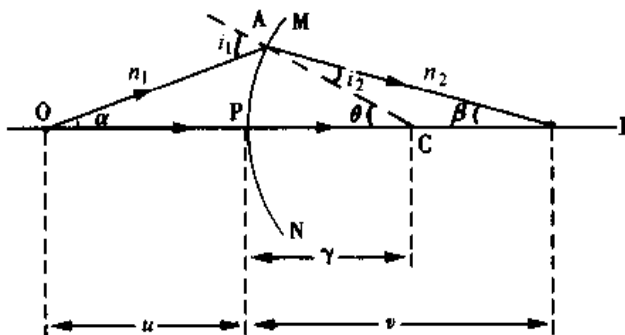


图 11-1 单球面折射

$$n_1 \text{Sini}_1 = n_2 \text{Sini}_2$$

由于 OA 是近轴光线, AP 的长度比  $u$ 、 $v$ 、 $r$  均小得多, 因此,  $\text{Sini}_1 \approx i_1$ ,  $\text{Sini}_2 \approx i_2$  折射定律可写成

$$n_1 \cdot i_1 = n_2 \cdot i_2$$

由图可知  $i_1 = \alpha + \theta$ ,  $\theta = i_2 + \beta$ , 即  $i_2 = \theta - \beta$

将  $i_1$ 、 $i_2$  的表达式代入上式, 整理得

$$n_1 \cdot \alpha + n_2 \cdot \beta = (n_2 - n_1) \theta$$

由于  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\theta$  均很小, 它们的正切值可以用其角度的弧度值代替, 则

$$\alpha = \frac{AP}{u}, \quad \beta = \frac{AP}{v}, \quad \theta = \frac{AP}{r}$$

代入上式, 并消去 AP 后, 则有

$$\frac{n_1}{u} + \frac{n_2}{v} = \frac{n_2 - n_1}{r} \quad (11-1)$$

式(11-1)称为单球面折射公式, 它适用于一切凸、凹球面。在应用此公式时须遵守如下符号规则: 凡是实物、实像到折射顶点的距离均取正值; 虚物、虚像到折射顶点的距离均取负值; 凸球面对入射光线则  $r$  为正, 反之为负。应该指出的是: 式(11-1)只适用于近轴光线( $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\theta$  均很小), 否则来自同一物点的光线经单球面折射后不能会聚于同一点。

对于给定的物距  $u$ , 不同的折射球面( $n_1$ 、 $n_2$ 、 $r$ )将有不同的像距  $v$  与之对应, 因此可以用式(11-1)右端的  $(n_2 - n_1)/r$  表示球面的折射本领, 称为折射面的光焦度, 用  $\phi$  表示。

$$\phi = \frac{n_2 - n_1}{r} \quad (11-2)$$

并规定  $r$  以 m 为单位, 则  $\phi$  的单位为屈光度, 以 D 表示。例如  $n_2 = 1.5$ ,  $n_1 = 1.0$ ,  $r = 10\text{cm}$  的单球面, 其焦度等于 5 屈光度, 记为 5D。

当点光源位于主光轴上某点  $F_1$  处时, 如果由该点发出的光线经单球面折射后变为平行光线, 即  $v = \infty$ , 点  $F_1$  称为该折射面的第一焦点, 从第一焦点到折射面顶点的距离叫第一焦距, 以  $f_1$  表示。将  $v = \infty$  代入式(11-1)得

$$f_1 = \frac{n_1}{n_2 - n_1} r \quad (11-3)$$

如果平行于主光轴的近轴光线经单球面折后成像于主光轴上一点  $F_2$ , 则点  $F_2$  称为折射面的第二焦点, 从点  $F_2$  到折射面顶点的距离叫第二焦距, 以  $f_2$  表示。将  $u = \infty$  代入式(11-1)得

$$f_2 = \frac{n_2}{n_2 - n_1} r \quad (11-4)$$

当  $f_1$ 、 $f_2$  为正时,  $F_1$ 、 $F_2$  是实焦点, 折射面有会聚作用; 当  $f_1$ 、 $f_2$  为负时,  $F_1$ 、 $F_2$  是虚焦点, 折射面有发散作用。

由式(11-3)和式(11-4)可知, 折射面的两个焦距不相等, 它们的比值等于折射面

两侧媒质的折射率之比, 即

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{n_1}{n_2} \quad (11-5)$$

由式(11-2)和(11-5)可得到折射面的两个焦距与焦度之间有如下关系

$$\phi = \frac{n_1}{f_1} = \frac{n_2}{f_2} \quad (11-6)$$

可见, 对同一折射面, 尽管其两侧的焦距不相等, 但是其焦度相等。

有时希望用折射面的两个焦距  $f_1$ 、 $f_2$  表示近轴光线的单球面折射公式, 为此, 用  $r/(n_2 - n_1)$  乘以式(11-1)的两端, 得

$$\frac{n_1}{u} \cdot \frac{r}{n_2 - n_1} + \frac{n_2}{v} \cdot \frac{r}{n_2 - n_1} = 1$$

即 
$$\frac{f_1}{u} + \frac{f_2}{v} = 1 \quad (11-7)$$

此式称为近轴光线单球面折射成像的高斯公式。

【例题 11-1】圆柱形玻璃棒( $n = 1.5$ )的一端为半径是 2cm 的凸球面。(1)求当棒置于空气中时, 在棒的轴线上距离棒端外 8cm 处的物点所成像的位置。(2)若将此棒放入水( $n = 1.33$ )中时, 物距不变, 像距应是多少(设棒足够长)?

解: (1)当棒置于空气中时,  $n_1 = 1.0$ ,  $n_2 = 1.5$ ,  $r = 2\text{cm}$ ,  $u = 8\text{cm}$  等代入式(11-1)得

$$\frac{1}{8} + \frac{1.5}{v} = \frac{1.5 - 1.0}{2}$$

解得  $v = 12\text{cm}$

所成像在棒内轴线上离顶点 12cm 处, 为实像。

(2)当棒置于水中时,  $n_1 = 1.33$ ,  $n_2 = 1.5$ ,  $r = 2\text{cm}$ ,  $u = 8\text{cm}$  等代入式(11-1)得

$$\frac{1.33}{8} + \frac{1.5}{v} = \frac{1.5 - 1.33}{2}$$

解得  $v = -18.5\text{cm}$

可见, 像点在棒外轴线上离顶点 18.5cm 处, 形成一虚像。成像过程如图 11-2 所示。

【例题 11-2】从几何光学的角度来看, 人眼可简化为高尔斯特兰简化眼模型。这种模型将人眼成像归结成一个曲率半径为 5.7mm、媒质折射率为 1.333 的单球面折射成像。(1)试求这种简化眼的焦点位置和焦度; (2)若已知某物在膜后 24.02mm 处视网膜上成像, 求该物应放在何处。

解: (1)已知  $n_1 = 1.0$ ,  $n_2 = 1.333$ ,  $r = 5.7\text{mm}$ , 于是有

$$f_1 = \frac{n_1}{n_2 - n_1} r = \frac{1.0}{1.333 - 1.0} \times 5.7 = 17.12\text{mm}$$

$$f_2 = \frac{n_2}{n_2 - n_1} r = \frac{1.333}{1.333 - 1.0} \times 5.7 = 22.82\text{mm}$$

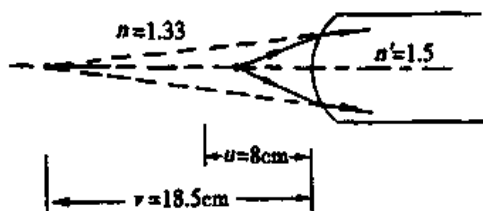


图 11-2 例题 11-1

$$\phi = \frac{n_2 - n_1}{r} = \frac{1.333 - 1.0}{5.7 \times 10^{-3}} = 58.42\text{D}$$

(2) 已知  $v = 24.02\text{mm}$ , 应用高斯公式得

$$\frac{f_1}{u} + \frac{f_2}{v} = 1$$

即

$$\frac{17.12}{u} + \frac{22.82}{24.02} = 1$$

解之得

$$u = 342.4\text{mm}$$

## 二、共轴球面系统

如果两个或两个以上的折射面的曲率中心在同一直线上, 它们便组成共轴球面系统, 简称共轴系统。各球心所在的直线为共轴系统的主光轴。

光通过共轴球面系统的成像, 决定于入射光依次在每一个折射面上折射的结果。在成像过程中, 前一个折射面所成的像, 即为相邻的后一个折射面的物。因此, 可应用单球折射公式, 采用逐次成像法, 直到求出最后一个折射面的成像为止。此像即为光通过共轴球面系统所成的像。

[例题 11-3] 玻璃球( $n = 1.5$ )的半径为  $10\text{cm}$ , 一点光源放在球前  $40\text{cm}$  处。求近轴光线通过玻璃球后所成的像。

解: 对第一折射面来说,  $n_1 = 1.0$ ,  $n_2 = 1.5$ ,  $r = 10\text{cm}$ ,  $u_1 = 40\text{cm}$ , 代入式(11-1)

得

$$\frac{1.0}{40} + \frac{1.5}{v_1} = \frac{1.5 - 1.0}{10}$$

解得

$$v_1 = 60\text{cm}$$

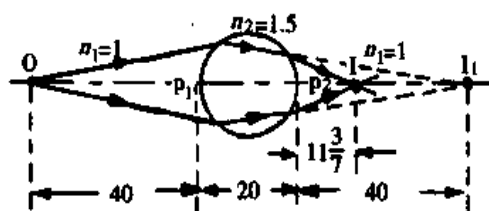


图 11-3 例题 11-3

如果没有第二折射面,  $I_1$  应在  $P_1$  后面  $60\text{cm}$  处。由于  $I_1$  在第二折射面之后,  $I_1$  对于第二折射面是一虚物, 则  $u_2 = -(60 - 20) = -40\text{cm}$ ,  $n_2 = 1.5$ ,  $n_1 = 1.0$ ,  $r = 10\text{cm}$ , 代入式(11-1), 得:

$$-\frac{1.5}{40} + \frac{1}{v_2} = \frac{1.0 - 1.5}{-10}$$

解得

$$v_2 = 11.4\text{cm}$$

因此, 最后成像在玻璃球后面  $11.4\text{cm}$  处, 整个系统成像过程如图 11-3 所示。

## 第二节 透 镜

透镜是放大镜、幻灯机、显微镜、照相机以及许多光学仪器的重要组成部分。它是具有两个折射面的共轴系统, 两球面之间是均匀的透明物质。依据透镜的厚度及折射面的形状, 可将透镜分为薄透镜、厚透镜及柱面透镜, 并且这些透镜所成的像具有像差。

## 一、薄透镜公式

设折射率为  $n$  的薄透镜置于折射率为  $n_0$  的媒质中，在光轴上的物点  $O$  发出的光经透镜折射后成像于  $I$  处，如图 11-4 所示。以  $u_1$ 、 $v_1$ 、 $r_1$  和  $u_2$ 、 $v_2$ 、 $r_2$  分别表示第一折射面和第二折射面的物距、像距和曲率半径。以  $u$ 、 $v$  分别表示透镜的物距和像距。由于是薄透镜，则  $u_1 = u$ ， $v_1 = -u_2$ ， $v_2 = v$ 。将它们代入式(11-1)，分别得到第一、第二折射面的球面折射公式

$$\frac{n_0}{u} + \frac{n}{v_1} = \frac{n - n_0}{r_1}$$

$$-\frac{n}{v_1} + \frac{n_0}{v} = \frac{n_0 - n}{r_2}$$

将上述两式相加后并整理，则有

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{n - n_0}{n_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (11-8)$$

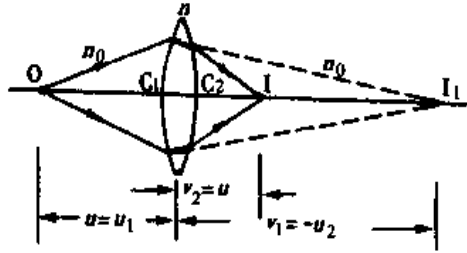


图 11-4 薄透镜成像

如果薄透镜周围的媒质为空气，即  $n_0 = 1$ ，上式变为

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = (n - 1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (11-8a)$$

式(11-8)和式(11-8a)称为薄透镜的成像公式。公式中  $u$ 、 $v$ 、 $r_1$ 、 $r_2$  的正、负号仍然遵守式(11-1)中的符号法则。因此，它们适用于各种形状的凸、凹透镜。

一个透镜也有两个焦点，当薄透镜前后的媒质相同时，由式(11-8)可以证明，两个焦距相等，其值为

$$f = \left[ \frac{n - n_0}{n_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \right]^{-1} \quad (11-9)$$

当薄透镜置于空气中，则  $n_0 = 1$ ，上式变为

$$f = \left[ (n - 1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \right]^{-1} \quad (11-9a)$$

将  $f$  之值代入薄透镜公式，得

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f} \quad (11-10)$$

此式称为薄透镜公式的高斯形式。

薄透镜的焦距越短，它对光线的会聚或发散本领越强，所以人们用焦距的倒数  $1/f$  表示透镜对光线的会聚或发散本领，称为透镜的焦度，即  $\varphi = 1/f$ 。当焦距以米为单位时，焦度的单位为屈光度。会聚透镜的焦度为正，发散透镜的焦度为负。在配制眼镜时常以度为单位，它们之间的关系是 1 屈光度等于 100 度。

## 二、薄透镜组合

两个或两个以上薄透镜组成的共轴系统，称为薄透镜组合，简称透镜组。物体通过透镜组后所成像的位置，应用薄透镜公式，采用逐次成像法求出，即先求第一透镜所成的像，将此像作为第二透镜的物，求出第二次所成的像，依次类推，直至最后一

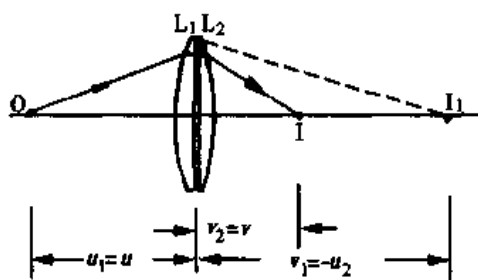


图 11-5 薄透镜的组合

个透镜所成的像，便是物体经过透镜组后所成的像。

薄透镜的组合有多种方式，其中最简单的情形是两个薄透镜紧密贴合在一起，便组成透镜组，可以用薄透镜公式来求出最后成的像。图 11-5 为透镜组成像过程。设两个透镜的焦距分别为  $f_1$  与  $f_2$ ，透镜组的物距为  $u$ ，像距为  $v$ 。物体经第一透镜的成像为  $I_1$ ，相应的物距和像距为  $u_1$  与  $v_1$ ，并且  $u_1 = u$ 。由透镜公式(11-10)

得

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v_1} = \frac{1}{f_1}$$

对于第二个透镜， $u_2 = -v_1$ ， $v_2 = v$ ，则

$$-\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f_2}$$

两式相加，得

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \quad (11-11)$$

当  $v = \infty$  时，对应的  $u$  值即为透镜组的等效焦距  $f$ ，则

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \quad (11-12)$$

即紧密接触的透镜组的等效焦距的倒数等于组成它的各透镜焦距的倒数之和。

如果以  $\phi_1$ 、 $\phi_2$ 、 $\phi$  分别表示第一透镜、第二透镜和透镜组的焦度，它们之间的关系

$$\phi = \phi_1 + \phi_2$$

这一关系常被用来测量透镜的焦度。例如，要测定一近视眼镜片(凹透镜)的焦度，用已知焦度的凸透镜与它紧密接触，使组合后的焦度为零，即光线通过透镜组后既不发散也不会聚。此时有

$$\phi_1 - \phi_2 = 0 \text{ 或 } \phi_1 = -\phi_2$$

即两透镜的焦度数值相等，符号相反。

[例题 11-4] 凸透镜  $L_1$  和凹透镜  $L_2$  的焦距分别为 20cm 和 40cm， $L_2$  在  $L_1$  右边 40cm 处。在透镜  $L_1$  左边 30cm 处放置一物体 PQ，求经透镜组后所成的像。

解：1. 作图法

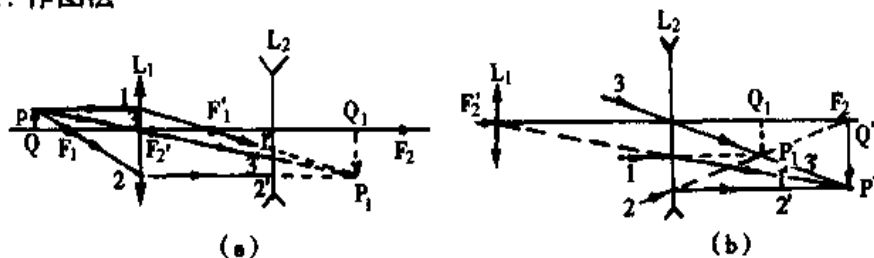


图 11-6 例题 11-4 图示

根据题意将两个透镜和它们的焦距以及物体的位置按比例标在图 11-6 (a) 上。

如果透镜  $L_2$  不存在, 物体 PQ 经透镜  $L_1$  在  $Q_1$  点形成一实像  $P_1Q_1$ , 虽然此像不会形成, 但  $P_1Q_1$  还是作为透镜  $L_2$  的虚物, 并在  $Q'$  点形成最后的实像  $P'Q'$ , 如图 11-6 (b)。

## 2. 计算法

透镜  $L_1$  的成像 
$$\frac{1}{30} + \frac{1}{v_1} = \frac{1}{20}$$

解之得 
$$v_1 = 60\text{cm (实像)}$$

透镜  $L_2$  的成像: 由两透镜的位置关系可知,  $u_2 = -(60 - 40) = -20\text{cm (虚物)}$ ,  $f_2 = -40\text{cm}$ ,  $v_2 = v$ , 将这些数据代入透镜公式, 则

$$-\frac{1}{20} + \frac{1}{v} = -\frac{1}{40}$$

解之得 
$$v = 40\text{cm (实像)}$$

## 三、厚 透 镜

厚透镜和薄透镜一样, 也是包含两个折射球面的共轴系统, 不同的是两折射面顶点之间的距离不能忽略。厚透镜的成像原则上可以采用逐次成像法求出, 但比较繁琐。简单的方法是利用厚透镜的三对基点, 可大大简化成像过程, 并有助于了解整个共轴系统的特点。

**1. 两焦点** 将点光源放在主光轴上某一点, 若它发出一束光线经整个折射系统后成为平行于主光轴的平行光束, 如图 11-7 中的光线(1), 则这一点称为厚透镜的第一主焦点  $F_1$ 。若平行于主光轴的光线经整个系统折射后交于主光轴上一点  $F_2$ , 则这一点称为厚透镜的第二主焦点, 如图 11-7 中的光线(2)。

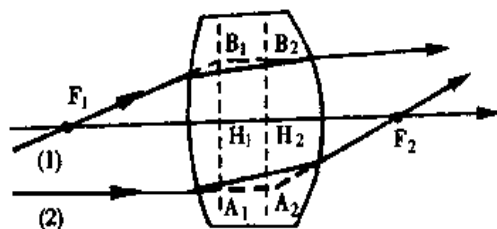


图 11-7 两焦点和两主点

**2. 两主点** 在图 11-7 中, 使通过  $F_1$  的入射光线(1)的延长线与经过整个系统折射后的出射光线的反向延长线相交于  $B_1$  点。过  $B_1$  点作垂直于主光轴的平面且交于主光轴上一点  $H_1$ , 交点  $H_1$  称为折射系统的第一主点, 平面  $B_1H_1A_1$  称为第一主平面。同样, 平行于主光轴的入射光线(2)的延长线与经过整个系统折射后的出射光线的反向延长线相交于  $A_2$  点, 过  $A_2$  点作垂直于主光轴的平面且交于主光轴上一点  $H_2$ , 点  $H_2$  称为折射系统的第二主点, 平面  $B_2H_2A_2$  称为第二主平面。

在图 11-7 中, 无论光线在折射系统中经过怎么样的曲折路径, 在效果上只等于在相应的主平面上发生一次折射。因此, 把第一主焦点  $F_1$  到第一主点  $H_1$  的距离称为第一焦距  $f_1$ , 物点到第一主平面的距离称为物距。第二主焦点  $F_2$  到第二主点  $H_2$  的距离称为第二焦距  $f_2$ , 像到第二主平面的距离称为像距。

**3. 两节点** 在厚透镜的主光轴上可以找到两点  $N_1$  和  $N_2$ , 如图 11-8 所示。  $N_1$  和

$N_2$  的性质类似于薄透镜的光心，光线通过它们时不改变方向，只有平移，即以任何角度向  $N_1$  点入射的光线都以相同的角度从  $N_2$  射出。 $N_1$  和  $N_2$  分别称为厚透镜的第一节点和第二节点。

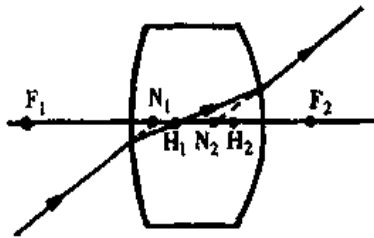


图 11-8 两节点

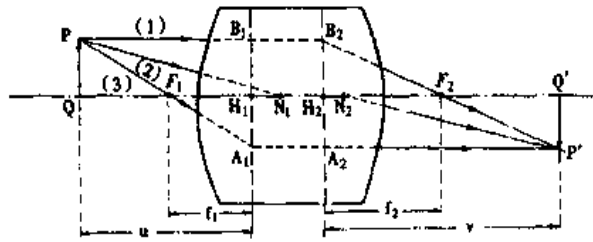


图 11-9 用作图法求像

只要知道厚透镜的三对基点在折射系统中的位置，则可利用下列三条光线中的任意两条就能求出经折射系统后所成的像。如图 11-9 所示。①平行于主光轴的光线(1)在第一主平面折射后通过第二主焦点  $F_2$ 。②通过第一主焦点  $F_1$  的光线(2)在第一主平面折射后平行于主光轴射出。③通过第一节点  $N_1$  的光线(2)从第二节点  $N_2$  平行于入射方向射出。

各基点的位置决定于折射系统的具体条件。如果折射系统前后媒质的折射率相同(如折射系统置于空气中)，则  $f = f_1 = f_2$ ，用  $N_1$  与  $H_1$  重合， $N_2$  与  $H_2$  重合。在这种情况下，物距  $u$ 、像距  $v$ 、焦距  $f$  之间的关系相同于薄透镜的高斯形式

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}$$

式中  $u$ 、 $v$  和  $f$  都是从相应的主平面为起点。

#### 四、柱面透镜

如图 11-10，透镜的两个折射面不是球面的一部分，而是圆柱面的一部分，这种透镜称为柱面透镜。柱面透镜的两个折射面可以都是圆柱面，也可以一个折射面为圆柱面，另一折射面是平面；它与透镜一样，柱面透镜有凸的和凹的两种。



图 11-10 柱面透镜

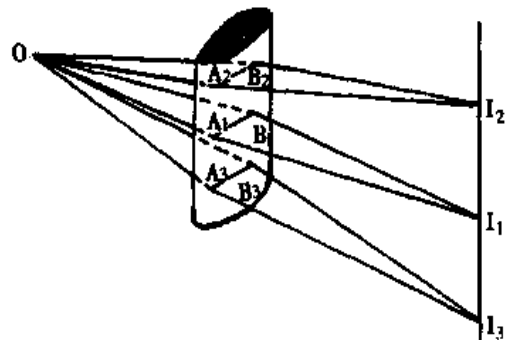


图 11-11 柱面透镜成像



如果折射面在各个方向子午面上的曲率半径不相同，这种折射面为非对称折射面，由这种折射面组成的共轴系统称为非对称折射系统。非对称折射系统对光线在各个子午面上的折射本领不同，因此，主光轴上点光源发出的光束经此系统折射后不能形成一清晰的点像。柱面透镜的成像就是如此，如图 11-11 所示。

柱面透镜在水平子午面上的焦度最大且为正值，对光线起会聚作用，在垂直子午面上的焦度为零，光线经垂直子午面折射后，折射光的方向与入射光的方向一致且重合。利用柱面透镜的这一特点可以纠正任何子午面上焦度不足的缺点。

## 五、透镜的像差

人们使用透镜的目的之一，希望得到与物体几何形状相似而清晰的像。但是，由于各种原因，点光源或物体发出的光经透镜后所成的像偏离了理想的像，这种现象称为透镜的像差。产生像差的原因较多，此处简单介绍球面像差和色像差。

**1. 球面像差** 在光轴上无限远处点物的光束中，远轴光线和近轴光线经透镜折射后不能会聚于光轴上一点，如图 11-12 (a) 所示。这种现象称为球面像差，简称球差。产生球差的原因是通过透镜边缘部分的远轴光线比通过透镜中央部分的近轴光线偏折得多些，于是，通过透镜的远轴光线与近轴光线不能会聚于同一点，点物体或点光源不能生成点像，而是一亮斑。

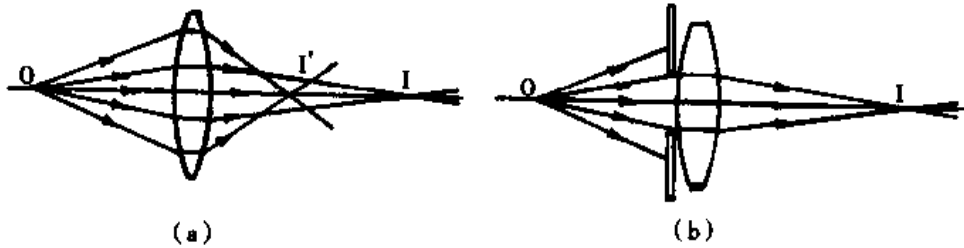


图 11-12 球面像差及其矫正

减小这种像差的最简单方法是在透镜前放置一光阑，如图 11-12 (b) 所示。光阑限制远轴光线射入透镜，只让近光线通过透镜中央部分而生成一清晰的像。减小球差的另一种办法是在会聚透镜之后放置一发散透镜，因为发散透镜对远轴光线的发散作用强于对近轴光线的发散作用。这样组成的透镜组虽然降低了焦度，却减小了球差。实际上，在磨制透镜时，可将强会聚透镜与弱发散透镜组合磨成一个透镜，以减小球面像差。

**2. 色像差** 任何光学材料，对于不同颜色的光，其折射率也不同。因此，复色光通过透镜折射后，波长越短的光偏折越多，如图 11-13 (a) 所示。这种不同波长的光通过透镜后不能在同一点成像的现象，称为色像差。由于色像差，使得白光通过透镜后所成的像，在像的边缘出现各种颜色。

纠正色像差的方法是把具有不同折射率的凸透镜和凹透镜适当配合，如图 11-13 (b) 所示，使得一个透镜的色像差被另一透镜所抵消。例如冕牌玻璃的色散能力较火石玻璃弱，因此，如果在冕牌玻璃的凸透镜上胶粘一块火石玻璃凹透镜，使得通过凸透镜所产生的色散大部分被凹透镜所抵消，从而得到消色散透镜。

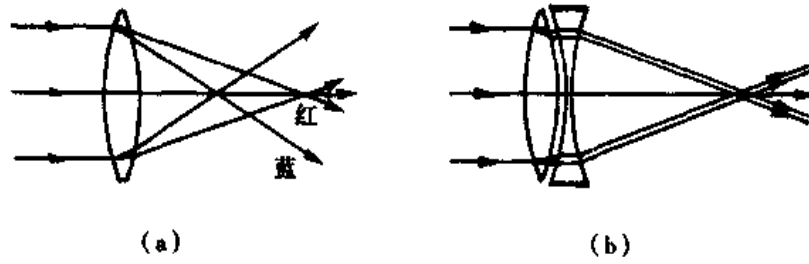


图 11-13 色像差及其矫正

### 第三节 眼 睛

#### 一、眼的光学结构

图 11-14 是眼的水平剖面。眼球的前表面是一层凸出透明的膜，称为角膜(a)，外界的光线由此进入眼内。角膜后面是虹膜(c)，虹膜中央有一圆孔称为瞳孔，瞳孔的大小由肌肉(d)的收缩使之改变，用以调节进入眼内的光能量，同时还有光阑的作用，减小像差，以便在视网膜上得到清晰的像。虹膜之后是晶状体(e)，它是透明而富有弹性的组织，形如双凸透镜，其表面的曲率半径随睫状肌(d)的收缩而变化。眼球的内层称为视网膜(g)，其上布满了视觉神经，是光线成像的地方。视网膜上正对瞳孔处的小块黄色区域称为黄斑(h)，黄斑中央的凹陷称为中央凹，它对光线最敏感。

在角膜、虹膜与晶状体之间充满了透明房水(b)。晶状体与视网膜之间充满了另一透明液体称为玻璃体(f)。眼内各种折射媒质的折射率与界面的曲率半径见表 11-1。

从几何光学的观点来看，人眼是由多种媒质组成的复杂的共轴球面系统，这个系统能使物体在视网膜上成清晰的像。根据古氏的计算，表征这一系统光学性质常数的量如表 11-1 所列的平均值。具有表中所列常数的简化眼称为古氏平均眼，如图 11-15。

光线进入眼球时，最大的折射发生在空气与角膜的交界面上，因为这两种媒质折

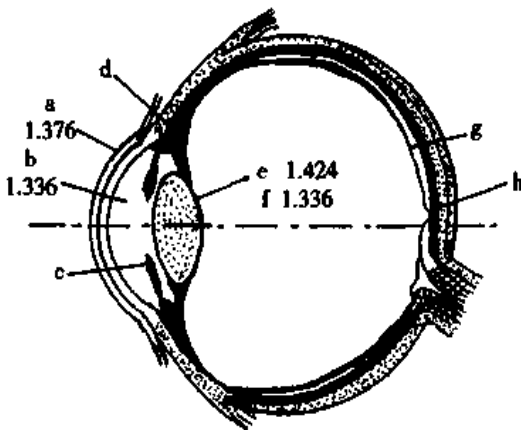


图 11-14 眼球剖面

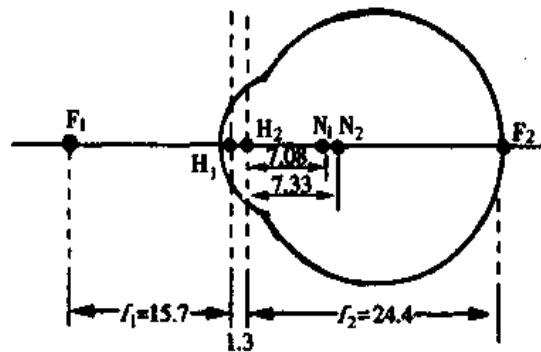


图 11-15 古氏平均眼

表 11-1 古氏平均眼常数

|                  |                       | 折射率   | 在光轴上位置(mm) | 曲率半径(mm) |      |
|------------------|-----------------------|-------|------------|----------|------|
| 角<br>膜           | 前 面                   | 1.376 | 0          | 7.7      |      |
|                  | 后 面                   |       | 0.5        | 6.8      |      |
| 房 水              |                       | 1.336 |            |          |      |
| 玻 璃 体            |                       | 1.336 |            |          |      |
| 晶<br>状<br>体      | 皮<br>质                | 前 面   | 3.6        | 10.0     |      |
|                  |                       | 后 面   | 7.2        | -6.0     |      |
|                  | 体<br>核                | 前 面   | 1.406      | 4.15     | 7.9  |
|                  |                       | 后 面   |            | 6.57     | -5.8 |
| 三<br>对<br>基<br>点 | 第一主点(H <sub>1</sub> ) |       | 1.348      |          |      |
|                  | 第二主点(H <sub>2</sub> ) |       | 1.602      |          |      |
|                  | 第一节点(N <sub>1</sub> ) |       | 7.08       |          |      |
|                  | 第二节点(N <sub>2</sub> ) |       | 7.33       |          |      |
|                  | 第一焦点(F <sub>1</sub> ) |       | -15.70     |          |      |
|                  | 第二焦点(F <sub>2</sub> ) |       | 24.38      |          |      |

射率的差值较眼内任何相邻两种媒质折射率的差值大。晶状体的折射本领只有角膜的 1/4，因为它的折射率与周围媒质相比，差别不大。

生理学上常常把眼睛进一步简化为一个单球面折射系统，称为简约眼，如图 11-16 所示。凸球面代表角膜，它的曲率半径  $r = 5\text{mm}$ ，媒质折射率为 1.33，由此可以得出  $f_1 = 15\text{mm}$ ， $f_2 = 20\text{mm}$ 。

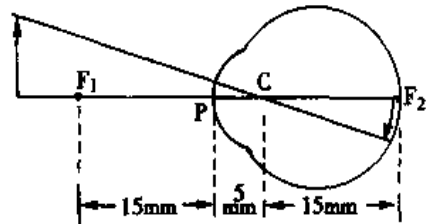


图 11-16 简约眼

## 二、眼的调节

眼睛不同于任何光学折射系统，眼的焦度能在一定范围自动改变，才能将远近不同物体成像在视网膜上，眼睛能改变焦度的这种本领称为眼的调节。眼的调节是通过睫状肌的收缩改变晶状体表面的曲率半径来实现的，但这种调节有一定限度。当被观察物体在无限远时，睫状肌松弛，眼不调节，此时晶状体曲率半径最大，其焦度最小，大约为 58.64D。观察近处物体时，晶状体曲率半径减小(睫状肌收缩)，以增大眼的焦度，最大可达到 70.57D。由此可见，在观察不同距离的物体时，眼的光学常数不相同。表 11-1 给出了眼不调节时的数据。

眼睛不调节时能看清的物点到眼睛之间的距离称为远点，正常视力的人，其远点在无穷远处，即平行光进入眼睛后刚好会聚于视网膜上。近视眼的远点为有限距离。若物体逐渐向眼睛移近，晶状体的曲率半径随之减小，眼睛的焦度增大，使得进入眼睛的光线不能在视网膜上成清晰的像。眼睛最大调节(晶状体曲率半径最小)时能看清的物体与眼睛之间的距离称为近点。视力正常的人，近点约为 10 ~ 12cm。远视眼的近点则远得多。

在观察近距离物体时，眼睛需要高度调节而容易产生疲劳。日常工作中，在适当照度下，最适宜而不易引起眼睛过度疲劳的距离为 25cm。这一距离称为视力正常人的明视距离。

### 三、眼的分辨本领

从物体两端入射到眼中节点的光线所夹的角度称为视角。视角决定物体在视网膜上成像的大小，视角越大，成像也越大，眼睛越能看清物体细节。实验指出，视力正常的眼睛能分辨两物点的视角为  $1'$  与之对应，在明视距离处眼睛能分辨两物点之间的最短距离约为 0.1mm。眼睛能分辨两物点间最小距离的能力称为眼的分辨本领，其大小与分辨的最小视角有关，分辨的最小视角越小，眼的分辨本领越大。因此，常用眼睛分辨的最小视角的倒数表示其分辨本领，称为视力。

$$\text{视力} = \frac{1}{\text{能分辨的最小视角}}$$

应用上式计算视力时，最小视角应以分(')为单位。例如，最小视角为  $2'$ ，相应的视力为 0.5。

### 四、眼的屈光不正及其矫正

眼睛不调节时，若平行光进入眼内经折射后刚好在视网膜上形成一清晰的像，如图 11-17 所示。这种屈光正常的眼睛称为正视眼。否则称为非正视眼，它包括近视眼、远视眼和散光眼三种。

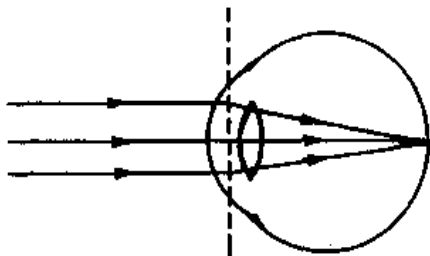


图 11-17 正视眼

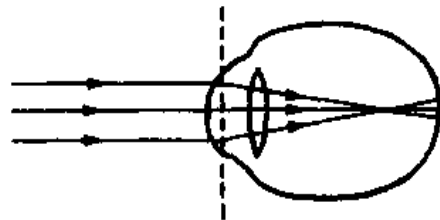


图 11-18 近视眼

1. 近视眼 眼睛不调节时，平行光进入眼内经折射后会聚于视网膜前面，在视网膜上成像模糊不清，则称为近视眼，如图 11-18 所示。近视眼看不清远处的物体，必须将物体移近到眼前某一位置才能看清此物体。可见，近视眼的远点不是无限远而在较近处，其近点较正视眼要近些。近视的原因可能是角膜或晶状体的折射面曲率半径太小，对光线的偏折太强，或者眼球的前后直径太长。

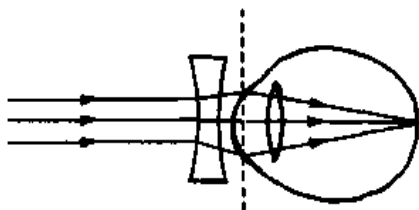


图 11-19 近视眼的矫正

近视的原因可能是角膜或晶状体的折射面曲率半径太小，对光线的偏折太强，或者眼球的前后直径太长。

近视眼的矫正方法是配戴一副适当焦度的凹透镜，使光线进入眼睛之前经凹透镜适当发散，再经眼睛折射后恰好在视网膜上形成清晰的像，如图 11-19。具体地说，近视眼所配戴的凹透镜要

使光线所成虚像在近视眼的远点处，这样近视眼在不调节时就能看清远处的物体。

[例题 11-5] 一近视眼的远点在眼前 50cm 处，今欲使其看清无限远的物体，则应配戴多少度的眼镜？

解：配戴的眼镜必须使无限远的物体应在眼前 50cm 处成一虚像，如图 11-20。设眼镜的焦距为  $f$ ， $u = \infty$ ， $v = 0.5\text{m}$ ，代入薄透镜公式，得

$$\frac{1}{\infty} + \frac{1}{-0.5} = \frac{1}{f}$$

解得  $\phi = 1/f = -1/0.5 = -2\text{D} = -200$  度。

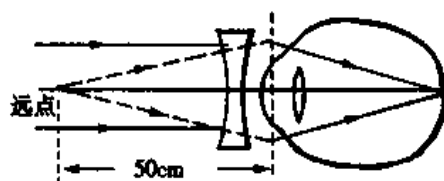


图 11-20 例题 11-5

2. 远视眼 眼睛不调节时，来自远处的平行光射入眼内经折射后会聚于视网膜的后面，因此，在视网膜上得不到清晰的像，如图 11-21 (a)。此类眼睛称为远视眼。远视眼在不调节时既看不清远处物体，也看不清较近的物体。虽然通过调节可以看清远处物体，但近处物体仍然看不清。所以，远视眼的近点比正视眼要远些。

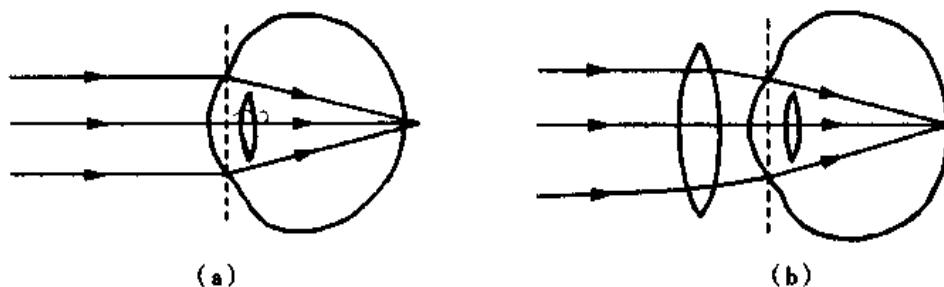


图 11-21 远视眼及其矫正

远视的原因可能是角膜或晶状体折射面的曲率半径太大，焦度过小；或者是眼球前后直径太短，将物体的像成在视网膜之后。

远视眼矫正的方法是配戴一副适当焦度的凸透镜，让平行光线进入眼睛之前先经凸透镜适当会聚，再经眼睛折射后会聚于视网膜上，如图 11-21 (b)。由于远视眼的近点较正视眼远些，因此，远视眼在看眼前较近的物体时，所选择的凸透镜必须将此物体的虚像成在远视眼的近点处。

[例题 11-6] 一远视眼的近点在 1.2m 处，要看清眼前 12cm 处的物体，问应配戴怎样的眼镜？

解：所配戴的眼镜应使眼前 12cm 处的物体在眼前 1.2m 处成一虚像，如图 11-22。对于透镜： $u = 0.12\text{m}$ ， $v = -1.2\text{m}$ ，代入薄透镜公式，得

$$\phi = \frac{1}{f} = \frac{1}{0.12} - \frac{1}{1.2} = 7.5\text{D}$$

即配戴焦度为 7.5D 的凸透镜。

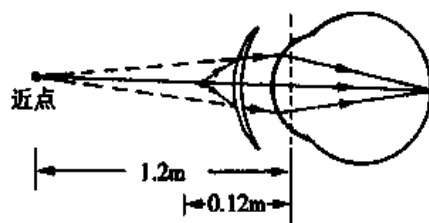


图 11-22 例题 11-6

3. 散光眼 近视眼和远视眼都属于球面屈光不正，即角膜表面是球面，它的任

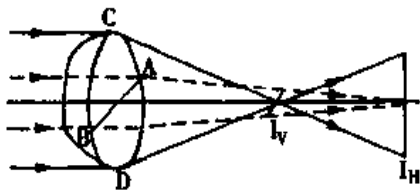


图 11-23 散光眼成像

何子午线(子午面与角膜球面的交线称为子午线)的半径相等。所以,点物体发出的光线经角膜折射后形成一清晰的点像,只不过点像没有成在视网膜上。散光眼则不同,其角膜的各个方向子午线的半径不相等,点物发出的光线经角膜折射后不能形成一清晰的点像,即散光眼为非对称折射系统。图 11-23 表示散光眼的角膜及其成像。散光

眼的眼球纵向子午线半径最短,横向子午线的半径最长,其它方向子午线半径介于二者之间。当来自远处物体的平行光线经角膜折射后纵向子午面内的光线会聚于  $I_v$  处,得到一条竖直的线条状的像;横向子午面内的光线会聚于  $I_h$  处,得到一条水平的线条状的像;其他方向子午面内光线会聚于  $I_v$  和  $I_h$  之间,在这之间,不同位置可以得到大小不同的椭圆或者圆形的像。由此可见,散光眼对任何位置的点物均不能产生点像。因此,有散光眼的人常把一点物看成一条很短的线条,这就使他看物体时感到模糊不清。

散光眼的矫正方法是配戴适当焦度的柱面透镜,以矫正屈光不正常的子午面的焦度。

## 第四节 几种医用光学仪器

### 一、放 大 镜

为了看清楚微小物体或物体的细节,需要把物体移近眼睛,以增大物体对人眼的视角,使物体在视网膜上产生一较大的像。但是,眼睛的调节有限,物体离眼睛太近反而看不清物体。因此,要看清微小物体或其细节,既要使物体对眼睛有足够大的视角,又要有合适的距离。显然,对人眼来说,这两个要求是相互矛盾的。解决此矛盾的办法是在眼前放置一个会聚透镜,以增强对靠近人眼的物体发出的光线的会聚作用,这样既看清了更近的物体,又增大了视角。用于这一目的的会聚透镜,称为放大镜。

使用放大镜时,常常将物体放在放大镜的焦点附近且靠近透镜一侧,使光线经放大镜折射后变成平行光再进入眼内,此时眼睛不需要调节便能在视网膜上得到清晰的像。

在图 11-24 (a)中,物体放在明视距离处,用眼睛直接观察时的视角为  $\beta$ ;利用放大镜观察同一物体时的视角为  $\gamma$ ,如图 11-24 (b)。通常用这两个视角的比值  $\gamma/\beta$  来衡量放大镜放大视角的能力称为角放大率  $\alpha$ ,即

$$\alpha = \frac{\gamma}{\beta} \quad (11-13)$$

由于物体线度  $y$  很小,故  $\gamma$ 、 $\beta$  视角均很小,则

$$\lg \beta \approx \beta = \frac{y}{25}$$

$$\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma = \frac{y}{f}$$

将上述两式代入(11-13)中, 得

$$\alpha = \frac{y}{f} \cdot \frac{25}{y} = \frac{25}{f} \quad (11-14)$$

式中  $f$  为放大镜的焦距。此式表明, 放大镜的角放大率与它的焦距成反比, 即放大镜焦距越小, 角放大率越大。

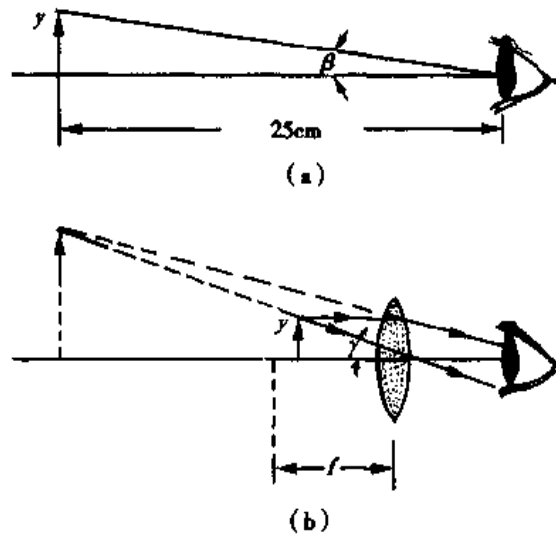


图 11-24 放大镜原理

## 二、光学显微镜

**1. 显微镜的光学原理** 显微镜是生物学和医学中广泛使用的仪器。普通光学显微镜由两组会聚透镜组成, 其光学系统如图 11-25。L<sub>1</sub> 代表焦距较短的透镜组, 称为物镜, L<sub>2</sub> 代表另一组焦距较长的透镜组, 称为目镜。实际的物镜和目镜分别由多个薄透镜组成, 其目的在于减小各种像差, 尽可能使它们所成的像清晰, 以便于观察。将被观察的物体  $y$  放在物镜的第一焦点附近(外侧), 于是, 物体  $y$  在目镜的第一焦点(靠近目镜一侧)成一放大的实像  $y'$ 。目镜的作用与放大镜的作用相同, 目的是使眼睛能靠近实像  $y'$ , 以增大视角。

根据光学仪器角放大率的定义, 显微镜的放大率  $M$  为

$$M = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \beta}$$

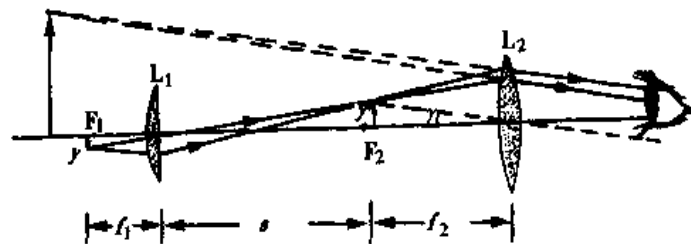


图 11-25 光学显微镜的光路图

由图可知,  $\operatorname{tg}\gamma = \frac{y'}{f_2}$  ( $f_2$  为目镜焦距),  $\operatorname{tg}\beta = \frac{y}{25}$ , 代入上式得

$$M = \frac{y'}{f_2} \cdot \frac{25}{y} = \frac{y'}{y} \cdot \frac{25}{f_2}$$

式中  $y'/y$  称为物镜的线放大率( $m$ );  $25/f_2$  是目镜的角放大率( $\alpha$ ), 代入上式得

$$M = m\alpha \quad (11-15)$$

即显微镜的放大率等于物镜的线放大率与目镜的角放大率的乘积。实际使用的显微镜附有可以调换的放大率不同的物镜和目镜, 适当配合可获得不同大小的放大率。

由于被观察物体放在靠近物镜的第一焦点, 所以物镜的线放大率  $y'/y$  可近似地等于  $s/f_1$ ,  $s$  是像  $y'$  到物镜的距离, 即物镜的像距, 因此显微镜的放大率又可写成

$$M = \frac{s}{f_1} = \frac{25}{f_2} \cdot \frac{25s}{f_1 f_2} = \frac{25s}{f_1 f_2} \quad (11-16)$$

由于物镜和目镜的焦距与物镜的像距  $s$  相比较很小, 式中  $s$  可以看成镜筒长度, 因此显微镜的放大率与所用物镜和目镜的焦距成反比。

**2. 光学系统的分辨本领** 利用光学系统观察较为复杂的物体, 其画面可以看成由许多不同亮度、不同位置的物点的像所组成。每个物点所成的像实际上是一定大小的艾里斑, 物点靠得太近, 它们的像彼此重叠, 物体的细节变得模糊不清。因此, 衍射现象限制了光学系统分辨物体细节的能力。光学系统能分辨开两物点的最短距离称为分辨极限, 它的倒数称为光学系统的分辨本领。

当物点  $A_1$  和  $A_2$  发出的光线经光学系统  $L$  后在光屏上呈现相应的衍射图样  $A'_1$  和  $A'_2$ 。若  $A_1$  和  $A_2$  相距较远, 两衍射图样  $A'_1$  和  $A'_2$  亦相距较远, 光强度的合成曲线表明, 两最大光强度之间有一最小光强度, 很容易分辨出两个物点所成的像, 如图 11-26(a)所示。随着  $A_1$  和  $A_2$  逐渐靠近并且到一定距离, 在光屏上的两衍射图样  $A'_1$  和  $A'_2$  也随之靠近, 并有重叠部分, 衍射图样  $A'_1$  的中央最大光强度与衍射图样  $A'_2$  的第一最小光强度重合, 或者衍射图样  $A'_1$  的第一最小光强度与衍射图样  $A'_2$  的中央最大光强度重合。在它们的光强度合成曲线中两最大光强度之间的极小光强度为中央最大光强度的 80%, 这时的光强度差异正好被人的视觉能够从合成的衍射图样中判别出是两个物点所成的像。换言之, 在衍射图样合成的总光强度曲线中, 当两最大光强度之间的最小光强度不超过最大光强度的 80%, 则可分辨出有两个物点。瑞利(Rayleigh)以这个条件作为光学系统的分辨极限, 即甲衍射图样的中央极大光强度与乙衍射图样的第一极小光强度重合所确定出的两物点间的距离作为光学系统所能分辨的两物点间的最短距离, 称这个极限距离为瑞利判据。如图 11-26(b)所示。当  $A_1$  和  $A_2$  更靠近, 相应的两衍射图样的重叠部分增多, 如图 11-26(c)所示, 从合成的衍射图样中或合成的光强度曲线中均无法分辨出有两个物点, 即光学系统不能分辨出相应的物点。

来自无限远处物点发出的光, 通过圆形通光孔的光学系统, 在焦平面上成一夫琅和费衍射图样。若光学系统的圆形通光孔的角半径为  $\theta$ , 则由圆孔衍射可知

$$\theta = \frac{0.61\lambda}{r}$$

式中  $\theta$  是在瑞利判据下两衍射图样中心对光学系统主光轴的夹角, 它与刚好能分辨



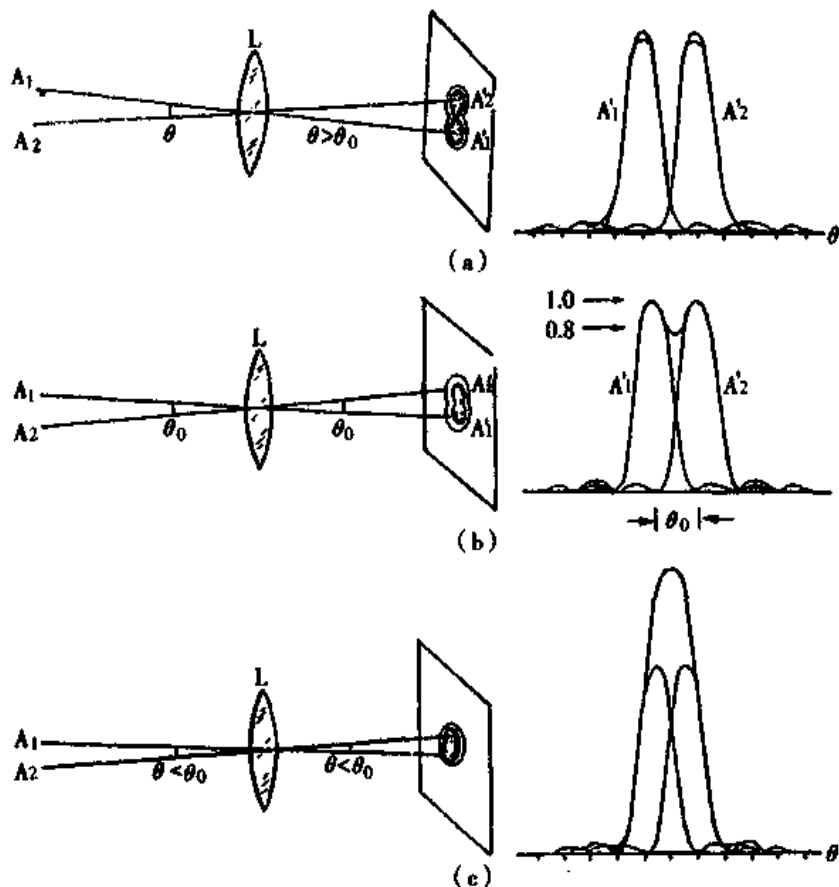


图 11-26 光学系统的分辨本领

开的两物点对光学系统主光轴的夹角  $\theta_0$  相等, 即  $\theta_0 = \theta$ , 因而刚好被分辨开两物点的角距离

$$\theta_0 = \theta = \frac{0.61\lambda}{r}$$

$\theta_0$  称为光学系统的最小分辨角。此式表明, 对于无限远的物点, 通过圆形通光孔成像的光学系统, 其通光孔径越大, 能分辨开的两物点的角距离越小, 分辨本领越大; 所用光波的波长越短, 分辨本领亦越大。

**3. 显微镜的分辨本领** 使用显微镜的目的是为了清楚地观察物体的细节。如果只提高显微镜的放大率而不能相应地看到物体细节, 那么这种放大率的提高就像将一张照片被过分放大一样, 毫无意义。也就是说, 由于光的衍射, 如果物体的细节之间的距离小于某一极限值时, 显微镜是无法分辨的。因此, 显微镜能分辨最短距离的能力称为它的分辨本领或分辨力。

被观察的标本可以看成由许多物点组成, 每一个物点发出的光波进入显微镜时, 只有部分波阵面进入镜筒, 因此要产生圆孔衍射。各物点在物镜的像平面上所成的像不是理想的点像, 而是有一定大小的亮斑, 这些亮斑在物镜的像平面构成了标本的像。从目镜中看到的细节是来自物镜的像, 因此, 只有物镜能分辨的细节。经目镜放大视角后, 人眼才能分辨。由瑞利判据可知, 当一物点的衍射亮斑中心恰好与另一物



点的衍射图样中的第一极小重合时，两物点之间的距离正好处于物镜可分辨的极限距离。图 11-27 中  $P_1$  与  $P_2$  之间的距离刚好满足瑞利判据的条件。

根据显微镜使用的具体情况，阿贝指出：物镜所能分辨两点之间的最短距离为

$$Z = \frac{1.22\lambda}{2n\sin u} \quad (11-17)$$

式中  $\lambda$  是光波的波长， $n$  为物镜与标本之间媒质的折射率， $u$  为物点发出的光线对物镜边缘所成锥角的一半。 $n\sin u$  称为物镜的孔径数 ( $N \cdot A$ )，因此，上式可写成

$$Z = \frac{0.61\lambda}{N \cdot A} \quad (11-18)$$

图 11-27 物镜的分辨本领

可见物镜的孔径数越大、照射光的波长越短，显微镜能分辨的最短距离越小，越能看清物体的细节，显微镜的分辨本领也越强。因此，常常用显微镜能分辨的最短距离的倒数  $1/Z$  表示它的分辨本领的大小。

正确认识显微镜的分辨本领和放大率两个概念的含义是很重要的。显微镜的放大率是物镜线放大率与目镜角放率的乘积，而分辨本领只决定于物镜特性。目镜只能放大物镜所分辨的细节，不能提高显微镜的分辨本领。因此只使用高倍目镜来提高显微镜的放大率对分辨本领的提高没有帮助。例如，一个  $40 \times (N \cdot A 0.65)$  的物镜配上一个  $20 \times$  的目镜与用  $100 \times (N \cdot A 1.30)$  的物镜配上  $8 \times$  的目镜，它们的放大率虽然都是  $800 \times$ ，但后者的分辨本领比前者高 1 倍，因而可看到更多、更清楚的物体细节。

提高显微镜的分辨本领的一种方法是增大物镜的孔径数，就是利用油浸物镜来增大  $n$  和  $u$  值。显微镜在通常使用情况下，物镜和标本之间的媒质是空气，这种物镜称为干物镜，如图 11-28 (a)。它的孔径数  $n\sin u$  值最大只能达到 0.95 左右，这是因为自  $P$  点发出的光束到达盖玻片  $DD$  与空气界面时，部分光线被全反射而不能进入物镜，于是进入物镜的光束锥角较小。如果在物镜与盖玻片之间滴入折射率较大的液体，如松柏油，物镜的孔径数  $n\sin u$  可增大到 1.5 左右。这就是所谓的油浸物镜，如图 11-28 (b)。油浸物镜避免了全反射，同时也增强了像的亮度。

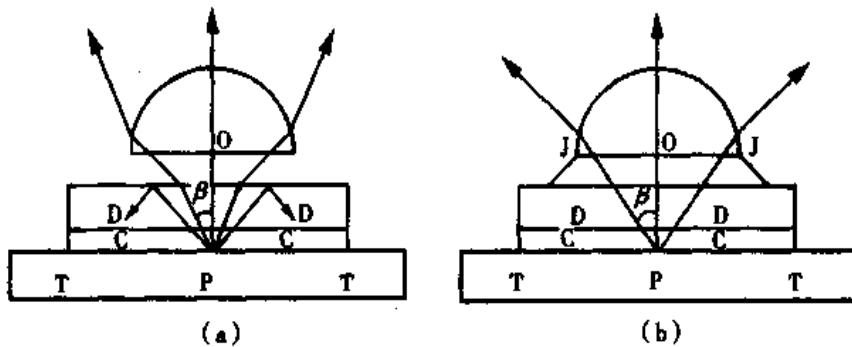


图 11-28 干物镜和油浸物镜

提高显微镜的分辨本领的另一种方法是减小照射光的波长。例如，用  $N \cdot A 1.5$  的高级油浸物镜时，若用可见光照射（平均波长为  $550\text{nm}$ ），显微镜能分辨的最短距离为

$$Z = \frac{1.22 \times 550}{2 \times 1.5} = 223.7\text{nm}$$

比  $223.7\text{nm}$  再小的细节就看不清楚了。若改用波长为  $275\text{nm}$  的紫外光照明，可使分辨本领提高 1 倍，即可看清楚小到  $112\text{nm}$  的细节。

对于大小确定的细节，应根据照射光的波长选用具有相应孔径数的物镜（决定于公式 11-18），显微镜也应有相应的放大率才能看清物体的细节。此时的放大率称为显微镜的有效放大率。现将显微镜的有效放大率与孔径数之间的关系讨论如下。

若样品中两细节的距离（或一个细节的大小）为  $Z'$ ，要能分辨两细节，则显微镜能分辨的最短距离不能大于  $Z'$ ，只能等于  $Z'$ ，即有

$$Z' = \frac{0.61\lambda}{N \cdot A}$$

相应所选用的物镜孔径数应满足

$$N \cdot A = \frac{0.61\lambda}{Z'}$$

这样才能保证相距  $Z'$  的两细节经物镜所成的两个像不致合二为一。此外，还应将这个物镜能分辨的距离  $Z'$  放大（如  $M$  倍），使显微镜最后所成的虚像（像大  $MZ'$ ）对人眼所张视角为  $1'$  或大于  $1'$ ，这样眼睛才能分辨出两细节。设虚像成在明视距离处，视角取  $1' (2.9 \times 10^{-4}\text{弧度})$ ，于是

$$2.9 \times 10^{-4} = \frac{M \cdot Z'}{25} = \frac{0.61\lambda}{25N \cdot A}$$

由此可见，有效放大率至少要有  $218N \cdot A$  时才能看清物镜所分辨的细节，但视角用  $1'$ ，观察时眼睛容易疲劳，通常使视角在  $2' \sim 4'$  之间，这时有有效放大率在  $500 \sim 1000 N \cdot A$  之间，再大则无意义。

### 三、纤 镜

纤镜又称纤维内镜，它是由透明度高的玻璃或其他透明材料拉成很细的透明纤维，并在其外表面涂一层折射率比纤维还小的物质，并由很多根这样的纤维丝组合在一起便构成纤镜。当光束以不大的人射角  $i$  从纤维的一端入射到玻璃纤维的侧壁，若入射角  $i$  大于全反射的临界角，则光束在侧壁处产生全反射，此全反射在玻璃纤维内反复产生，沿着纤维向前传播而不向外泄漏，并将光束传播到纤维的另一端，如图 11-29 所示。设玻璃纤维的折射率为  $n_1$ ，涂层物质的折射率  $n_2$ ，当光束从空气入射到纤维端面时，不至于向侧面泄漏的最大投射角  $i$  由下式确定

$$\sin i = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

式中  $\sin i$  称为光学玻璃纤维的数值孔径 ( $N \cdot A$ )。

由于很细的玻璃纤维变得柔软、可弯曲，并且具有一定的机械强度。纤镜由数万根玻璃纤维丝捆缚成一束。它有两个作用：一是利用它将外部的强光导入人体器官

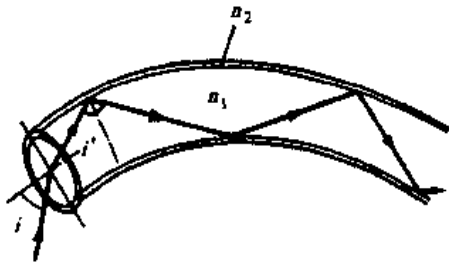


图 11-29 光学纤维导光原理

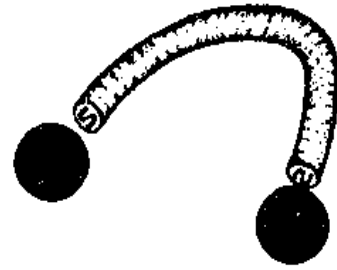


图 11-30 光学纤维导像示意图

内；二是通过它把器官内壁的图像导出体外，以便医生观察和摄影。为此纤维束的两端必须粘结牢固，并且两端的纤维丝排列须完全对应，以免图像错乱，保证导出的图像正确清晰，如图 11-30。纤维束除两端粘结牢固外，中间部分不加以粘结，使整个纤维束显得非常柔软，以便在使用时能够沿着体内各管腔弯曲插入，减少病人痛苦。

#### 四、特殊显微镜

1. 偏光显微镜 某些具有双折射现象和旋光性的透明物质，其结构特性可应用偏光显微镜来观察细节。

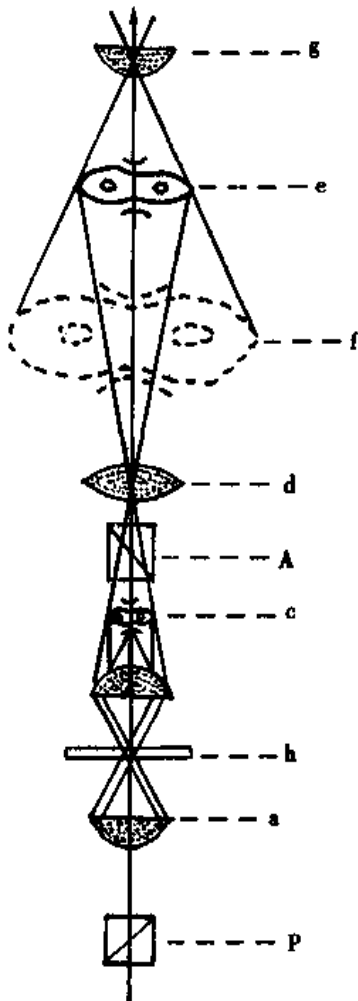


图 11-31 偏光显微镜成像原理

偏光显微镜的结构原理如图 11-31。P 和 A 是两个尼科尔棱镜(或其他偏振片)，分别作为起偏器和检偏器。起偏器 P 位于载物台下面且固定不动；检偏器 A 位于镜筒内目镜 g 与物镜之间，有手柄伸出筒外便于操作，使检偏器 A 绕筒轴旋转(但也有检偏器固定而起偏器绕筒轴旋转)。聚光镜 a 的作用是将起偏器 P 射出的光线经它会聚后有足够的亮度照射标本 b。伯特兰氏透镜 d 用来放大初级像 c (物镜所成的像)，并生成次级像 e。载物台是一个中心有圆孔的圆盘，分为上下两层，上层可以沿显微镜轴线旋转，在上面刻有一根线作为标准，下层固定不动，其边缘刻有角度数字，以便指出上层旋转的角度。偏光显微镜的其他部分与普通光学显微镜完全相同。

在使用偏光显微镜时，常常使起偏器和检偏器的透射轴相互垂直，此时显微镜中的视场呈黑暗(光强度为零)。若用偏光显微镜观察具有双折射现象的各向异性标本时，将标本置于载物台的圆孔处，旋转载物台的上层，每旋转  $45^\circ$ ，标本的像由最亮到最暗变化一次，其原理可用图 11-32 (a)来说明。

设  $pp'$  为起偏器 P 的振动面， $aa'$  为检偏器 A 的振动面。标本中的寻常光和非寻常光的振动方向分别与

pp'和 aa'重合时, 通过起偏器的平面偏振光将毫无阻碍地通过标本。但是, 此方向振动的偏振光不能通过检偏器(因为这个方向的振动面垂直于检偏器的振动面 aa'), 则视场为黑暗。当标本中的某一振动方向 cc'与 pp'成一锐角  $\theta$  时, 来自起偏器 P 的平面偏振光(其振幅为 OP)通过标本后变为两束振动面相互垂直的偏振光, 其振幅分别用 OE 和 OF 表示。

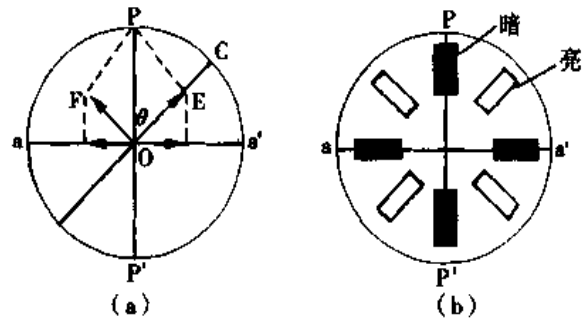


图 11-32 像的亮度变化

它们都能部分地通过检偏器, 即在检偏器的振动面 aa'方向有偏振光的分量通过, 因而在视场内可看到标本的像, 当夹角为  $45^\circ$  时, 像为最亮, 载物台每转动一周就会出现四明四暗的现象, 如图 11-32 (b) 所示。

如果设法增加标本中各向同性细节和各向异性细节之间的对比度, 则更能突出标本的特征。例如在研究神经纤维的变性时, 偏振光则能显示出在自然光下观察不到的神经纤维结构。若神经纤维组织被切断 1.5 小时的时间, 用偏光显微镜就能观察到变性过程; 但用自然光则需要 3 天, 在如此长的时间内神经纤维已完全变性。偏光显微镜还可显示出在不同媒质中活细胞的内含物和结构细节, 而这些用自然光显微镜却无法观察到, 或因染色等而受到破坏。偏振光还可用来研究随意肌、神经纤维、横纹肌、头发、指甲、淀粉粒和胆固醇粒等的双折射性质以及分析细胞的分裂机制。齿和肾的磨片在普通光学显微镜下观察不到它们的区别。但在偏光显微镜下检查则有强烈的颜色对比。偏振光还可以将正常细胞和肿瘤细胞分辨开。由上述可知, 偏光可以显示出一些自然光不能看见的物质结构, 因此, 偏光显微镜在生物学和医学中应用十分广泛。

**2. 相差显微镜** 普通显微镜观察标本时可看到颜色和亮度不同的图像, 这是因为标本经过染色固定后各部分对光波的吸收不同。对于一个完全透明而未经染色的标本(例如细胞), 由于各部分对光波的吸收大致相同, 在普通显微镜下看不到图像。此现象并不能说明光波通过标本不同部分时不受影响或所受影响相同。实际上, 由于标本不同组织结构的折射率不同, 光波通过时的光程有差别, 因此, 通过标本不同部位的光波, 其相位不一样。人眼对光波振幅的差别可以察觉, 但对光波相位的差别却不能察觉。如果能把相位差别转变为振幅差别, 则人眼便可以识别, 相差显微镜便是用于这一目的。

相差显微镜的工作原理如图 11-33 (a) 所示。波长为  $\lambda$  的平行光入射到标本上, 如果标本中某处 O 的线度与波长  $\lambda$  可比拟, 则部分光波将被 O 衍射, 衍射光波(虚线表示)经物镜后在其像平面上成像, 而另一部分未经衍射的平行光通过物镜后在其焦平面上会聚, 然后又发散并落在像平面上, 形成一均匀照亮的背景。设 O 处的折射率为  $n$ , 厚度为  $L$ , 则直射光和衍射光之间有一光程差  $\delta = nL - L = L(n - 1)$ ,  $\delta$  一般约为  $\lambda/4$ 。直射光与衍射光的振幅与相位关系如图 11-33 (b) 所示。它们将在像平面 O' 处产生干涉, 为了加强干涉效果, 在物镜的焦平面上加一块相位板, 在这块相位板

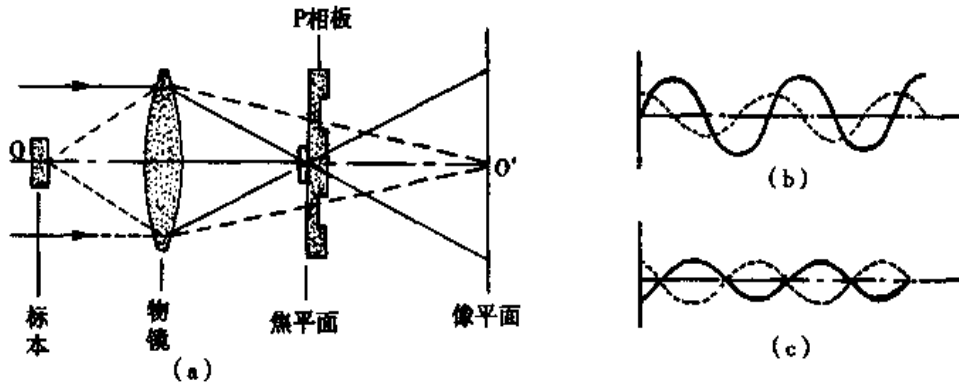


图 11-33 相差显微镜原理

中直射光和衍射光走过的光程不一样，目的是使它们的光程差由原来的  $\lambda/4$  增加到  $\lambda/2$ 。同时，在直射光经过的部分(中心区)还镀上一层金属薄膜，使直射光通过金属薄膜后振幅减弱一半，图 11-33 (c)中的虚线表示直射光和衍射光在  $O'$ 处相遇时的振幅和相位的的关系。它们相互干涉的结果得到一暗像。在标本的其他点，由于折射率不同，则光程差不同，像的明暗程度也不同。由此，可把相位差转变为振幅差。

**3. 电子显微镜** 光学显微镜的分辨本领受到照射光波长的限制，波长越短，分辨本领越高。即使应用紫外线显微镜，其分辨的最短距离约为  $200\text{nm}$ ，仍不能看清病毒和细胞的细节。若用电子束代替光波，电子束在  $10\text{kv}$  的加速电压下，其物质波波长约为  $0.12\text{nm}$ ，于是产生了电子显微镜。虽然电子显微镜的孔径数只有  $0.02$ ，但实际分辨距离仍可小至  $1\text{nm}$  左右，大大提高了分辨本领。

电子显微镜与光学显微镜相似，也有会聚镜、接物镜和接目镜，但它们不是光学透镜，而是静电透镜或电磁透镜。静电透镜是利用静电场偏转电子的行径，调节电子束的会聚或发散，其原理与电子示波管中的静电透镜类似。电磁透镜是利用磁场对运动电子施加的洛伦兹力，使得电子束会聚或发散。在图 11-34 中，均匀磁场  $B$  沿  $X$  轴方向，电子从  $X$  轴上  $O$  点向各个方向发出。其中一个电子的速度方向与  $B$  成  $\alpha$  角。电子在洛伦兹力作用下，其运动路径为一螺旋线。经过一定时间后，电子又回到轴线上  $O'$  点。那么，由  $O$  点发出的电子束中速度值相同而  $\alpha$  不同的电子受洛伦兹力作用会聚于轴上同一点  $O'$ ，则电磁透镜对电子束的作用等效于凸透镜对光线的作用， $O'$  点就是  $O$  点的像。虽然均匀磁场能使电子束会聚，但没有放大作用，像与物一样大小。

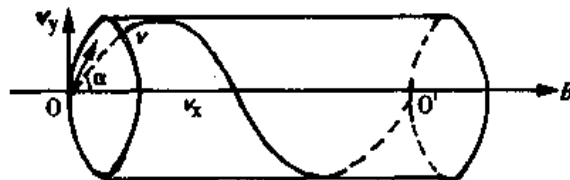


图 11-34 电子在均匀磁场中的运动

图 11-35 是电磁透镜的截面图，磁场集中在电磁铁两极之间的较小区域。这种非均匀磁场对电子束有较强的会聚作用，并能缩短焦距，因而有放大作用。通过改变电磁铁线圈中的电流，则可以改变电磁透镜的放大率，这就是电磁透镜的优点。

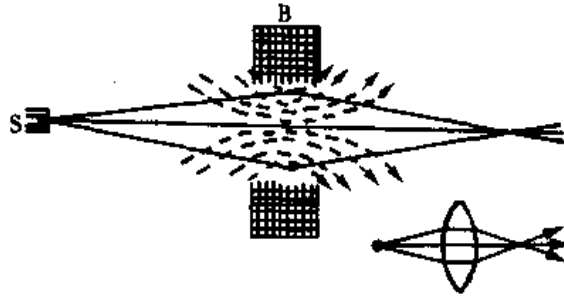


图 11-35 电磁透镜

图 11-36 表示透射式电子显微镜(TEM)与光学显微镜基本结构的对照图。在电子显微镜中,由阴极 1 和阳极 2 组成电子源,相当于光学显微镜的光源。炽热的阴极发射的电子经阴极与阳极之间 30~100kv 电压加速,成为高速电子射线。电子会聚透镜 3 相当于光学聚光镜,使电子射线集中投射到标本 4 上。高速电子与标本中的原子相碰撞而产生散射,由于标本各部分的密度不同,散射强度也不同,因此,通过标本各部分的电子有疏密之别。疏密不同的电子束经过电子物镜 5 的第一次放大,在荧光屏 6 上形成标本的中间像。通过荧光屏 6 中央圆孔的电子束(相当于中间像的一部分)再经过电子投射镜 7 的放大后,在荧光屏 8 上形成最后的像。若用照相底片代替荧光屏 8,可把最后的像记录下来。在靠近荧光屏 6 和 8 的侧旁设有观察镜,以便观察荧光屏 6 和 8 上的中间像和最后像。

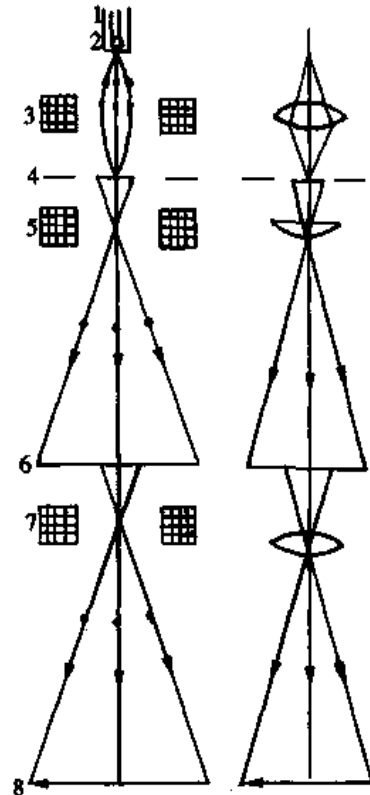


图 11-36 电子显微镜与光学显微镜对照图

透射式电子显微镜观察生物标本时的放大率在  $10^3 \sim 10^5$ , 分辨极限约为 3~5nm。另一种扫描电子显微镜(SEM)使用聚焦很细的电子束在标本上扫描,扫描电子在标本上轰击产生的次级电子数目与标本的成分及表面形态有关。这些次级电子被探测器收集后送到电流放大器放大,并用它来控制示波器的亮度。由于示波器荧光屏上每一点的亮度决定于标本表面上相应点的性质,因此,荧光屏上的图像就是标本表面被放大的像。虽然扫描电子显微镜比透射式电子显微镜的分辨本领稍差(分辨距离约 10nm),但图像却有显著的立体感。

**4. 激光扫描共焦显微镜** 激光扫描共焦显微镜(LSCM)是 20 世纪 80 年代发展起来的新型显微细胞仪,它利用共焦光路,以激光作为扫描光源,逐点、逐行、逐面快速实时扫描样品并获得不同层面的实时图像。激光扫描共焦显微镜系列仪器成为了生物医学研究领域不可缺少的有力手段。

INSIGHT<sub>PLUS</sub>-IQ™型是激光扫描共焦显微镜之一,是能直接观察样品图像的快速实时扫描显微镜。它主要由显微镜、光度计和计算机图像处理系统组成。在图 11-37

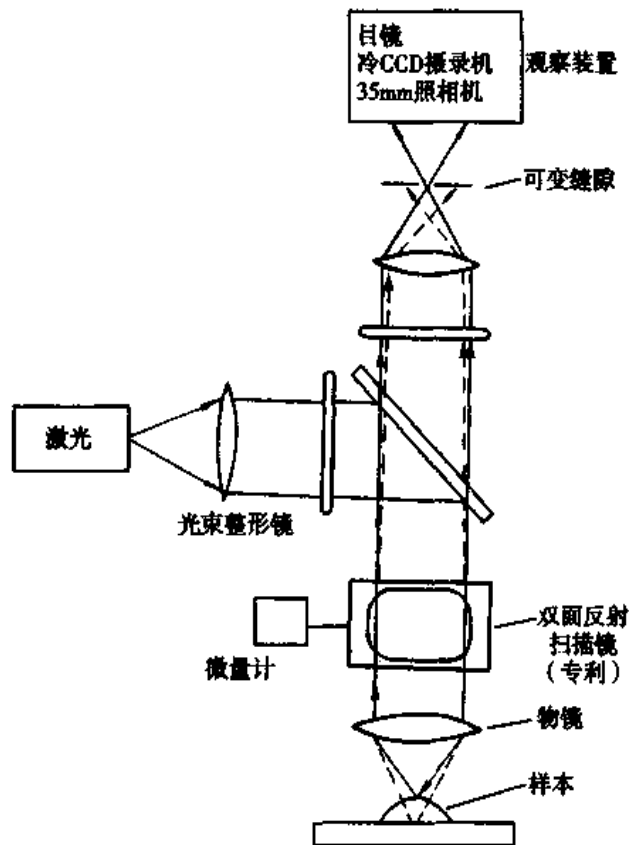


图 11-37 激光扫描共焦显微镜结构图

中，观察装置有目镜、冷 CCD 摄录机和 35mm 照相机；在目镜下方的接收光路中使用空间滤波器(可变缝隙)，严格限制某点的光信号进入接收器(光电倍增管或 CCD)，排除杂散光的干扰，从而提高激光扫描共焦显微镜的分辨率；在目镜和物镜之间，经光源发出的激光由光束整形镜调控，通过光束整形镜的激光束入射到双面反射扫描镜上，双面反射扫描镜的移动由微量计调节。双面反射扫描镜是激光扫描共焦显微镜的重要部件之一，通过微量计移动它，可大大提高扫描速度，最多能获得每秒 120 幅的图像。激光扫描共焦显微镜的光路图如图 11-38 所示。

激光扫描共焦显微镜的扫描激光与荧光搜集共用一个物镜，物镜的焦点即为扫描激光的焦点，同时也是实时成像的物点。激光扫描共焦显微镜一次调焦后将扫描限制在样品的一个平面内，调焦深度不一样时，就可以获得不同深度层次的图像。这些图像信息再经计算机处理系统进行三维重新组合，就能显示出细胞样品的三维立体结构图像，获得细胞内各部分之间的定量关系，以及各种结构的线度。

激光扫描共焦显微镜能拍摄到细胞内瞬间变化的真实彩色图像，并具有众多的图像分析功能，这些功能均通过计算机进行控制。其功能包括数据档案库；文字储存、复制、删除和转移；图像尺寸、形态、数量、面积的测量和分析；图像中荧光含量的分布等。

由于激光扫描共焦显微镜的扫描速度可达每秒 120 幅画面，因而能拍摄到细胞瞬



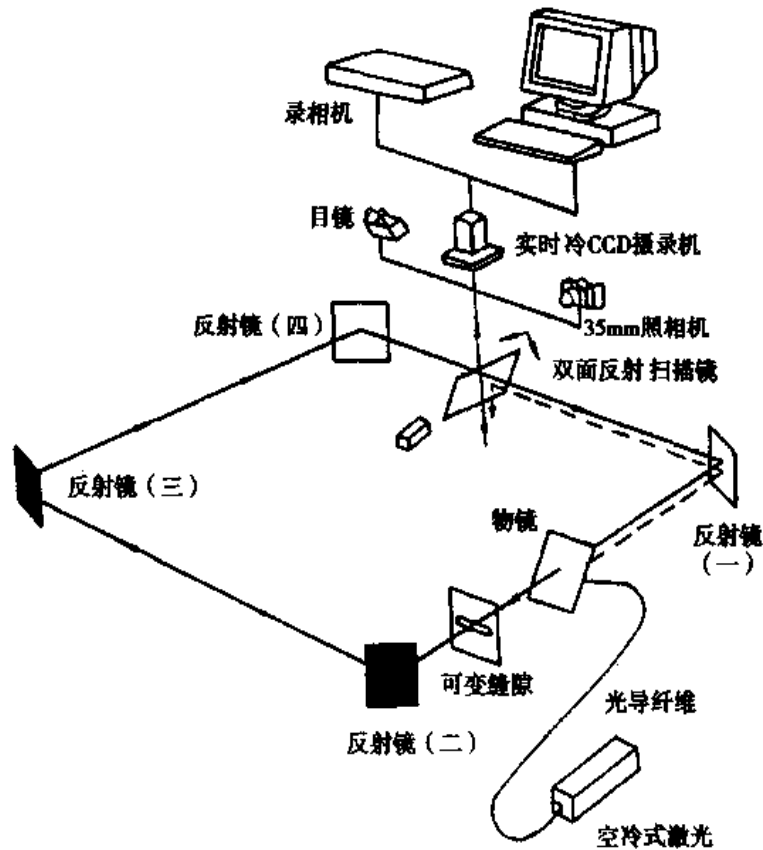


图 11-38 激光扫描共焦显微镜光路之一

间变化的图像。还可设定参数，按任意的时间间隔在任意区间扫描，并且在扫描过程中可进行调整和记录时间标记，得到实时动态数据图像。显微图像也可用目镜直接观察，或者用 ZEISS, NIKON 和 OLYMPUS 显微镜观察。激光扫描共焦显微镜可直接观察活细胞，对其每一断层或一系列某瞬间细胞的形态结构的变化进行实时拍摄，获得动态变化的实时彩色图像，再用计算机系统作快速记录和分析，并进行三维重组等，使得对细胞的超微结构及其功能的研究达到更理想的境界。

激光扫描共焦显微镜广泛用于细胞生物学、分子生物学、生物化学、免疫学、遗传学、医学和神经生理学等各个研究领域。

### 思考题与习题十一

11-1 直径为 8cm 的玻璃棒 ( $n=1.5$ )，长 20cm，两端是半径为 4cm 的半球面。若一束近轴平行光线沿棒轴方向入射，求像的位置。 (-16cm)

11-2 一圆球形透明体能将无穷远处射来的近轴平行光线会聚于第二折射面的顶点，求此透明体的折射率。(2)

11-3 折射率为 1.5 的平凸透镜，在空气中的焦距为 50cm。求凸面的曲率半径。(25cm)

11-4 折射率为 1.6 的薄透镜，凸面和凹面的曲率半径分别为 0.7m 和 0.5m，求在空气中的焦距。 (-2.92m)

11-5 把焦距为 20cm 的凸透镜与焦距为 40cm 的凹透镜紧密贴合，求贴合后的焦距。(2.5D)

11-6 折射率为 1.5 的透镜，一面是平面，另一面是半径为 0.20m 的凹面，将此透镜水平放置，凹面一方充满水，求整个系统的焦距。 (-1.2m)

11-7 折射率为 1.5 的玻璃薄透镜焦距为 5D，将它浸入某种液体中焦距变为 -1D。求此液体的折射率。 (1.7)

11-8 一近视眼患者的远点为 2m，他看远处物体时应配戴多少度的何种眼镜？ (-0.5D)

11-9 远视眼戴 2D 的眼镜看书时须把书拿到眼前 40cm 处，此人应配戴何种眼镜才适合？ (3.5D)

11-10 显微镜目镜的焦距为 2.5cm，物镜的焦距为 1.6cm，物镜和目镜相距 22.1cm，最后成像于无穷远处。问：

(1) 标本应放在物镜前什么地方？ (1.74cm)

(2) 物镜的线放大率是多少？ (11 倍)

(3) 显微镜的总放大倍数是多少？ (110 倍)

11-11 用孔径数为 0.75 的显微镜去观察  $0.3\mu\text{m}$  的细节能否看清？若改用孔径数为 1.2 的物镜去观察又如何？设所用光波波长为 600nm。

11-12 人眼可分辨的最短距离为 0.1mm，欲观察  $0.25\mu\text{m}$  的细节，对显微镜的要求什么(所用光波的波长为 600nm)？ (N·A1.5; 400 倍)

(李宜贵)

## 第十二章 量子力学基础

---

学习本章后, 你应:

1. 掌握描述光的波粒二象性的有关理论, 包括黑体辐射规律、普朗克能量子假设、爱因斯坦的光子理论和玻尔理论等。
  2. 掌握描述实物微观粒子的波粒二象性的德布罗意物质波假设、不确定关系、波函数和薛定谔方程等基本观念和规律。
  3. 理解原子结构的量子力学描述。
  4. 了解薛定谔方程的应用和原子、分子光谱的特点及产生机制。
- 

1900年普朗克(M. Planck)提出的量子假设, 开创了量子物理的新纪元。在普朗克假设的启发下, 1905年爱因斯坦(A. Einstein)提出光子假设, 揭示了光的波粒二象性。1913年玻尔(N. Bohr)把量子概念引入原子领域, 提出量子态的概念, 并得到实验的有力支持。但由于当时对微观粒子的基本属性缺乏认识, 玻尔理论仍有不可克服的困难。1924年德布罗意(L. de Broglie)提出实物粒子也有波粒二象性的假设, 并很快被实验证实。在此假设的基础上, 薛定谔(E. Schrödinger)、海森伯(W. C. Heisenberg)等人建立起了量子力学的理论体系, 这是人类对微观世界认识上的重大突破。量子力学首先在阐明原子结构上取得突出成就, 为元素周期律建立了严格的科学基础。后来在量子力学指引下研究原子核, 为人类全面利用核能铺平道路。在量子力学指引下研究固体材料, 开创了半导体技术的新时代。激光也是在量子力学指导下发明的。一切和物质微观结构有关的现代科学技术, 都离不开量子力学的指导。如果说相对论为我们提供了新的时空观, 那么量子力学则为我们提供了对物质世界的新的思维方式和表达方式, 并为一系列学科奠定了理论基础。

本章着重介绍量子力学的基本概念、规律和方法。量子力学的研究方法有以下几种: 波动力学法、矩阵法、作用量法、算符法等。由于波动规律是我们已熟悉的, 本章沿用薛定谔波动力学法。在学习本章内容时, 需特别注意学习物理学家的独创思维方式和奇特的研究方法。

### 第一节 黑体辐射

#### 一、黑体辐射

物体内部的原子和分子都在不停地作热运动。在剧烈的碰撞中, 总是不断有原子

吸收动能进入激发状态，然后又以电磁波的形式将多余能量辐射出去。这种由热运动引起的辐射现象称为热辐射。太阳发光、火炉燃烧都是热辐射。在室温下，甚至更低的温度下，一切物体都在不断地辐射着电磁波。室温下大多数物体辐射的电磁波分布在红外区域。一个物体辐射出去的电磁波的能量(称为辐射能)等于它同时间内吸收的辐射能时，物体的温度保持不变，这就是热平衡辐射。物体对入射的电磁波，一般能部分反射，部分吸收，部分折射。如果一个物体对入射的电磁波能全部吸收，我们就称它为黑体。除宇宙中的黑洞之外，一般的物体都不可能是黑体。由此看来，黑体是一种理想模型。

用不透明的材料制成一大空腔，外面开一个小孔，可以看作是黑体模型，如图 12-1 所示。由小孔射入黑体空腔中的电磁波，经多次反射和吸收，最后能量在腔内完全被吸收掉。这个小孔可以被看作是一块黑体表面，当给空腔加热时，由小孔发出的辐射就是黑体辐射。

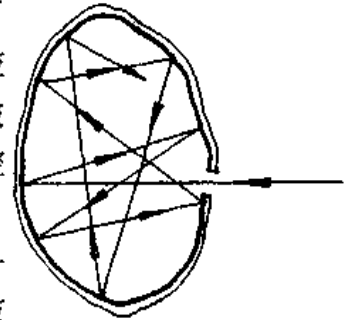


图 12-1 黑体模型

黑体表面单位面积的辐射功率，称为辐出度。对某一单色光的辐出度称为单色辐出度，用  $M_\lambda(T)$  表示。对于波长在  $\lambda-\lambda+d\lambda$  范围的电磁辐射的辐出度用  $dM_\lambda(T)$  表示，则  $dM_\lambda(T) = M_\lambda(T)d\lambda$ 。某一温度下对所有波长的总辐出度

$M(T) = \int_0^\infty dM_\lambda(T) = \int_0^\infty M_\lambda(T)d\lambda$ 。辐出度的单位是  $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$ 。用分光技术测出黑体辐射出的电磁波的能量按波长的分布，就可得出图 12-2 所示的黑体辐射的单色辐出度与波长的关系的实验曲线。由此曲线可总结出黑体辐射的两条实验规律。

1. 斯特藩-玻耳兹曼定律 图 12-2 所示的每一条曲线，反映了在一定温度下黑体的单色辐出度  $M_\lambda(T)$  随波长  $\lambda$  的分布情况。每一条曲线下面的面积等于黑体在一定温度下的总辐出度  $M(T)$ ， $M(T) = \int_0^\infty M_\lambda(T)d\lambda$ 。经实验确定， $M(T)$  和绝对温度  $T$  的四次方成正比

$$M(T) = \sigma T^4 \quad (12-1)$$

式中  $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-4}$ ，称为斯特藩常数。这一结果又由玻耳兹曼从热力学理论导出，故此定律又称为斯特藩-玻耳兹曼定律。

2. 维恩位移定律 从图 12-2 中可以看出，每一条曲线上  $M_\lambda(T)$  都有一最大值(即峰值)就是最大的单色辐出度。相应于这一最大值的波长用  $\lambda_m$  表示，称为峰值波长。随着温度  $T$  的增高， $\lambda_m$  向短波方向移动。两者的关系经实验确定为

$$T \lambda_m = b \quad (12-2)$$

式中  $b$  为常数， $b = 2.898 \times 10^{-3} \text{m}\cdot\text{K}$ 。这一结果也可从热力学理论导出，称为维恩位移定律。反映出热

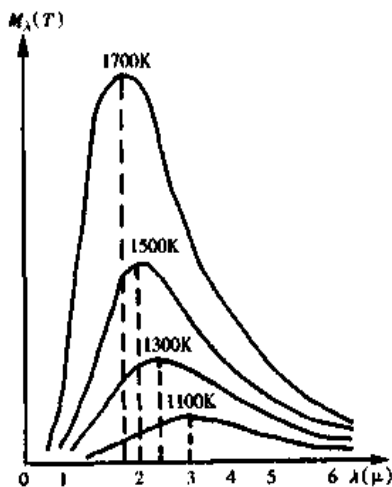


图 12-2 黑体辐射能谱曲线

辐射的峰值波长随着温度升高而向短波方向移动。例如低温的火炉发出的辐射能，较多分布在波长较长的红光中，而高温的白炽灯发出的辐射能则较多地分布在波长较短的蓝光中。

热辐射规律在现代科学技术上的应用极为广泛，它是高温遥测、红外追踪等技术的物理基础，太阳表面的温度就是用维恩位移定律测出的。

在医学上用的热象仪，也是热辐射应用的一种。人体温度在 310K 附近，所发出的热辐射在远红外区，波长范围约在  $9 \sim 12\mu\text{m}$ 。近年来发展了灵敏度极高的红外控制器，可以遥测体温，热象仪就是根据这一原理制成的。使用时可检测某一部位各点的热辐射，并记录其强度，于是得出该部位体表的温度分布，再通过电子计算机处理后显示在彩色荧光屏上，称为热象图，它能分辨  $1\text{cm}^2$  范围内  $0.03^\circ\text{C}$  的温度差异。人体体表部位的病变能使该处温度发生异常，例如癌变可使温度升高  $0.5^\circ\text{C}$ 。热象图目前应用于乳腺癌、脉管炎等的诊断、判断断肢再植的功能恢复情况，以及各种尖端科学研究中。

## 二、普朗克量子假设

人们发现黑体辐射的实验规律与制造黑体腔壁的材料以及腔壁的形状无关，具有很大的普遍性。如何从理论上导出与实验曲线完全符合的黑体辐射公式，引起了物理学界的极大兴趣。人们根据当时获得巨大功绩的经典物理学理论来推导黑体辐射公式，但一直没有成功。其中最典型的是瑞利-金斯公式和维恩公式。瑞利-金斯 (Rayleigh and Jeans) 在 1890 年用经典电磁理论和能量均分定律导出下列公式：

$$M_\lambda(T) = C_1 \lambda^{-4} T \quad (12-3)$$

此公式只在波长相当长的部分才与实验曲线相符。随着波长减小，能量逐渐加大，在紫外光区域，辐射能量将趋于无穷大，这与实验完全不符，历史上称它为“紫外区的灾难”。

随后，维恩在 1896 年由热力学的讨论得出黑体能量的分布公式：

$$M_\lambda(T) = C_2 \lambda^{-5} e^{-\frac{C_3}{\lambda T}} \quad (12-4)$$

式中  $C_2$ 、 $C_3$  是常数，此式只能与实验曲线的短波部分相符，不能说明长波段。

1900 年，普朗克找到一个纯经验公式，这公式与实验曲线很好符合，是在维恩公式上稍加修改而成的。公式如下：

$$M_\lambda(T) = 2\pi h c^2 \lambda^{-5} / (e^{h\nu/(\lambda kT)} - 1) \quad (12-5)$$

式中  $c$  是光速， $k$  是玻耳兹曼常数， $e$  是自然对数的底， $h$  称为普朗克常数。这个公式在全部波长范围内都与实验曲线完全相符。从这个式子出发，当  $\lambda T$  很小时，指数项的值远大于 1，略去分母中的 1 就可化成维恩公式(12-4)。当  $\lambda T$  很大时，指数项的值接近于 1，按  $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \dots$  展开后取前两项就可化成瑞利-金斯公式(12-3)。对式(12-5)按波长积分或求极值，还可分别得出斯特藩-玻耳兹曼定律(12-1)和维恩位移定律(12-2)。

为了从理论上把黑体辐射公式(12-5)推导出来,普朗克大胆地提出了不同于传统物理学的新概念,即能量量子化假设。

普朗克的能量子假设是①组成黑体腔壁的分子、原子可看作是带电的线性谐振子,可以吸收和辐射电磁波。②谐振子只能处于某些特定的能量状态,每一状态的能量只能是最小能量  $\epsilon_0$  的整数倍。而  $\epsilon_0$  是谐振子处于最低能量状态的能量,它与谐振子的振动频率  $\nu$  成正比,即  $\epsilon_0 = h\nu$ ,因此,谐振子的能量为  $E = n\epsilon_0 = nh\nu_0$  式中  $n = 1, 2, 3 \dots$  为正整数,称为量子数,  $\epsilon_0$  这个最小能量称为量子。

普朗克利用这一假设推导出了与实验结果完全符合的黑体辐射公式(12-5)。

普朗克能量子假设的重要意义在于它第一次指出经典物理学理论不能应用于原子现象(如原子振子)。物理学以后的发展证明,量子概念在说明微观(原子的)现象时占有十分重要的地位。这个假设的提出,标志着人类对自然规律的认识从宏观领域进入到微观领域。它不仅对热辐射理论作出了贡献,更重要的是冲破了经典观念的长期束缚,鼓励人们建立新概念、探索新理论。在普朗克假设的推动下,各种微观现象逐步得到正确解释,并建立起量子力学理论体系。普朗克因此项成就获 1918 年诺贝尔物理学奖。

## 第二节 光电效应

普朗克假设指出,物质的能量只能以量子单位转化为辐射。在普朗克的启发下,爱因斯坦提出的光子假设指出:辐射就是由能量为  $\epsilon = h\nu$  的光子组成的,光子有能量、质量和动量。光子假设成功地解释了光电效应的实验规律,并被后来的康普顿散射实验进一步证实。这一假设揭示了光的波粒二象性。

### 一、光电效应

1888 年,霍尔瓦(Hallwachs)发现一充负电的金属板被紫外光照射会放电。1897 年 J.J 汤姆孙(J.J. Thomson)发现电子后,人们才认识到那就是从金属表面射出的电子,这种现象称为光电效应,所射出的电子称为光电子。当加上一个电势差时将形成电流,这一电流称为光电流。

光电效应的实验曲线如图 12-3 和图 12-4 所示。图 12-3 是光电效应伏安特性曲线,图 12-4 为入射光频率与遏止电压的关系曲线。由此总结光电效应具有如下规律:①增加光的强度,就能增加光电子的数目,所以饱和光电流和入射光强度成正比。②光电子的最大初动能与遏止电位的关系为  $\frac{1}{2}mv^2 = eU_s$ 。③光电子的能量与入射光的频率成正比,与入射光的强度无关。④入射光有一极限频率  $\nu_0$ ,  $\nu_0$  随金属种类而异。在  $\nu \geq \nu_0$  才能产生光电效应,在  $\nu < \nu_0$  时无论光照多么强,照射时间多么长,都不能产生光电效应。 $\nu_0$  称为光电效应的截止频率(也叫红限)。⑤频率超过某金属的截止频率时,金属表面从接收光照到逸出电子所需时间不超过  $10^{-9}$ s。

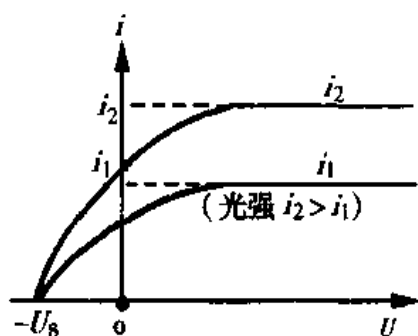


图 12-3 光电效应伏-安曲线

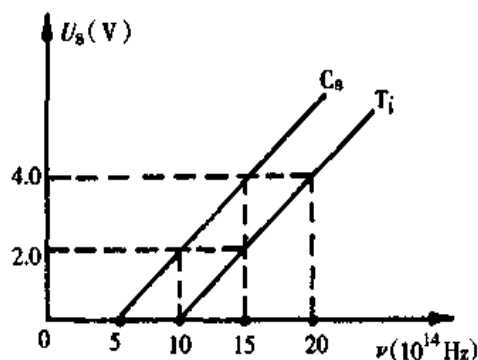


图 12-4 遏止电压与入射光频率的关系  
( $U_s$ - $\nu$  实验曲线)

## 二、爱因斯坦光子假设

光的电磁理论无法解释光电效应。按照电磁波理论，金属中的电子是在光照射下作受迫振动，其振动频率就是入射频率。由于光强  $I \propto \omega^2 A^2$  ( $\omega = 2\pi\nu$ )，与入射光振幅  $A$  的平方成正比，无论入射光的频率多么低，只要光强足够大或光照时间足够长，电子从入射光中能获得足够能量足以挣脱原子核的束缚并逸出金属表面，就可以产生光电效应，即光电效应只与入射光强和光照时间有关，与入射光的频率无关。

1905年，爱因斯坦为了解释光电效应，在普朗克量子假设的基础上提出了光子假设。他认为，光不仅在发射和吸收时具有粒子性，而且在空间传播时也具有粒子性。光在真空中是以光速  $C$  传播的粒子流，这些粒子称为光量子或光子，每个光子的能量  $\epsilon = h\nu$ 。

按照爱因斯坦的光子假设，一个电子一次吸收一个光子，电子吸收一个光子就能获得这个光子的全部能量并转化为动能。如果光子的能量大于电子脱离金属所需的逸出功，电子就能逸出金属表面并具有初动能。根据能量守恒定律，金属中一个电子吸收一个光子的能量  $h\nu$ ，一部分用来克服电子的逸出功  $A$ ，另一部分转化为光电子的初动能，即

$$h\nu = \frac{1}{2}mv^2 + A \quad A = h\nu_0 \quad (12-6)$$

式(12-6)称为爱因斯坦光电效应方程， $\nu_0$  是截止频率。

1916年，密立根(R. A. Millikan)因爱因斯坦没有直接采用普朗克的  $\epsilon = nh\nu$  的假设，而将光子能量定义为  $\epsilon = h\nu$ ，对此处的  $h$  与普朗克量子假设中的  $h$  是否一致持怀疑态度，于是设计了测定  $U_s$  与  $\nu$  的关系实验。实验发现，如图 12-4 所示，不同金属有不同的红限频率  $\nu_0$ ，不同的金属的  $U_s$ - $\nu$  曲线是斜率相同的平行直线，斜率  $K$  与电子电量  $e$  的乘积恰为普朗克恒量  $h$ ，从而证明了爱因斯坦光子假设的正确性。爱因斯坦因此项成果获 1921 年的诺贝尔物理学奖，而密立根则获得了 1927 年的诺贝尔物理学奖。

爱因斯坦在其光子理论中还指出，按照相对论，能量总是和质量相联系着，它们在量值上的关系是  $\epsilon = mc^2$ 。式中  $m$  表示光子的质量，光子的能量是  $h\nu$ ，则

$$m = \frac{\epsilon}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2} \quad (12-7)$$

没有速度为零的光子，因此光子没有静止质量。光子具有质量的最好证明是：来自遥远星球的光线经过太阳附近出现弯曲现象。这一现象已为多次精密的观测所证实。这是由于太阳质量很大，光子在它附近所受的引力足以使它偏离原来进行的方向。

光子既有质量，又有速度，因此也有动量。光子的动量是

$$p = mc = \frac{h\nu}{c^2} \cdot c = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad (12-8)$$

光子具有动量已为许多实验所证实。

在讨论光的现象时，如果只涉及光的传播过程(如干涉和衍射)，用波动理论就可以完全解释；如果涉及光和物质之间的相互作用(如光电效应等)，则必须把光看作是粒子流。因此，光具有波粒二象性。

### 第三节 康普顿效应

通常黑体辐射指的是从红外到可见光波段，光电效应中的入射光则是从可见光到紫外波段。康普顿效应所涉及的是从 X 射线到  $\gamma$  射线波段的辐射。

#### 一、康普顿效应

X 射线通过物质散射后波长变长的现象，称为康普顿效应，是康普顿于 1922 ~ 1923 年间发现的。康普顿效应的理论解释完全证明了光的波粒二象性理论的正确性。

康普顿的实验装置如图 12-5 所示。从 X 射线源发出的一束波长为  $\lambda_0$  的 X 射线投射到一块石黑上，经石黑散射后穿过光阑。散射光的波长可由光谱仪测定。康普顿在测量与入射光束成各种角度的散射光时发现：

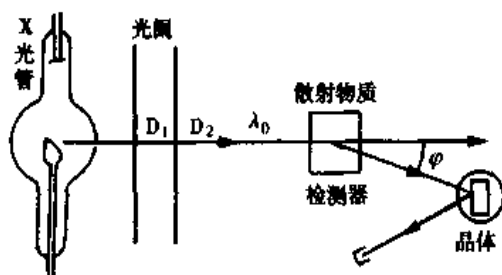


图 12-5 康普顿散射装置

(1) 散射光中除了有波长为  $\lambda_0$  的 X 光之外，还有波长  $\lambda > \lambda_0$  的成分，这就是“双峰散射”现象。

(2) 波长改变量  $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$  随着散射角  $\varphi$  的增大而增大，与散射物质的性质无关。

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \lambda_c (1 - \cos\varphi) = 2\lambda_c \sin^2 \frac{\varphi}{2} \quad (12-9)$$



实验测定  $\lambda_c = 0.00243\text{nm}$ , 是与散射物质无关的常数, 称为康普顿波长。

(3) 散射光强度与散射物质的性质有关, 原子量小的物质康普顿散射较强, 原子量大的物质康普顿散射较弱。

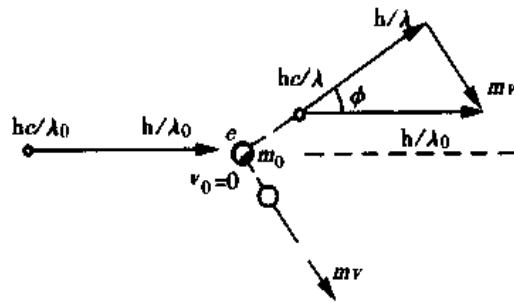


图 12-6 康普顿散射的分析

## 二、康普顿效应的解释

光的电磁波理论不能解释康普顿效应, 物质中的带电粒子在 X 射线的照射下作受迫振动, 带电粒子向外辐射的电磁波的频率与入射光波相同, X 射线经物质散射后不会出现波长( $\lambda = c/\nu$ )的变化。

康普顿用光的波粒二象性理论完满地解释了康普顿效应。他认为, 光子与带电粒子间的作用是光子和电子间的碰撞。当光子与散射体中束缚微弱的电子或初速度为零的自由电子作弹性碰撞时, 入射光子能量的一部分转化为电子的动能, 使得散射光子的能量小于入射光子的能量, 因而波长增大。当光子与原子中束缚紧密的电子(把原子看成一个整体, 相对于光子的质量是无限大)作弹性碰撞时, 光子的能量不会减少, 因而频率不变, 波长也不变。轻原子中电子束缚较弱, 重原子内层电子束缚很紧, 因此原子量越小的物质康普顿效应的散射强度越大。

下面由能量和动量守恒定律推导康普顿效应公式(12-9)。

设入射光子的能量为  $h\nu_0 = hc/\lambda_0$ , 动量为  $h/\lambda_0$ , 散射光子的能量为  $h\nu = hc/\lambda$ , 动量为  $h/\lambda$ , 静止电子碰撞后的能量为  $mc^2$ , 动量为  $mv$ 。由能量守恒定律得

$$\frac{hc}{\lambda_0} + m_0c^2 = \frac{hc}{\lambda} + mc^2 \rightarrow mc = m_0c + \frac{h}{\lambda_0} - \frac{h}{\lambda} \quad (1)$$

由动量守恒定律得

$$(mv)^2 = \left(\frac{h}{\lambda_0}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 - 2\frac{h^2}{\lambda_0\lambda}\cos\varphi \quad (2)$$

由相对论关系式:  $E^2 = (cp)^2 + E_0^2$  得  $(cmv)^2 = (mc^2)^2 - (m_0c^2)^2$ ,

即  $(mv)^2 = (mc)^2 - (m_0c)^2$ , 代入(2)式得

$$(mc)^2 = (m_0c)^2 + \left(\frac{h}{\lambda_0}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 - 2\frac{h^2}{\lambda_0\lambda}\cos\varphi \quad (3)$$

$$(1)^2 - (3) \text{ 得 } 0 = 2m_0c\left(\frac{h}{\lambda_0} - \frac{h}{\lambda}\right) - 2\frac{h^2}{\lambda_0\lambda}(1 - \cos\varphi)$$

$$m_0 c \left( \frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda} \right) = \frac{h}{\lambda_0 \lambda} (1 - \cos \varphi)$$

$$\Delta \lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \varphi) = 2 \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \varphi) \quad (4)$$

将此式与(12-9)式比较得  $\lambda = \frac{h}{m_0 c} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{9.1 \times 10^{-31} \times 3.0 \times 10^8} = 2.43 \times 10^{-12} \text{m} = 0.00243 \text{nm}$ 。理论值与实验值符合得很好，当在与入射光成  $90^\circ$  角测量散射光时，测得的  $\Delta \lambda$  就等于康普顿波长  $\lambda_c$ 。

康普顿效应的理论计算与实验的一致性说明：光的波粒二象性理论是正确的，能量守恒定律和动量守恒定律对微观粒子之间的相互作用成立。这两个守恒定律来源于时空平移对称性，在微观领域中惯性系时空的这种特性仍然保持不变。

在天体物理中，常常提及反康普顿效应，它是高速粒子将能量和动量转移到空间的射线过程。这一效应的处理方法，与本节的推导方法相同。

#### 第四节 线状谱 原子中的能量量子化

实验表明，原子光谱是一系列分立的线状光谱。由于不同元素的原子具有各自不同的特征谱线，原子光谱是考察物质组分和结构的重要依据。

##### 一、氢原子光谱

用光栅光谱仪观察低压氢气放电管发出的光，可以得到氢原子光谱。图 12-7 所示的是氢原子光谱的一个谱线系。其中  $H_\alpha$  是明亮的红线， $H_\beta$ 、 $H_\gamma$ 、 $H_\delta$  分别是青蓝线、蓝线和紫线，其余谱线在紫外区。

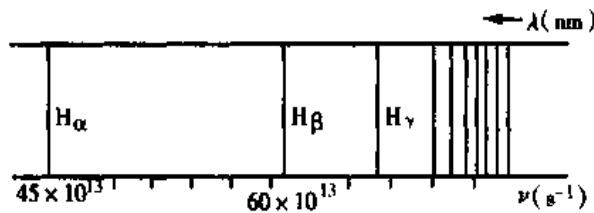


图 12-7 氢原子光谱中的巴耳末系谱线

1885 年，巴耳末(J.J. Balmer)用一个简单公式概括了这谱线系中各条谱线的波长  $\lambda$ ，后称巴耳末公式。

$$\frac{1}{\lambda} = R_\infty \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 3, 4, 5, \dots$$

式中  $R_\infty$  是里德伯(Rydberg)常数，其实验值为  $R_\infty = 1.0967758 \times 10^7 \text{m}^{-1}$ 。除了巴耳末系之外，后来又在氢原子光谱的紫外区发现了赖曼系，在红外区发现了帕邢系、布喇开系，各系都可以用类似公式计算谱线的波长。这些公式可综合成一个广义巴耳末公式

$$\frac{1}{\lambda} = R_{\infty} \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = k+1, k+2, k+3 \dots \quad (12-10)$$

当  $k$  分别取值为 1、2、3、4 时，就对应着赖曼系、巴耳末系、帕邢系、布喇开系。氢原子光谱的各个谱系中的每一条谱线的波长都可以用这样一个简单公式概括起来，这说明广义巴耳末公式深刻反映了氢原子内部的规律性。这公式的特点是：每条谱线的波长都可由两项之差求出，而每一项的值仅由一个整数决定。这个结果在当时并不理解，称为巴耳末公式之谜。在各个谱线中取  $n = \infty$ ，可得到该谱系的最短波长，称为该谱系的线系限。对于巴耳末系，线系限在  $\lambda = 364.5\text{nm}$ 。特别强的谱线是赖曼系的  $\alpha$  线， $\lambda = 121.6\text{nm}$ ，它是迄今所知太阳所发射的最强的线，在空气中会被完全吸收，它也为 DNA (脱氧核糖核酸) 所吸收，在其他行星上由于没有保护性的大气层，所以在强射线照射下生物不能存活。

## 二、玻尔理论

按照经典理论，原子中的电子像行星绕日旋转那样绕原子核沿圆或椭圆轨道运动。由于这是一种加速运动，必然不断发射电磁波，能量不断损失，轨道半径不断缩小，电子会以螺旋轨道落向原子核，最后导致原子崩溃。显然，这是错误的推论，另外，由于轨道半径越来越小，旋转频率 ( $\nu/2\pi$ ) 越来越高，从大量原子平均来看，它们发射电磁波的频率应该连续变化，原子光谱应该是连续谱，这也和实验不符合。

为了克服经典理论所遇到的困难，1913年，丹麦物理学家玻尔(N. Bohr)提出了一个有关氢原子模型，把量子学说引入这个模型，他的主要思想如下：

**1. 定态假设** 原子只能处于一系列具有分立能量的状态，在这些状态下，电子绕核运动但不辐射能量，称为定态。定态存在的量子条件是电子轨道角动量  $mvr$  等于  $h/2\pi$  的整数倍，即

$$L = mvr = n \frac{h}{2\pi}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (12-11)$$

$n$  称为量子数，(12-11)式称为轨道角动量量子化条件。

**2. 跃迁假设** 原子只有从一个定态向另一个定态跃迁时，才发射或吸收电磁波，其发射或吸收的辐射频率，由两定态的能量差决定，即：

$$\begin{aligned} h\nu &= E_n - E_k \\ \nu &= (E_n - E_k)/h \end{aligned} \quad (12-12)$$

式(12-12)称为频率条件。

**3. 对应原理** 在建立氢原子理论的过程中，玻尔提出了一个阐明新、旧理论间关系的方法论原理，即新理论应包容在一定经验范围内证明是正确的旧理论，旧理论应是新理论的极限形式或局部情况。也就是说，在极限条件下，返回原来的经验范围内时，新理论应与旧理论形式一致。玻尔把这个原则称为对应原理。玻尔指出，对于电子的绕核运动，若量子数  $n$  比较小，各定态的轨道半径、轨道角动量和能量都是不连续的，而当量子数  $n$  很大时，这些不连续性就不明显了。

例如，当量子数  $n$  由 5000 变为 4999 时，电子的轨道角动量由  $5000h$  变为  $4999h$ ，

仅相差 1/5000, 此时角动量、能量和轨道的改变都可以看成连续的了, 电子的行为也就接近经典粒子了。

对应原理是一个普遍原理, 具有指导意义的原则, 爱因斯坦在建立相对论时已经应用了对应原理, 但他并未最先提出这条原则, 是玻尔 1920 年正式提出了对应原理。矩阵力学的创始人海森伯曾说: “为我深入到未知的量子世界导航的, 惟有对应原理。”由此可见对应原理的重要意义。

4. 重要结论 按照玻尔提出的假设, 可以计算氢原子的轨道半径和能级, 并在此基础上解释氢原子光谱的规律性。由玻尔的轨道角动量量子化条件和牛顿定律、库

仑定律  $L = mv_n r_n = n \frac{h}{2\pi}$  和  $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n^2} = m \frac{v_n^2}{r_n}$

可以得出各分立定态的轨道半径  $r_n$  和轨道速度  $v_n$  分别为

$$r_n = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m e^2} n^2, \quad v_n = \frac{e^2}{2\epsilon_0 h n}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (12-13)$$

不计原子核的运动时, 氢原子系统的总能量

$$E_n = E_k + E_p = \frac{1}{2} m v_n^2 + \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} = -\frac{m e^4}{8\epsilon_0 h^2 n^2} \quad (12-14)$$

( $n = 1, 2, 3, \dots$ )

式(12-13)至式(12-14)表明, 氢原子核外电子的轨道半径、轨道速率、氢原子系统的能量都只能取一系列分立的值, 即氢原子系统是量子化的。

$n = 1$  的定态称为氢原子的基态, 其余的定态叫激发态。按照式(12-13)和式(12-14)可计算出

$$r_1 = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m e^2} = 5.2917706 \times 10^{-11} \text{m} \approx 0.53 \text{\AA},$$

$$v_1 = \frac{e^2}{2\epsilon_0 h} = 2.18 \times 10^6 \text{m} \cdot \text{s}^{-1},$$

$$E_1 = -\frac{m e^4}{8\epsilon_0 h^2} \approx -13.6 \text{eV}$$

于是  $r_n$  和  $E_n$  的表达式可改写为

$$r_n = n^2 r_1, \quad E_n = \frac{1}{n^2} E_1, \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (12-15)$$

$r_1 = 5.3 \text{nm}$  是第一玻尔轨道半径, 称为玻尔半径  $a_0$ ,  $a_0 = r_1$ 。  $E_1$  是氢原子的基态能量,  $E_1 = -13.6 \text{eV}$ , 与实验测出的氢原子的电离能在数值上相等。式(12-15)给出的是一系列氢原子定态能量称为氢原子的能级。

按照玻尔假设中的频率条件式(12-12), 可以推导里德伯公式, 当氢原子从高能级  $n$  跃迁到低能级  $k$  时, 所发射的光谱线的频率为

$$\nu = \frac{E_n - E_k}{h} = \frac{m e^4}{8\epsilon_0^2 h^3} \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n > k$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c} = \frac{m e^4}{8\epsilon_0 h^3 c} \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

与广义的巴耳末公式在形式上完全一致，通过比较，得出里德伯常数的理论值为：

$$R_{\infty} = \frac{me^4}{8\epsilon_0 h^3 c} = 1.0973730 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$$

这一理论值与实验值符合得很好，当考虑到电子实际上并不是绕着静止的核运动，而是电子与核都在围绕着它们的公共质心而旋转时，里德伯常数的计算值则是  $1.09678 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$ ，和光谱学测量值相符，这就彻底解开了长达30年的巴耳末公式之谜。图12-8是根据玻尔氢原子理论作出的能级和光谱系图。

玻尔理论成功地计算了氢原子的能级和光谱频率，上述结果还能推广到类氢原子中去，这些原子中只有一个电子在核外运动。但对稍微复杂的体系，例如含有两个电子的氦原子、氢分子，玻尔理论都不成功。玻尔已经认识到

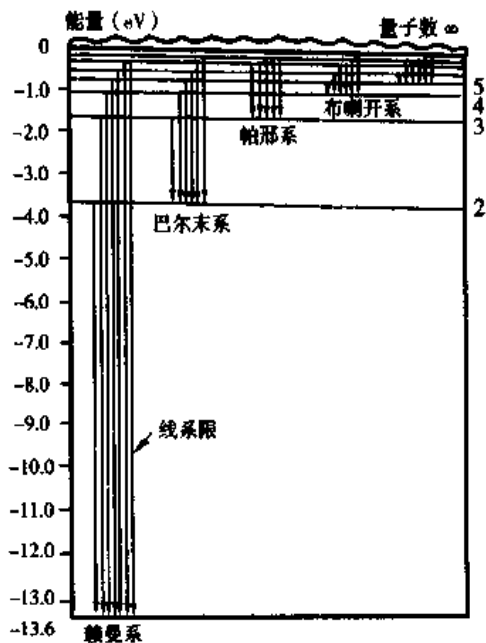


图12-8 氢原子的能级和光谱系

经典电磁学不适用于原子内部，引入了量子假设，却又用经典力学方法计算电子轨道。玻尔理论是一个充满矛盾的过渡性理论，直到1924年德布罗意提出电子具有波粒二象性之后，一个较完善的描述微观粒子运动规律的理论——量子力学才建立起来。

玻尔氢原子理论和普朗克能量量子假设、爱因斯坦光子理论一起组成旧量子论，为量子力学的诞生和发展打下基础。在量子力学中，玻尔理论中关于定态、能级、跃迁等概念仍然是正确的。

## 第五节 物质的波动性质

光具有波粒二象性，人们是先认识到它的波动性，而后才认识到它的粒子性。实物粒子(天体、物体、分子、原子、中子、电子等)，人们常认识到它的粒子性，然而它是否具有波动性呢？德布罗意回答了此问题。

### 一、德布罗意假设

由于普朗克、爱因斯坦等人有关光的粒子性理论取得成功，又由于纯粹用粒子的观点解决原子结构问题遇到困难，1924年法国的青年学者德布罗意提出：在光学研究中，曾经只想到光的波动性，忽视了它的粒子性，而在实物粒子的问题中是否会发生相反的错误，即过分看重了它的粒子性而忽视了波动性。他认为，由于自然界常常是对称的，实物粒子也应该有波粒二象性。在光学中，表达式  $E = h\nu$  和  $p = \frac{h}{\lambda}$  把标志波性的  $\nu$ 、 $\lambda$  与标志粒子性的  $E$ 、 $p$  通过普朗克常数  $h$  定量地联系起来。德布罗意假

设实物粒子也应该服从上述关系。按照德布罗意假设，质量为  $m$  的粒子以速度  $v$  匀速运动时，既有能量和动量，又有波长和频率，这些量的关系应该是：

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \quad (12-16)$$

$$E = h\nu \quad (12-17)$$

式(12-16)中的  $\lambda$  称为德布罗意波长，这种与物质相联系的波称为德布罗意波或物质波。式(12-16)至式(12-17)称为德布罗意关系式。表 12-1 给出了一些粒子的物质波长值。

表 12-1 粒子的德布罗意波波长

| 粒子与其能量         | 质量(kg)                 | 速度(m·s <sup>-1</sup> ) | 波长(nm)               |
|----------------|------------------------|------------------------|----------------------|
| 电子 1eV         | $9.1 \times 10^{-31}$  | $5.9 \times 10^5$      | 1.2                  |
| 电子 100eV       | $9.1 \times 10^{-31}$  | $5.9 \times 10^6$      | $1.2 \times 10^{-1}$ |
| 电子 10000eV     | $9.1 \times 10^{-31}$  | $5.9 \times 10^7$      | $1.2 \times 10^{-2}$ |
| 质子 100eV       | $1.67 \times 10^{-27}$ | $1.4 \times 10^6$      | $2.9 \times 10^{-3}$ |
| 镭的 $\alpha$ 粒子 | $6.6 \times 10^{-27}$  | $1.5 \times 10^7$      | $6.7 \times 10^{-4}$ |

## 二、电子衍射

德布罗意假设很快就被电子束衍射实验证实。图 12-9 是一束细电子射线穿过金属箔后生成的衍射图样。按照衍射圆环的距离、金属晶格的大小，算出的波长  $\lambda$  和按式(12-16)求出的理论值一致。

1927 年，戴维孙(C. Davisson)和革末(L. Germer)作了电子束射向镍单晶表面的散射实验，观察到了类似 X 射线衍射的电子衍射，证实了电子的波动性，其波长的实验值与德布罗意公式的计算值完全一致。同一年 G.P 汤姆孙(G. P. Thomson)进行了另外的电子衍射实验，以 600eV 的高速平行电子束垂直于单晶表面入射厚度约为  $10^{-7}$ m 的金箔薄膜，得到了与光的小圆孔衍射相似的电衍射图样，其衍射波长也与德布罗意公式相符。有趣的是，G.P 汤姆孙验证了电子波动性，而他的父亲 J.J 汤姆孙正是电子的发明人(获 1906 年诺贝尔物理学奖)，由于 G.P. 汤姆孙和戴维孙的贡献，他们分享了 1937 年诺贝尔物理学奖。

此外，用电子束或中子束也可以产生单缝衍射和双缝衍射实验，所得图像与可见光的衍射图像完全相似，其他物质粒子如原子、分子等的波动性以及德布罗意关系对这些粒子的适用性也得了实验的证实。

微观粒子波动性，不仅具有理论上的意义，而且在科学技术上也得到了广泛的应用。例如，电子显微镜就是利用电子的德布罗意波长接近 X 射线波长，而用于观察材料的表面和样品内部结构，其分辨率可达到 0.1nm 的量级。又如，核反应堆产生的中子的德布罗意波长为 0.1nm，可以作为晶体的探测工具。



图 12-9 电子衍射

### 三、不确定关系

宏观物体的运动有确定的轨迹，可以同时用坐标和动量表示一个粒子的运动状态。微观粒子具有波动性，使它们不能同时具有确定的坐标和动量，1927年海森伯从云雾室中观测到电子轨迹粗大发现了坐标不确定性，用电子单缝衍射实验找到了不确定关系。

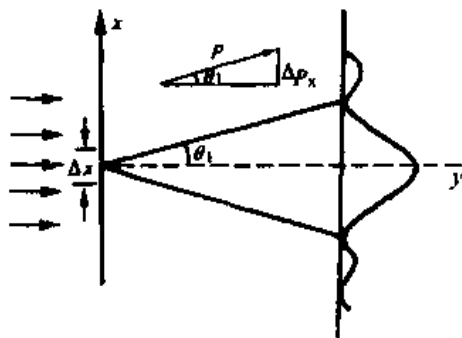


图 12-10 电子单缝衍射实验

**1. 坐标和动量的不确定关系** 在电子单缝衍射实验中，如图 12-10 所示，设电子沿  $y$  轴匀速运动，设缝宽为  $a$ ，则电子在  $x$  方向坐标的不确定量  $\Delta x = a$ 。按照波动性，电子穿过狭缝时要发生衍射。按照粒子性，此时沿  $x$  方向电子的动量将不再为零。若电子落在衍射图样的中央亮带内，则电子在  $x$  方向动量的不确定量应该是：

$$\Delta p_x = p \sin \varphi$$

将  $\sin \varphi = \lambda/a$ ， $a = \Delta x$ ， $p = h/\lambda$  代入，则得

$$\Delta p_x \cdot \Delta x = h$$

电子也可以出现在各级明条中，因此，一般有

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \geq h \quad (12-18)$$

上式称为坐标和动量的不确定关系，它表明微观粒子的坐标与动量的不确定量成反比。狭缝越窄，粒子坐标  $x$  的不确定量  $\Delta x$  越小，动量  $p_x$  的不确定量  $\Delta p_x$  就越大。坐标和动量不可能同时具有确定值。不确定关系规定了用经典力学描述微观粒子运动的适用范围。

[例题 12-1] 按照玻尔理论，氢原子基态的电子轨道直径约  $10^{-10}\text{m}$ ，电子速率约为  $2.18 \times 10^6 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ 。设电子在氢原子内坐标的不确定量为  $10^{-10}\text{m}$ ，试求电子速率的不确定量。

$$\text{解：} \quad \Delta v \geq \frac{h}{m\Delta x} = \frac{6.6 \times 10^{-34}}{9.1 \times 10^{-31} \times 10^{-10}} = 7.2 \times 10^6 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

这个不确定量是速率本身的几倍。由此可见，认为电子在原子内沿确定轨道运动没有意义。

[例题 12-2] 人的红细胞直径  $8\mu\text{m}$ ，厚  $2 \sim 3\mu\text{m}$ ，质量  $10^{-13}\text{kg}$ 。设测量红细胞位置的不确定量为  $0.1\mu\text{m}$ ，试计算其速率的不确定量。

$$\text{解：} \quad \Delta v \geq \frac{h}{m\Delta x} = \frac{6.6 \times 10^{-34}}{10^{-13} \times 10^{-7}} = 6.6 \times 10^{-14} \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

显然，任何现代测速方法都不能达到这样准确。由此可见，细胞和比它更大的宏观物体的坐标和速率都可同时精确测定，可用经典力学精确描述其运动。

**2. 能量和时间的不确定关系** 动能是速度的函数，势能量是坐标的函数。由于速度和坐标都有不确定量，微观粒子的能量也有不确定量。求能量  $E = \frac{p_x^2}{2m} + E_p$  对  $p_x$

求导数可得

$$\Delta E = v_x \cdot \Delta p_x$$

用  $\Delta t$  分别乘上式两边

$$\Delta E \cdot \Delta t = \Delta p_x \cdot v_x \cdot \Delta t = \Delta p_x \cdot \Delta x \geq h \quad (12-19)$$

这就是能量和时间的不确定关系。每个激发态的能量都有不确定量  $\Delta E$ ，称为能级宽度。原子不能无限期地停留在一个激发态，或早或迟要跃迁到能量更低的状态。原子停留在一个激发能级的平均寿命越短，其能级宽度就越大。长寿命的激发态叫亚稳态，亚稳态能级宽度很小。基态有确定的能量，原子不受外界影响可以长期停留在基态。

不确定关系是物质粒子波动性所致的，在微观问题中，它被用于作数量级的估计。海森伯对确立不确定关系和建立量子力学有重要贡献，为此他分享了1932年诺贝尔物理奖。

## 第六节 薛定谔方程

波函数可以理解为波粒子的波动方程，薛定谔方程可认为是波粒子的波动微分方程，薛定谔方程可以从波函数导出来。在量子力学中用得最多的是定态薛定谔方程。

### 一、波函数

物质波是什么样的波？如何定量描述它呢？关于这些基本问题存在不同观点。1926年波恩(M. Born)提出了一个统计解释，他认为，物质波是概率波，可以用波函数  $\psi$  来描述， $\psi$  是概率幅， $|\psi|^2 = \psi \cdot \psi^*$  是概率密度， $|\psi(x)|^2 dx$  是在  $x$  附近  $dx$  间隔内发现粒子的概率，波函数振幅的平方  $\psi_0^2$  或波的强度与粒子出现的概率密度成正比，物质波较强的地方，粒子出现的概率较大，反之，粒子出现的概率较小。

由于波恩在量子力学中所作的贡献，特别是波函数的统计解释，他分享了1954年诺贝尔物理学奖。玻恩的理论赋予波函数以下基本性质：①  $\rho = \psi_0^2 = |\psi|^2 = \psi \cdot \psi^*$ ，即波函数振幅的平方表示粒子在空间某点出现的概率密度。②波函数满足单值、连续、有限的标准条件。某时刻粒子在空间某点出现的概率是惟一的、有限的(小于1)，粒子在空间出现的概率分布是连续的。③波函数满足归一化条件。根据概率的总和等于1，有  $\int |\psi|^2 d\tau = 1$ 。④波函数适用叠加原理，如果  $\psi_1$ 、 $\psi_2$  是粒子可能的状态，则其线性组合  $\psi = c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2$  也是粒子的可能状态。

### 二、薛定谔方程

量子力学中的薛定谔(Schrödinger)方程相当于经典力学中的牛顿方程。它是波函数  $\psi$  遵循的微分方程，是微观粒子运动状态变化的基本规律。在此介绍建立该方程的基本思想。

量子力学发展了玻尔提出的定态概念，其中的定态是能量有确定值的状态，在定



态中电子概率密度的分布不随时间而改变。因此，下面只讨论定态波函数随坐标而变化的基本规律。

德布罗意假设能量为  $E$ 、动量为  $P$  的自由粒子运动，相当于频率  $\nu = E/h$ ，波长  $\lambda = h/p$  单色平面波。沿  $x$  轴正方向传播的单色平面波的波函数是  $\psi = A \cos 2\pi (\nu t - x/\lambda)$ ，将  $\nu = E/h$  及  $\lambda = h/p$  代入此式就是自由粒子的德布罗意波的波函数。

$$\psi = A \cos \frac{2\pi}{h} (Et - xP) \quad (12-20)$$

$\psi$  对  $x$  求导  $\frac{d\psi}{dx} = \frac{2\pi}{h} PA \sin \frac{2\pi}{h} (Et - xP)$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{4\pi^2}{h^2} P^2 A \cos \frac{2\pi}{h} (Et - xP) = -\frac{4\pi^2}{h^2} P^2 \psi$$

移项得  $\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{4\pi^2}{h^2} P^2 \psi = 0$

这就是自由粒子波函数随坐标变化的基本规律。定态是能量具有确定值状态，用定态能量  $E$  作方程的参数为恰当。按照非相对论的能动关系  $p^2 = m^2 v^2 = 2mE_k$ ，上式改为

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m E_k}{h^2} \psi = 0$$

这就是自由粒子运动状态变化的基本规律，薛定谔把这方程推广到粒子在势场中运动的情况，他假设在势场中粒子的波函数也服从这一方程。自由粒子不受外力只有动能，势场中的粒子除了动能还有势能，上式中的  $E_k$  应该用总能  $E$  与势能  $U$  之差代替

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - V) \psi = 0 \quad (12-21)$$

这就是一维空间的定态薛定谔方程。在三维空间中，它的形式是

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - V) \psi = 0 \quad (12-22)$$

通过定态薛定谔方程建立的过程可以看出，薛定谔方程不是实验事实的直接概括，也不是从某些理论导出的定理，它是量子力学中的另一个基本假设，它的正确性全靠实践的检验。只要给出粒子在系统中的势能函数  $U(x, y, z)$  的具体表达式，按照对波函数单值、连续、有限的要求去解此方程，定态波函数和定态能量都可求出来。目前有关原子、分子结构的知识大多是解薛定谔方程得到的。

德布罗意假设、玻恩的统计解释和薛定谔方程是量子力学中的基本假设。此外还有电子自旋、泡里原理等基本假设。量子力学的理论体系就是在这几条基本假设基础上建立起来的。

薛定谔创立了非相对论量子力学，狄拉克创立了相对论量子力学，此二人分享了1933年诺贝尔物理学奖。

### 三、一维无限深势阱

一维无限深势阱是从实际问题中抽象出来的一种理想模型。例如，金属中的自由

电子，只考虑它的边界上受到突然升高的势能“墙”阻挡，不能逸出金属表面，那么电子的运动被局限在金属体内。又如原子核中的质子在其他核子的引力场、库仑场和强相互作用的势场中运动，其总效应可以简化为质子被局限在原子核范围内自由运动。这样一些微观粒子被局限在某局部区域，并在该区域作自由运动的问题都可以简化为一维无限深势阱问题。

现以一维势阱中的粒子为例，根据势能函数具体形式求解薛定谔方程。在这个例子中着重介绍量子力学处理问题的方法，可以看到由于波函数的单值、连续、有限，只有当方程中的能量  $E$  取某些特定值时，方程才有解。

设粒子沿  $x$  轴在一个宽度为  $L$  的匣中往复运动，其势能曲线可简化成一维无限深势阱，如图 12-11 所示。在阱内势能为 0， $U(x) = 0 (0 < x < L)$ 。在阱外势能为无穷大， $U(x) = \infty (x < 0, x > L)$ 。粒子要从阱里跳到阱外，必须具有无穷大的能量，所以在阱外发现粒子的概率为零。在阱内，粒子的定态薛定谔方程是

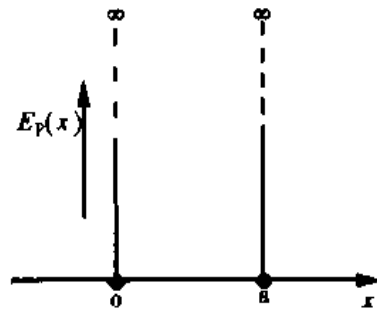


图 12-11 一维无限深势阱

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2mE}{h^2}\psi = 0$$

令  $k = \sqrt{\frac{8\pi^2mE}{h^2}}$ ，方程可简化为

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0$$

这个微分方程的通解是

$$\psi = A\sin kx + B\cos kx$$

式中  $A$ 、 $B$  是待定的任意常数，下面根据对波函数的要求确定其值。

在阱外发现粒子的概率为零， $\psi(x) = 0 (x < 0, x > L)$ ，波函数的连续性要求在阱壁上  $x = 0$ ， $x = L$ ，两处  $\psi$  也必须为零。其中  $\psi(0) = 0$ ，要求  $B = 0$ ，于是方程的解变为  $\psi = A\sin kx$ 。 $\psi(L) = 0$ ，要求  $kL = n\pi$ ， $n = 1, 2, 3, \dots$ 。请注意  $n$  不能等于零，否则在阱内  $\psi(x) = 0$ ，波函数不能归一化了。由  $k^2 = \frac{h^2\pi^2}{L^2} = \frac{8\pi^2mE}{h^2}$  可以看出， $E$  只能取分立值

$$E = \frac{h^2}{8mL^2}n^2, (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (12-23)$$

波函数  $\psi$  中的  $A$  可按归一化条件求出

$$1 = \int_0^L A^2 \sin^2\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = A^2 \frac{L}{n\pi} \int_0^{n\pi} \sin^2\left(\frac{n\pi}{L}x\right) d\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = A^2 \frac{L}{2}$$

$$A = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

一维势阱中粒子的定态波函数是

$$\psi = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (12-24)$$

对于一维势阱中粒子的能量和定态波函数，我们作进一步讨论。

阱中粒子的定态能量  $E$  只取分立值。量子数  $n$  越小，能级越低。阱中粒子的最低能量  $\frac{h^2}{8mL^2}$  称为零点能。其含义是：当温度达到绝对零度，一切热运动都停止了，束缚在阱中的粒子仍然不能静止下来。从零点能的计算式可知，只有当  $mL^2$  小到接近于  $h^2$  时，零点能才有显著的值。阱越窄，零点能越大，如果阱宽扩大到宏观尺寸，零点能就小到可以忽略不计了。量子数越大，能级越高，但随着量子数  $n$  的增大，能级间隔和能级本身相比越来越小。

$$\frac{E_{n+1} - E_n}{E_n} = \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2} = \frac{2n+1}{n^2} \approx \frac{2}{n}$$

在室温下，金属中电子热运动平均动能  $\frac{3}{2}kT$  大约是金属中自由电子零点能的  $10^{14}$  倍，相当于  $n = 10^7$ ，这时相对的能级间隔  $\frac{2}{n}$  可以忽略不计，这些电子可以看作是能量连续分布的电子气体。

一维势阱中粒子的波函数的概率密度分布如图 12-12 所示。当  $n=1$  时，在阱的中间发现粒子概率最大；当  $n=2$  时，发现粒子的概率等于零，这和经典力学的预测完全不同。但随着量子数  $n$  的增大，概率极大值数目增多，间隔缩小，逐渐趋于连续分布。一般说来，处于束缚态的粒子，量子数越小，量子效应越显著；量子数很大时，量子效应逐渐消失。这种性质深刻地反映着量子力学与经典力学的关系。

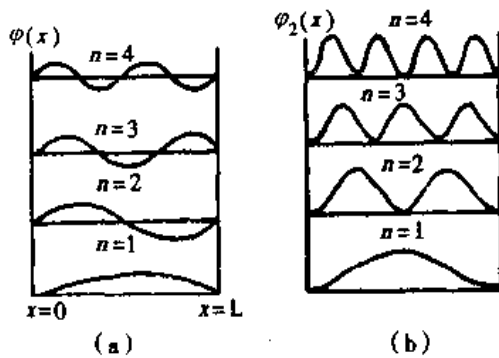


图 12-12 粒子在势阱内的波形和概率密度

(a) 波形；(b) 概率

所谓量子现象，从粒子的观点看是微观世界中发生的某些不可理解的现象；但从波的观点看，有时并不难理解。比较一维势阱中粒子的波函数和弦上驻波，它们的波形完全相同。从这里也可看到定态与驻波相当。为了在长度为  $L$  两端固定的弦上形成驻波， $L$  必须等于半个波长的整数倍。在  $L = n \frac{\lambda}{2}$  中

代入  $\lambda = \frac{h}{mv}$ ，立刻得出  $E = \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2 n^2}{8mL^2}$  的量子

化能级。能量最低的定态相当于波长最长的驻波，它的能量就是零点能。如果要使粒子完全静止下来，这意味着它的动能是零，那么它相当的驻波波长应该无穷大。在有限长的弦上不可能形成这样的驻波。

#### 四、势垒 隧道效应

两种不同的金属材料联在一起，在其接触面处形成电势差，此电势差就是一个势垒。实验证明，能量低于势垒高度的自由粒子也能穿过势垒进入另一金属区，这就是隧道效应。隧道效应是一种常见的量子效应，如  $\alpha$  衰变、场致电电子发射等。

设质量为  $m$  的微观粒子在图 12-13 所示的势场中沿  $x$  方向运动，其势能为

$$U(x) = \begin{cases} U & (0 \leq x \leq a) \\ 0 & (x < 0, x > a) \end{cases}$$

这样的势能分布称为一维势垒。将势能值代入薛定谔方程式(12-21)，得

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0 \quad (0 \leq x \leq a)$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi = 0 \quad \hbar k = \frac{h}{2\pi} \quad (x < 0, x > a)$$

令

$$k_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$k_2^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)$$

则势垒问题的薛定谔方程可写为

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k_1^2\psi = 0 \quad (x < 0, x > a)$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k_2^2\psi = 0 \quad (0 \leq x \leq a)$$

由此得出各区域的波函数

$$\psi_1(x) = A_1 e^{ik_1 x} + B_1 e^{-ik_1 x} \quad (x < 0) \quad (1)$$

$$\psi_2(x) = A_2 e^{ik_2 x} + B_2 e^{-ik_2 x} \quad (0 \leq x \leq a) \quad (2)$$

$$\psi_3(x) = A_3 e^{ik_1 x} + B_3 e^{-ik_1 x} \quad (x > a) \quad (3)$$

如果记住定态波函数是这些波函数  $\psi_1(x)$ 、 $\psi_2(x)$ 、 $\psi_3(x)$ ，再乘上一个时间因

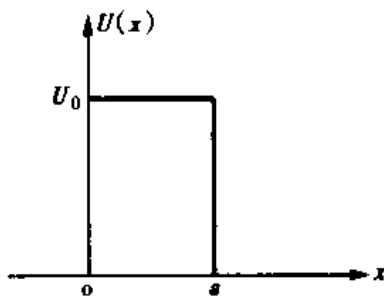


图 12-13 一维方势垒

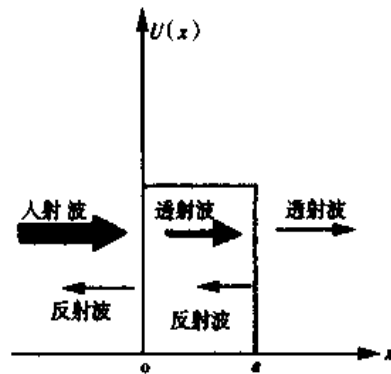


图 12-14 隧道效应

子  $e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$ ，就很容易看出式(1)至式(2)右边第一项是沿  $x$  方向传播的平面波，第二项是沿  $x$  反方向传播的平面波。也就是说，在式(1)中，右边第一项为入射波，第二项为反射波，在式(2)中，第一项为透射波，第二项为反射波；在式(3)中，第一项为透射波，在  $x > a$  区域不存在反射波，所以必须令  $B_3 = 0$ 。如图 12-14 所示。

我们可以将入射波强度作为比较的标准，即令  $A_1 = 1$ ，同时由波函数的单值、有限、连续的标准条件得

$$\left. \begin{aligned} \psi_1(0) &= \psi_2(0) \\ \left(\frac{d\psi_1}{dx}\right)_{x=0} &= \left(\frac{d\psi_2}{dx}\right)_{x=0} \\ \psi_2(a) &= \psi_3(a) \\ \left(\frac{d\psi_2}{dx}\right)_{x=a} &= \left(\frac{d\psi_3}{dx}\right)_{x=a} \end{aligned} \right\}$$

由式(4)可以解出  $A_2$ 、 $A_3$ 、 $B_1$ 、 $B_2$ ，从而得出各区域的定态波函数。由于计算比较繁杂，我们略去求解过程直接讨论解的物理意义。

1.  $E > U$  按经典力学观点，能量  $E$  大于势垒高度  $U$  的粒子应该畅通无阻地全部越过势垒，而不会在势垒壁上发生反射。但解薛定谔方程的结果， $B_1 \neq 0$  且为实数，即这种情况下粒子也可能反射。

2.  $E < U$  按经典力学观点，这种情况下粒子不能越过势垒进入  $x > 0$  区域。但解薛定谔方程的结果得出在势垒内部 ( $0 \leq x \leq a$ ) 存在按指数规律衰减的波函数，即在势垒中找出粒子的概率不为零。同时  $A_3 \neq 0$ ，即粒子仍有可能穿过势垒到达  $x > a$  区域。我们把总能量低于势垒高度的粒子也穿过势垒到达势垒另侧的现象称为隧道效应。定义贯穿系数为透射波概率密度与入射波概率密度之比，用  $T$  表示。则可得

$$T = \frac{|\psi_3|_{x=a}^2}{|\psi_1|_{x=0}^2} = \frac{|\psi_2|_{x=a}^2}{|\psi_2|_{x=0}^2} = e^{\frac{-2a\sqrt{2m(U-E)}}{\hbar}}, \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

我们看到，势垒高度  $U$  越低、势垒宽度  $a$  越小时，粒子穿过势垒的概率越大。

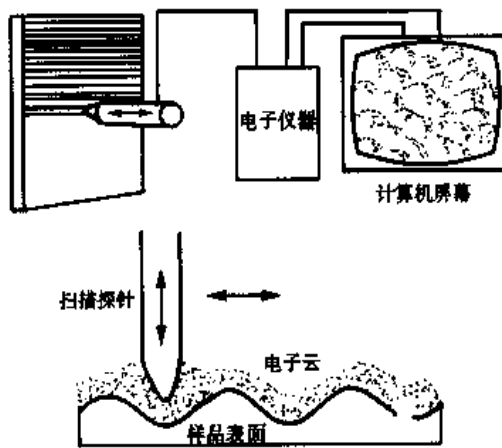


图 12-15 扫描隧穿显微镜原理图

隧道效应已完全被实验证实，并在现代技术中得到广泛使用。 $\alpha$  粒子从放射性核中逸出是隧道效应。图 12-15 是扫描隧穿显微镜原理示意图。它是通过扫描探针与样品表面间隧道效应形成的隧穿电流的变化来得到样品表面状况图像的。当探针在样品表面上方全面横向扫描时，根据隧穿电流的变化，利用反馈装置控制针尖与表面间保持一定距离，把针尖扫描和起伏运动的数据送入计算机，就可在荧光屏上显示出样品表面的三维图像。和实物尺寸比，这一图像可放大到 1 亿倍。其横向分辨率为  $0.6 \sim 1.2\text{nm}$ ，纵向分

辨率为  $0.001\text{nm}$ ，最突出的优点是不损坏样品。

此外，半导体隧道二极管、超导体约瑟夫结等电子元件都得用隧道效应。

扫描隧穿显微镜的发明，开辟了表面物理研究的新领域，单个原子的成像已成为可能，也为量子力学的研究提供了极好的工具，为医学成像增添了新的仪器，发明者宾尼希 (G·Binnig) 和罗勒 (H·Rohrer) 由于此卓越贡献与电子显微镜的发明者鲁斯卡 (E·Ruska) 分享了 1986 年诺贝尔物理学奖。

## 第七节 量子力学的原子结构概念

薛定谔方程只对几个最简单的系统才能精确求解，对复杂系统必须用近似方法求解。在氢原子中，电子的能级和波函数是精确解出的。这些结果完全适用于一切类氢原子。

$$L_z = m \frac{h}{2\pi}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm l \quad (12-27)$$

$m$  叫磁量子数,  $L_z$  不同, 电子角动量在空间取向不同, 电子的运动状态也不同。角动量相同的电子, 可以分别处于  $2l+1$  种不同的状态。

4. 自旋量子化——自旋量子数  $s$   $s$  态电子的轨道角动量虽然等于零, 但施忒恩 (Stern) 和盖拉赫 (Gertach) 实验证明, 电子在这种状态时仍具有角动量。电子除了绕核运动外, 还在绕自身轴线旋转, 称为自旋。仿照轨道角动量及其分量的量子化条件, 电子自旋角动量的量值为

$$L_s = \sqrt{s(s+1)} \frac{h}{2\pi} \quad (12-28)$$

式中  $s$  称为自旋量子数, 质子、中子的  $s$  是  $\frac{1}{2}$ , 电子的  $s = \frac{1}{2}$ , 光子的  $s = 1$ 。

自旋角动量沿  $Z$  轴方向的分量  $L_{sz}$  的量值是

$$L_{sz} = m_s \frac{h}{2\pi} \quad m_s = -s, -s+1, \dots +s \quad (12-29)$$

式中  $m_s$  称为自旋磁量子数。由于电子的  $S = \frac{1}{2}$ , 所以  $m_s$  的可能取值是  $-\frac{1}{2}$  和  $+\frac{1}{2}$ , 即是说对应于每一个由  $(n, l, m)$  所确定的函数, 电子可能有两种不同的运动状态, 这两种状态的  $m_s$  取值分别为  $-\frac{1}{2}$  和  $+\frac{1}{2}$ 。

综上所述, 根据量子力学理论, 类氢原子的电子运动状态, 要由四个量子数来确定。不同的运动状态有不同的量子数, 当给定主量子数  $n$  时,  $l$  的取值为  $0, 1, 2, \dots, (n-1)$ , 共有  $n$  个值。当  $l$  给定时,  $m$  的可能值为  $0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$ , 共有  $2l+1$  个值。电子的  $m_s$  的可能值只有 2 个, 即  $+\frac{1}{2}$  与  $-\frac{1}{2}$ 。因此, 对于给定的主量子数  $n$ , 电子可能的运动状态为  $Z_n$  个,  $Z_n$  为

$$Z_n = \sum_0^{n-1} 2(2l+1) = 2n^2$$

## 二、多电子原子

一个原子序数为  $Z$  的原子, 原子核外有  $Z$  个电子, 每个电子除了受到原子核的引力外, 还受到其他电子的斥力。一个电子在原子核外的电势能为原子核引力产生的势能和其他电子的斥力产生的势能之和。因此对于多电子原子, 用薛定谔方程求解是困难的, 而只能采用近似方法来解决。常用的有电子独立运动模型、哈特利自洽场模型、中心力场模型等。算得结果表明: 一般情况下,  $n$  值越小, 能级越低,  $n$  值相同而  $l$  值不同的状态, 能量略有不同, 即给定主量子数  $n$ , 由于  $l$  有  $n$  个可能值, 因而有  $n$  个相近的能级。

核外电子与宏观物体一样, 最稳定的状态就是能量最低的状态。核外电子都有占据最低能级的趋向, 这就是能量最小原理。但是, 电子在核外的分布, 还必须遵从泡利不相容原理。1925 年泡利从实验中总结出一个原理: 在一个原子内不能有两个处

于同一状态的电子。这个原理称为泡利不相容原理。根据这一原理，一个原子内每个电子都有它独自的四个量子数，换言之，任何两个电子都不可能具有完全相同的四个量子数。

前面已经讨论过，对于给定的主量子数  $n$ ，电子可能的运动状态有  $2n^2$  个，对于  $n=1$ ，电子只有 2 个可能的运动状态，如果原子的原子序数  $Z$  大于 2，那么，根据泡利不相容原理，核外的 2 个电子就不可能都处于  $n=1$  的能级，而要处于  $n=2$ 、 $n=3$  等等较高的能级。一般说来，非激发态的原子，核外  $Z$  个电子按照从低能级到高能级的规律，从  $n=1$ ， $l=0$  开始分布在若干个能级上。

分布在各个能级上的电子， $n$  值相同的电子属于同一壳层。各个壳层常用代号表示，分别以  $K$ 、 $L$ 、 $M$ 、 $N$ 、 $O$ 、 $P$  代表  $n=1$ 、2、3、4、5、6 各个壳层。同一壳层中具有同一角量子数  $l$  的电子，则称为处于同一支壳层，各个支壳层也有代表符号，分别以  $s$ 、 $p$ 、 $d$ 、 $f$ 、 $g$  代表  $l=0$ 、1、2、3、4、5 各支壳层。利用  $l$  的代表符号，可以把原子的电子状态表示为  $2p$ 、 $3s$ 、 $4d$  等等，其中数字表示主量子数。例如  $4d$  表示电子处于  $n=4$ ， $l=2$  的状态。表 12-2 列出每一壳层及支壳层所能容纳的电子数。

表 12-2 电子在原子中逐层分布数

| $n$ | 壳层符号 | 在壳层中最多电子数    |              |              |              |              | $Z_n$ |
|-----|------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|-------|
|     |      | $l=0$<br>$s$ | $l=1$<br>$p$ | $l=2$<br>$d$ | $l=3$<br>$f$ | $l=4$<br>$g$ |       |
| 1   | K    | 2            |              |              |              |              | 2     |
| 2   | L    | 2            | 6            |              |              |              | 8     |
| 3   | M    | 2            | 6            | 10           |              |              | 18    |
| 4   | N    | 2            | 6            | 10           | 14           |              | 32    |
| 5   | O    | 2            | 6            | 10           | 14           | 18           | 50    |

多电子原子中由于电子的分布是逐层远离原子核，内壳层通常被填满，电子云是闭合对称的，这样就对外层电子起着屏蔽作用，使最外层的价电子所受到核电荷的引力减小，并且内层电子靠近原子核，外层电子的作用几乎可以忽略不计。

电子在原子中逐层分布的实际情况并不像表 12-2 所列那样，从第三壳层开始，填充的顺序发生变化。第三壳层只包括  $3s$  和  $3p$  的态，共 8 个电子，电子不是先填  $3d$  然后再填第四壳层，而是先填  $4s$  再填  $3d$ 。这是因为平均说来，角动量大的电子比角动量小的电子离核远些，受到内层电子的屏蔽作用较大，电子受到核的引力较小，因此势能较高， $3d$  态的电子角动量大于  $4s$  态，总能量比  $4d$  态高，所以，先填  $4s$ ，再填  $3d$ ，同样原因，还发生先填  $5s$  后填  $4d$ ；先  $6s$  后  $5d$  等。

## 第八节 原子光谱与分子光谱

### 一、原子光谱

原子光谱是明线光谱，它的产生与原子状态改变有关。原子中电子从一个状态跃



迁到另一能级较低的状态时，发射单色光，大量原子同时发射的单色光在黑暗背景中形成若干明亮的、分立的谱线。这种光谱称为明线光谱。每种元素的光谱线数目和强度与元素受激条件有关。

原子状态的改变在玻尔的量子跃迁假设中是没有限制的，即电子跃迁能在任何能级间进行。从光谱的观察和分析研究中发现，跃迁并不是任意的，只能在一定的能级间进行。原子可能发生的状态改变，通常以量子数的变化值描述，故称为选择定则。单电子原子的选择定则是主量子数  $n$  的改变不受限制；自旋量子数是不变的，角量子数  $l$  由于光子有一个单位的角动量，辐射或吸收过程中仍然遵循角动量守恒定律， $l$  只能增加或减少 1，即  $\Delta l = \pm 1$ ；总角动量量子数  $j$  ( $j = l + s$  或  $l - s$ ) 可不变或增减 1，即  $\Delta j = 0, \pm 1$ 。其他跃迁都是不可能的。

原子的价电子由于内壳层电子的屏蔽作用，受到核的引力较小，在外界因素的影响下，容易被激发到更高的壳层，在外壳层能级间跃迁而发射单色光，这种光的频率一般在可见光及其附近的红外和紫外区，称为光学光谱。一价元素的光谱比较简单，价电子较多或内壳层未填满的元素，其光谱较为复杂。各种元素外部壳层的能级结构不同，价电子跃迁产生的光谱线分布也不一样，所以每种元素都有自己特定的发射光谱。

原子序数较高的原子，内壳层一般是填满的，如果原子中内壳层电子在外界能量的激发下，跃迁到空着的外壳层或电离，内壳层出现“空位”，原子处于激发态。激发态原子中，其他壳层的电子跃迁的能级差值大，频率高，通常在 X 光射线的频率范围内，因此称为线状 X 射线光谱，内壳层电子离核较近，受到核的静电引力大，外壳层电子对它的影响小，所以这种电子的分布都很相似，但是原子的能量与  $Z^2$  成正比，所以各种元素的 X 射线频率都不相同，可以作为它的特征。因此，这种由于原子内壳层出现“空位”而产生的谱线，可作为原子的标识，因而又称为标识 X 射线，将在 13 章中详细讨论。

原子受到光照射时，如果照射光的波长在一定范围内是连续的，原子中电子将从照射光中获得一份适当的能量，跃迁到某一较高能级，其结果将使得照射光的光谱中出现暗线，这种光谱叫暗线光谱，也叫吸收光谱。同一元素的吸收光谱中，暗线的频率与它的发射光谱明线的频率相同，因为它是电子在相同能级间的跃迁，区别仅在于一为辐射跃迁(发射光子)，另一为激发跃迁(吸收光子)，但吸收光谱中的暗线数目通常少于发射光谱中的明线的数目。这是因为原子通常处于基态，所以吸收过程中只有从基态跃迁到激发态，而没有各个激发态之间跃迁的谱线。

## 二、分子光谱

**1. 分子光谱** 前面介绍了原子光谱是线状光谱，光谱中各谱线之间的距离比较大，只是在线系的末端谱线才密集起来，如果最外层电子不是太多，则原子光谱中线系也不多。分子光谱的形状与原子光谱不一样，它有许多线系，每一线系中，有许多光谱线，这些谱线在线系的一端分布较稀，在另一端则非常密集，在光谱图中看上去好像是连成一片的带，所以分子光谱又称为带状光谱。一个线系就是一个带，若干带形成一带系，通常分子光谱中有若干个带系。图 12-16 为分子光谱的示意图。从波长

范围来说，分子光谱有波长为厘米或毫米数量级的远红外光谱，有波长为微米数量级的近红外光谱以及可见光和紫外光谱。

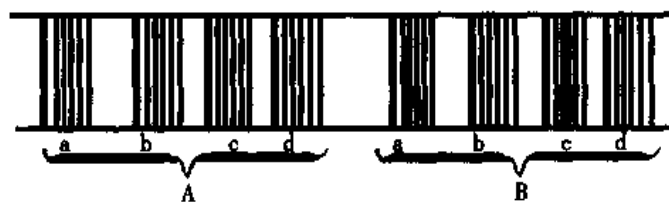


图 12-16 分子光谱

分子光谱的复杂性，反映分子内部复杂的运动状态，而复杂的运动状态与分子的结构有关。

**2. 分子能级** 分子由原子组成，分子的运动比原子复杂，包括三个方面：分子中电子的跃迁；分子作为一个整体的转动；以及分子中原子的振动。像原子运动一样，分子中的每一种运动都遵循一定的量子条件，它们的能量都是量子化的，相对于每一种运动的量子状态，都有相应的分子能级，这些能级反映每一种分子的特征。分子在能级之间跃迁，产生特征性的分子光谱。

(1) 电子能级：分子中有两个或两个以上的原子核，核周围内层电子的情况与独立的原子中的电子相差不多，外层电子则在几个核及其周围电子的共同作用下运动。分子中电子的运动遵循一定的量子条件，形成不同的量子状态，每一状态具有一定的能量  $E_e$ 。分子中电子从一个能级跃迁到另一个能级时，发射或吸收一个光子，光子的频率  $\nu$ ，满足  $\nu = \Delta E_e / h$ ， $\Delta E_e$  为两个电子能级的能量差值。分子中外层电子在各能级间跃迁所发射或吸收的光子，其频率由于分子中电子能级间的差值一般在 1 ~ 20eV，所以处在紫外区及可见光区，这种光谱称为分子的电子光谱。电子光谱一般包括若干谱带系，不同的谱带系相应于电子在不同能级间的跃迁。

(2) 分子中原子振动能级：构成分子的原子不停地在其平衡位置附近作振动，原子的振动实际上是原子核带动周围电子的振动。双原子分子的振动，在能量不很大时，可以近似作为简谐振动，振动能以  $E_v$  表示。由量子力学计算为

$$E_v = (v + \frac{1}{2})h\nu \quad v = 0, 1, 2, 3, \dots$$

式中  $v$  称为振动量子数， $\nu$  为振动频率，从上式可看出振动能级是等距离的。但双原子分子实际不是简谐振子，实际能级不是等距离的， $v$  越大，能级距离越小，能级越密集。分子振动的能量  $E_v$  是一系列不连续的分立值，分子振动状态改变也是不连续的跃变。当分子从一个能级跃迁到另一能级时，发射或吸收一个光子，光子频率  $\nu_v = \Delta E_v / h$ ， $\Delta E_v$  为跃迁能级的能量差。振动能级的间隔一般在 0.05 ~ 1eV 之间， $\nu_v$  在近红外区和中红外区，这种光谱称为分子的振动光谱。

(3) 分子转动能级：分子作为一个整体可以绕一定的轴线转动，分子转动能量  $E_r$  也是一系列不连续的分立值，分子转动状态的改变也是不连续的跃变。分子从某一转动能级跃迁到另一能级时，发射或吸收一个光子，光子的频率  $\nu_r = \Delta E_r / h$ ， $\Delta E_r$

为跃迁能级的能量差,  $\Delta E_r$  一般小于  $0.005\text{eV}$ ,  $\nu_r$  在远红外区和微波区。这种光谱称为分子的转动光谱。由于  $\Delta E_r$  很小, 所以分子的转动光谱的谱线很密集, 如果分光仪的分辨本领不高, 所得的光谱是连成一片的“光带”, 而不是分开的光谱线。

双原子分子如作为刚性分子处理, 其转动能量  $E_r$ , 量子力学计算的结果为

$$E_r = \frac{h^2}{8\pi^2 J} j(j+1) \quad j=0, 1, 2, 3, \dots$$

式中  $J$  为分子的转动惯量,  $j$  为转动量子数。由上式可看出,  $j$  越大, 转动能级间距离越大, 能级越分开。实际上, 分子不是刚性转子, 因为转动时有离心力作用, 原子间距离要增大, 转动越快, 距离增加愈多。

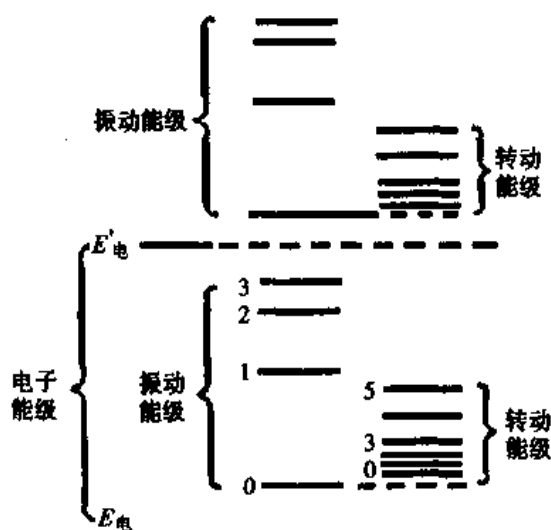


图 12-17 双原子分子能级示意图

辐射理论指出, 转子要有电矩才能有辐射, 所以对称的非极性分子如  $\text{H}_2$ 、 $\text{O}_2$ 、 $\text{CO}_2$ 、 $\text{CH}_4$ 、苯 ( $\text{C}_6\text{H}_6$ ) 等都不应有转动光谱。这一点已被实验所证实。图 12-17 为双原子分子能级示意图。

分子运动的上述三个方面是相互影响的, 一种运动状态的改变能引起其他运动状态也发生改变, 振动能级的跃迁总是和转动能级的跃迁连在一起的; 电子能级跃迁时总是伴随着振动和转动能级的改变。为了便于讨论光谱的结构规则, 可近似认为分子的总能量  $E$  为三部分能量的总和。即

$$E = E_e + E_v + E_r$$

当分子振动状态跃变时, 由于伴随着转动状态的跃变, 分子能量的跃变  $\Delta E'$  为振动能级的跃变  $\Delta E_v$  与转动能级跃变  $\Delta E_r$  之和, 即

$$\Delta E' = \Delta E_v + \Delta E_r$$

所发射或吸收的光子频率  $\nu'$  为

$$\nu' = \frac{\Delta E'}{h} = \frac{\Delta E_v}{h} + \frac{\Delta E_r}{h}$$

大量分子作相同振动能级跃迁时 ( $\Delta E_v$  相同), 由于各自的转动能级初态与末态各不相同 ( $\Delta E_r$  不同), 而  $\Delta E_r$  很小, 所以各个分子发射的光子频率  $\nu'$  相差很小, 因此, 谱线密集, 形成光谱带。这种光谱称为分子振转光谱。不同的振动能级跃迁, 形成不同的谱带, 分子振转光谱在近红外区。

分子中电子作能级跃迁时, 由于伴随着振动能级和转动能级的改变, 分子能量的跃变  $\Delta E$  为

$$\Delta E = \Delta E_e + \Delta E_v + \Delta E_r$$

所发射或吸收的光子频率为

$$\nu = \frac{\Delta E_e}{h} + \frac{\Delta E_v}{h} + \frac{\Delta E_r}{h}$$

大量分子作相同电子能级跃迁时,  $\Delta E_e$  相同, 各自的振动初态和末态各不相同, 各自的转动初态和末态各不相同, 但其中有一部分分子的振动初态和末态相同, 另一部分分子有着另一相同的振动初态和末态, 而相同的振动能级跃迁, 相应有一个光谱带, 因此, 分子作相同的电子能级跃迁时, 有着若干个光谱带, 这若干个光谱带形成一个光谱带系。从式(12-30)可看出这些光谱带由于电子能级差大, 整个光谱带的频率都比单纯的振转光谱高, 通常出现在紫外区和可见光区。电子作不同能级跃迁时, 形成若干个光谱带系。

## 思考题与习题十二

12-1 实物粒子的德布罗意波与电磁波、机械波有什么区别?

12-2 何谓不确定关系? 为什么说不确定关系与实验技术或仪器的改进无关?

12-3 说明波函数的统计意义, 波函数应满足什么物理条件?

12-4 将波函数在空间各点的振幅同时增加  $k$  倍, 则粒子在空间分布概率将( )

- (1) 增加  $k^2$  倍                      (2) 增为  $2k$  倍  
(3) 增为  $k$  倍                        (4) 不变                                      [(1)]

12-5 什么叫隧道效应? 在什么条件下隧道效应就不显著了?

12-6 根据量子力学理论, 氢原子中电子的运动状态可以用  $n$ 、 $l$ 、 $m_l$ 、 $m_s$  四个量子数来描述, 试说明它们各自确定什么物理量?

12-7 测量星球表面温度的方法是将星球看成绝对黑体, 按维恩位移定律测量  $\lambda_m$  便可求出  $T$ 。如测得北极星的  $\lambda_m = 350\text{nm}$ , 天狼星的  $\lambda_m = 290\text{nm}$ , 试求这些星球的表面温度各是多少?

(8802K, 9993K)

12-8 假设太阳表面温度为 5800K, 直径为  $13.9 \times 10^8\text{m}$ , 太阳一年中由于辐射而损失的能量是多少焦耳? 按质能联系公式  $E = \Delta mc^2$ , 太阳每年损失的质量多少千克?

( $1.23 \times 10^{34}\text{J}$ ,  $1.37 \times 10^{17}\text{kg}$ )

12-9 求证: (1) 当波长较长, 温度较低时, 普朗克公式可简化为维恩公式; (2) 当波长较短, 温度较高时, 普朗克公式可简化为瑞利-金斯公式。

12-10 由实验可知, 在一定条件下, 人眼视网膜上接收 5 个蓝绿色 ( $\lambda = 500\text{nm}$ ) 光子就能产生光的感受, 此时视网膜上接收的能量有多少? 如果每秒都接收 5 个这种光子, 问投射到视网膜上的光功率是多少?

( $1.99 \times 10^{18}\text{J}$ ,  $1.99 \times 10^{-19}\text{W}$ )

12-11 在入射光波长  $\lambda_0 = 400\text{nm}$ ,  $\lambda'_0 = 0.05\text{nm}$  两种情况下分别计算散射角  $\theta = \pi$  时康普顿效应波长偏移  $\Delta\lambda$  和  $\Delta\lambda/\lambda_0$ 。

( $0.0048\text{nm}$ ,  $1.2 \times 10^{-3}\%$ ,  $9.6\%$ )

12-12 电视显像管中加速电压为 9kV, 电子枪的枪口直径为 0.1mm, 求电子射出电子枪时横向上速度的不确定量, 能否将这些电子视为经典粒子?

( $1.2\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ , 可视为经典粒子)

12-13  $\alpha$  粒子在磁感应强度为  $B = 0.025\text{T}$  的均匀磁场中沿半径为  $R = 0.83\text{cm}$  的圆形轨道运动。求(1)其德布罗意波长; (2)若使质量  $m = 0.1\text{g}$  的小球以与  $\alpha$  粒子相同的速率运动, 其德布罗意波长多大?

$$(1.0 \times 10^{-11} \text{m}, 6.64 \times 10^{-34} \text{m})$$

12-14 氢原子光谱的巴尔末线系中, 有一谱线的波长为  $430 \text{nm}$ 。

(1) 求与这一谱线相应的光子的能量;

(2) 设该谱线是氢原子由能级  $E_n$  跃迁到  $E_k$  产生的,  $n$  和  $k$  各为多少?

$$(2.86 \text{eV}, k=2, n=5)$$

12-15 计算氢原子光谱巴尔末系中波长最长的谱线所对应的光子的波长和能量。

$$(\lambda_{\max} = 656.3 \text{nm}; E = 1.89 \text{eV})$$

12-16 设电子在一维无限深势阱中运动, 求势阱宽度  $L = 10^{-2} \text{m}$  和  $L' = 10^{-10} \text{m}$  两种情况下电子的能量。

$$(3.8 \times 10^{-15} n^2 \text{eV}, 38 n^2 \text{eV})$$

12-17 已知粒子在无限深势阱中运动, 其波函数  $\Psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi x}{a} (0 < x < a)$ , 求发现粒子的概率的最大的位置?

$$\left(x = \frac{a}{2}\right)$$

12-18 粒子在一维无限深势阱中运动, 其波函数  $\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) (0 < x < a)$ , 若粒子处于  $n=1$  状态, 在  $0 \sim a/4$  区间发现粒子的概率是多少?

$$(0.091)$$

12-19 一细胞的线度为  $10^{-5} \text{m}$ , 其中一个粒子的质量  $m = 10^{-14} \text{g}$ , 按一维无限深势阱计算, 这粒子的  $n_1 = 100$  和  $n_2 = 101$  的能级能量和两能级差各为多少?

$$(5.49 \times 10^{-37} \text{J}; 5.60 \times 10^{-37} \text{J}; 1.1 \times 10^{-38} \text{J})$$

12-20 在原子内部, 可用四个量子数  $n, l, m, m_s$  共同确定一个电子运动状态。按泡里原理, 在主量子数为  $n$  的壳层上, 最多可容纳多少个电子?

$$(2n^2)$$

(胡新珉)

# 第十三章 X 射线

---

学习本章后，你应：

---

1. 掌握 X 射线强度和硬度的概念、X 射线谱及 X 射线产生的微观机制、短波极限公式的应用、X 射线的衰减规律及应用。
  2. 理解 X 射线的基本性质、X 射线衍射、X-CT 成像原理。
  3. 了解 X 射线机的基本组成部分、X 射线在医学上的应用。
- 

1895 年伦琴 (W.K.Rontgen) 在研究稀薄气体放电时发现了 X 射线，劳厄 (M.VonLaue) 用晶体衍射实验，证明 X 射线是一种波长较短的电磁波。X 射线的发现，对物质微观结构理论的深入研究和技術上的应用都有重大意义。X 射线在医学诊疗中也有着广泛的应用，它与近代科技相结合，更成为现代医学不可缺少的工具。本章将介绍 X 射线的产生、X 射线谱、X 射线的性质和衰减规律、X 射线在医学上的应用及 X-CT 基本原理。

## 第一节 X 射线的产生

### 一、X 射线的产生装置

**1. 产生条件** 凡高速运动的电子受到物体阻止时，都能产生 X 射线。因此产生 X 射线的基本条件是：①有高速运动的电子流；②有适当的障碍物——靶，用来阻止电子的运动，把电子的动能转变为 X 射线的能量。

**2. X 射线产生装置** X 射线的产生装置主要包括三个组成部分，即：X 射线管、低压电源和高压电源。

X 射线管是一个高度真空的硬质玻璃管，管内封入阴、阳两个电极。阴极由钨丝卷绕成螺旋形，单独由低压电源（一般为 5~10 V）供给电流，使其炽热而发射电子。电流愈大，灯丝温度愈高，单位时间内发射的电子也愈多。阳极在管的另一端且正对着阴极，通常是铜制的圆柱体，在柱端斜面上嵌一小块钨板，作为接受高速电子冲击的靶。阴阳两极间所加的几十千伏到几百千伏的直流高压，称为管电压，阴极发射的热电子在电场作用下高速奔向阳极，形成管电流。这些高速电子突然被钨靶阻止时，就有 X 射线向四周辐射。

实际的 X 射线产生装置 (X 光机)，都是用交流供电，结构比较复杂。图 13-1 是

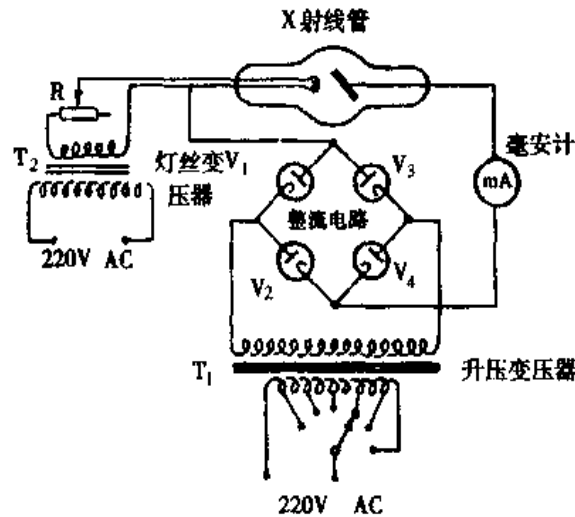


图 13-1 X 射线机的基本线路

较典型的全波整流 X 射线机基本线路示意图，图中升压变压器  $T_1$  用来获得所需的管电压，4 个二极管联成全波整流器，把  $T_1$  输出的交流高压改变为直流。降压变压器  $T_2$  供给灯丝加热电流，变阻器  $R$  用来调节灯丝电流以改变发出的热电子的数量，从而控制管电流。

高速电子轰击阳极时，电子动能转变为 X 射线的能量不到 1%，99% 以上都转变为热能，使阳极温度升高。因此，阳极上直接受到电子轰击的靶应当用熔点高的物质来作。此外，理论和实验都表明，在同样速度和数目的电子轰击下，原子序数  $Z$  不同的各种物质制成的靶所发出 X 射线的光子总数和光子总能量近似与  $Z^2$  成正比，所以  $Z$  愈大则发生 X 射线的效率愈高。因此，在兼顾熔点高、原子序数大和其他一些技术要求时，钨 ( $Z=74$ ) 和它的合金是最适当的材料。在需要波长较长的 X 射线的情况下，如乳房透视，采用的管电压较低，这时用钼 ( $Z=42$ ) 作为靶更好一些。由于靶的发热量很大，所以阳极整体用导热系数较大的铜作成，受电子轰击的钨或钼靶则镶嵌在阳极上，以便更好地导出和散发热量。按照 X 射线管的功率大小，采用不同的散热方法以降低阳极的温度。

### 3. 实际焦点与有效焦点

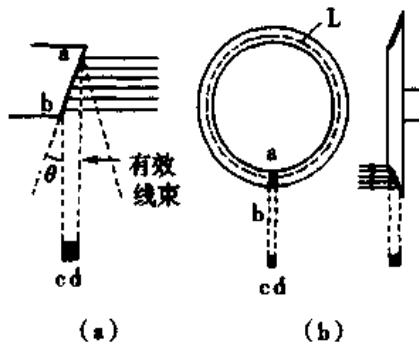


图 13-2 有效焦点和旋转阳极

电子流在靶面上的撞击面积称为实际焦点，实际焦点的大小和灯丝的形状有关。长灯丝所形成的焦点叫大焦点，短灯丝形成的焦点叫小焦点，可根据需要选择使用。一般 X 射线管的阳极靶面，均作成斜面，钨靶为一矩形，如图 13-2 (a) 所示。图中实际焦点为  $ab \times cd$ ， $\theta$  角是靶面与垂直于电子流方向间的夹角。实际焦点的投影面积称为有效焦点，其面积近似等于  $cd \times ab \sin \theta$ ，有效焦点与靶的倾斜度有关，大约只有实际焦点的 1/2 到 1/4，近似正方形。虽然电子撞击在靶上的面积较大，但 X

射线却像是从较小的面积上发射出来。焦点愈小，X射线透视或照相时在荧光屏或照相底片上所成的像愈清晰。一般诊断用的X射线管采用小焦点，而治疗用X射线管则采用大焦点。另一方面，为了降低阳极靶面的温度，大功率的X射线管多采用旋转阳极，使受撞击面不断改变，将热量分散到较大的面积上，如图13-2(b)所示。

## 二、X射线的强度和硬度

**1. X射线的强度** X射线的强度是指单位时间内通过与射线方向垂直的单位面积的辐射能量，单位为 $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$ ，这与波的强度概念相一致。若用 $I$ 表示X射线的强度，则有

$$I = \sum_{i=1}^n N_i h\nu_i = N_1 h\nu_1 + N_2 h\nu_2 + \cdots + N_n h\nu_n \quad (13-1)$$

式中 $N_1, N_2, \cdots, N_n$ 分别表示单位时间通过单位面积的(垂直于射线方向)能量为 $h\nu_1, h\nu_2, \cdots, h\nu_n$ 的光子数。由式(13-1)可知，有两种办法可使X射线强度增加：①增加管电流，使单位时间内轰击阳极靶的高速电子数目增多，从而增加所产生的光子数目 $N$ ；②增加管电压，可使每个光子的能量 $h\nu$ 增加。由于光子数不易测出，故通常间接用管电流的mA数来表示X射线的强度。

在一定管电压下，X射线管灯丝电流越大，灯丝温度越高，发射热电子数则越多，管电流就越大。因此，常用调节灯丝电流的方法改变管电流，以达到控制X射线强度的目的。

由于X射线通过任一截面积的总辐射能量不仅与管电流成正比，而且还与照射时间成正比，因此采用管电流的毫安数(mA)与辐射时间(s)的乘积表示X射线的总辐射能量，其单位为 $\text{mA}\cdot\text{s}$ 。

**2. X射线的硬度** X射线的硬度是指X射线的贯穿本领，它只决定于X射线的波长(即X射线的能量)，而与光子数目无关。对于一定的吸收物质，X射线被吸收愈少则贯穿的量愈多，X射线就愈硬，或者说硬度愈大。X射线管的管电压愈高，则轰击靶面的电子动能愈大，发射光子的能量也愈大，而能量愈大的光子愈不易被物质吸收，即管电压愈高产生的X射线愈硬。同样，由于X射线光子能量不易测出，所以，在医学上通常用管电压的千伏数(kV)来表示X射线的硬度，并通过调节管电压来控制X射线的硬度。医学上常根据用途把X射线按硬度分为极软、软、硬和极硬四类，它们的管电压、波长及用途见表13-1。

表 13-1 X射线按硬度的分类

| 名称    | 管电压(kV) | 最短波长(nm)    | 主要用途       |
|-------|---------|-------------|------------|
| 极软X射线 | 5~20    | 0.25~0.062  | 软组织摄影，表皮治疗 |
| 软X射线  | 20~100  | 0.062~0.012 | 透视和摄影      |
| 硬X射线  | 100~250 | 0.012~0.005 | 较深组织治疗     |
| 极硬X射线 | 250以上   | 0.005以下     | 深部组织治疗     |



## 第二节 X 射线谱

通常 X 射线管发出的 X 射线，包含各种不同的波长成分，将其强度按照波长的顺序排列开来的图谱，称为 X 射线谱。钨靶 X 射线管所发射的 X 射线谱如图 13-3 所示，上部是谱强度与波长关系的曲线，下部是照在胶片上的射线谱。从该图可以看出，X 射线谱包含两个部分：曲线下面有斜线的部分对应于照片上的背景，它包括各种不同波长的射线，称为连续 X 射线或连续谱；另一部分是曲线上凸出的尖端，具有较大的强度，对应于照片上的明显谱线，这相当于可见光中的明线光谱，称为标识 X 射线或标识谱。连续谱与靶物质无关，但不同的靶物质有不同的标识谱。下面分别讨论这两部分谱线。

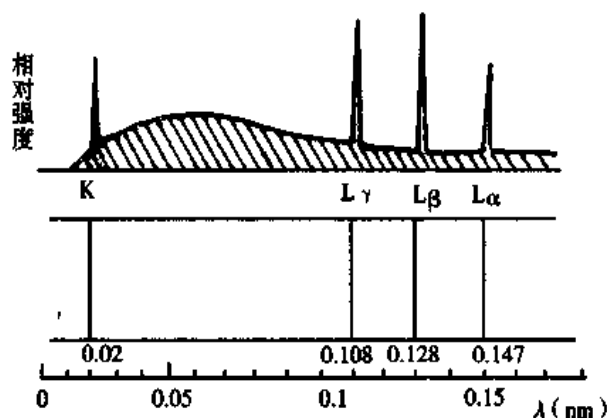


图 13-3 X 射线谱示意图

### 一、连续 X 射线谱

**1. 产生机制** 连续 X 射线的发生是韧致辐射过程，韧致辐射一词来自德语制动辐射，它是对这种过程的最好描述。当高速电子流撞击在阳极靶上受到制动时，电子在原子核的强电场作用下，速度的量值和方向都发生急剧变化，一部分动能转化为光子的能量  $h\nu$  而辐射出去，这就是韧致辐射。由于各个电子到原子核的距离不同，速度变化情况也各不一样，所以每个电子损失的动能将不同，辐射出来的光子能量具有各种各样的数值，从而形成具有各种频率的连续 X 射线谱。

**2. 连续谱特性** 实验指出，当 X 射线管在管电压较低时只出现连续 X 射线谱。图 13-4 是钨靶 X 射线管在四种较低管电压下的 X 射线谱。由图可见，在不同管电压作用下连续谱的位置并不一样，谱线的强度从长波开始逐渐上升，达到最大值后很快下降为零。强度为零的相应波长是连续谱中的最短波长，称为短波极限。在图中还可以看到，当管电压增大时，各波长的强度都增大，而且强度最大的波长和短波极限都向短波方向移动。

设管电压为  $U$ ，电子电量为  $e$ ，则电子具有的动能为  $eU$ ，这也是光子可能具有

的最大能量  $h\nu_{\max}$ ,  $\nu_{\max}$  是与短波极限  $\lambda_{\min}$  对应的最高频率, 由此得到:

$$h\nu_{\max} = h \frac{c}{\lambda_{\min}} = eU$$

即 
$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{e} \cdot \frac{1}{U} \quad (13-2)$$

上式表明, 连续 X 射线谱的最短波长与管电压成反比。管电压愈高, 则  $\lambda_{\min}$  愈短。这个结论与图 13-4 的实验结果完全一致。把  $h$ 、 $c$ 、 $e$  的值代入上式, 并取  $kV$  为电压单位,  $nm$  为波长单位, 可得

$$\lambda_{\min} = \frac{1.242}{U (kV)} nm \quad (13-3)$$

连续 X 射线谱的强度同时受到靶原子序数、管电流及管电压影响, 其中靶原子序数大的原子核, 其电场对电子作用强, 电子损失能量多, 辐射出来的光子能量大, X 射线的强度就大。

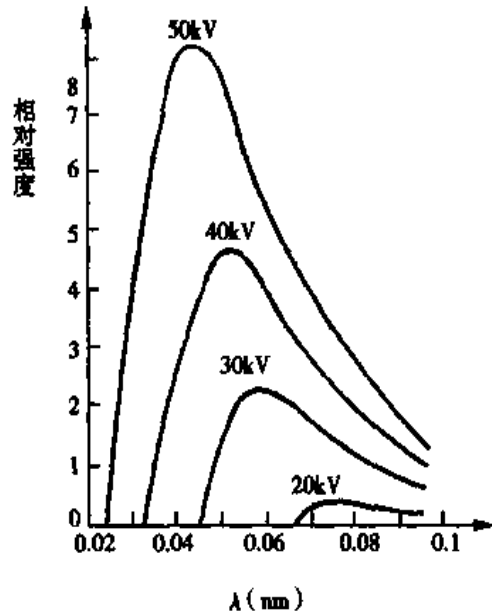


图 13-4 钨的连续 X 射线谱

## 二、标识 X 射线谱

以上讨论钨靶 X 射线管在  $50kV$  以下工作的情况, 此时波长在  $0.025nm$  以上, 只出现连续 X 射线。当管电压升高到  $70kV$  以上时, 连续谱在  $0.02nm$  附近叠加了四条谱线, 在曲线上出现了四个高峰。当电压继续升高时, 连续谱发生很大改变, 但这四条谱线在图中的位置却始终不变, 即它们的波长不变, 如图 13-5 所示, 图中的四条谱线就是图 13-3 中未曾分开的 K 线。

1. 产生机制 标识 X 射线的产生和原子光学光谱的产生相类似, 区别在于原子

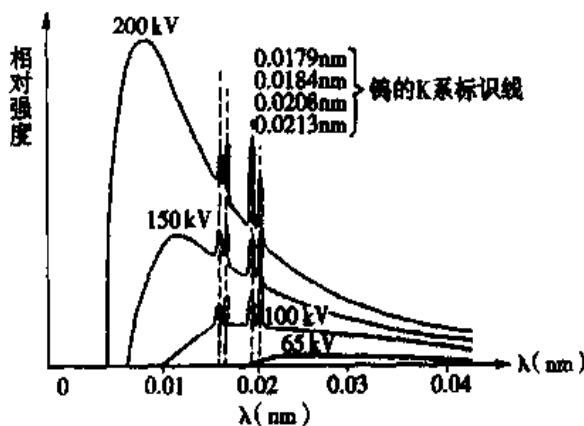


图 13-5 钨在较高管电压下的 X 射线谱

$0.0213nm$  和  $0.0208nm$  的谱线由 L 层下不同能级的电子跃迁到 K 层空位时发生;  $0.0184nm$  的谱线来自 M 层电子;  $0.0179nm$  的谱线来自 N 层和 M 层电子向 K 层空位的跃迁

光学光谱是原子外层电子受激后所产生的辐射, 而标识 X 射线是内层电子受激的结果。当高速电子进入靶内时, 如果它与某个原子的内层电子发生强烈相互作用, 就有可能把一部分动能传递给这个电子, 使它从原子中逸出, 在原子的内层电子中出现一个空位。如果逸出的是 K 层电子, 则空出来的位置就会被 L、M 或更外层的电子填补, 并在跃迁过程中发出标识 X 射线, 其射线的能量等于两个能级的能量差。这样发出的几条谱线, 通常以符号  $K_{\alpha}$ 、 $K_{\beta}$ 、 $K_{\gamma}$ ……表示, 称为 K 线系。如果空位出现在 L 层(这个空

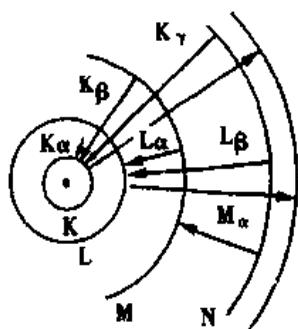


图 13-6 标识 X 射线  
发生原理示意图

位可能是由于高速电子直接把一个 L 层电子击出去,也可能是由于 L 层电子跃迁到了 K 层留下的空位),那么这个空位就可能由 M、N、O 层的电子来补充,并在跃迁过程中发出光子,形成 L 线系。由于离核愈远的电子,能级差愈小,所以 L 线系各谱线的波长比 K 系的长些。同理, M 系的波长又更大些。图 13-3 画出了钨的 K 和 L 线系,而图 13-5 中没有出现 L 线系,因为它已在图中的波长范围以外。图 13-6 画出了这种跃迁的示意图,当然这些跃迁并不是同时在一个原子中发生的。

## 2. 标识谱特性 综上所述,标识 X 射线谱是原子内层电子跃迁所发出的,因此各元素的标识谱有相似的结构。

在标识 X 射线谱中,电子由不同能级达到同一壳层的空位时发生的谱线组成一个线系,每个线系都有一个最短波长边界,这就是一个自由电子(或近似地认为最外层价电子)进入这个空位时发出的光子的波长。由于原子中各个内层轨道的能量是随着原子序数增加的,因此,原子序数愈高的元素,它的各个标识 X 射线系的波长也愈短。标识谱线的波长决定于阳极靶的材料,不同元素制成的靶具有不同的线状 X 射线谱,并可以作为这些元素的标识,这就是“标识 X 射线”名称的由来。需要指出,X 射线管需要加几十千伏的电压才能激发出某些标识 X 射线系。

医用 X 射线管发出的 X 射线,主要是连续 X 射线,标识 X 射线在全部 X 射线中所占的量很少。但是,标识 X 射线的研究,对于认识原子的壳层结构和化学元素的分析都是非常有用的,例如近年来发展的微区分析技术就是用很细的电子束打在样品上,根据样品发出的标识 X 射线来鉴定各个微区中的元素成分,该技术已经开始在医学研究中应用。

## 第三节 X 射线的基本性质

### 一、X 射线的一般性质

X 射线和从原子核中发射出来的  $\gamma$  射线都是波长很短的电磁波,也是能量很大的光子流,所以,X 射线除具有电磁波的一系列性质外,还有如下特性。

1. 电离作用 X 射线能使原子和分子电离,因此对有机体可诱发各种生物效应。在 X 射线照射下,气体也能够被电离而导电,利用电离作用这一特性可制作测量 X 射线强度的仪器,常用于辐射剂量的测试。

2. 荧光作用 X 射线照射某些物质,如磷、铂、氟化钡、硫化锌等,能使它们的原子或分子处于激发态,当它们回到基态时发出荧光。有些激发态是亚稳态,在停止照射后,能在一段时间内继续发出磷光。医疗上的 X 射线透视,就是利用 X 射线对屏上物质的荧光作用显示 X 射线透过人体后所成的影像。

3. 光化学作用 X 射线能使多种物质发生光化学反应,例如,X 射线能使照相胶

片感光。医学上利用这一特性来进行 X 射线摄影。

4. 生物效应 X 射线照射生物体, 能使生物体产生各种生物效应, 如使细胞损伤、生长受到抑制甚至坏死等。它是放射治疗的基础, 也是放射工作者应注意防护的原因。这种效应的原发机制是射线在生物体内产生电离和激发。

5. 贯穿本领 X 射线对各种物质都具有一定程度的穿透作用。研究表明, 物质对 X 射线的吸收程度与 X 射线的波长有关, 也与物质的原子序数或密度有关。X 射线波长越短, 物质对它的吸收越小, 它的贯穿本领就越大。医学上利用 X 射线的贯穿本领和不同物质对它吸收程度的不同进行 X 射线透视、摄影和防护。

## 二、X 射线的衍射

X 射线的波长范围约为 0.001 ~ 10 nm, 晶体中相邻两原子间距的数量级与此相仿, 所以晶体原子有规则排列起来的结构是 X 射线很合适的衍射光栅。1912 年劳厄用晶体衍射方法证明 X 射线具有波动性, 从而揭示了 X 射线的本质。

当 X 射线照射晶体时, 组成晶体的每一个原子, 都相当于发射子波的中心, 并向各个方向发出子波, 称为散射。来自晶体散射中心的 X 射线会叠加干涉而使得某些方向的光束加强。图 13-7 表示了 X 射线在晶体上的衍射, 图中黑点代表晶体中的原子, 它们按等距离  $d$  整齐排列。X 射线以  $\theta$  角掠射到晶体上时, 一部分为表面层原子散射, 其余部分将为内部各个原子层所散射。但在各层原子所散射的射线中, 只有按反射定律反射的射线强度最大。由图可见, 上下两层原子发出的反射线①和②的光程差是

$$AM + BM = 2AM = 2d\sin\theta$$

因此反射线相干加强的条件是

$$2d\sin\theta = k\lambda \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (13-4)$$

上式称为布拉格定律。

如果入射的是单色 X 射线束, 以任意掠射角  $\theta$  投射到晶体上, 一般不能满足式 (13-4) 的条件。但由于入射 X 射线的波长是连续的, 则对于波长值为  $\lambda = 2d \sin\theta / k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) 的入射 X 射线束就可以产生加强反射。

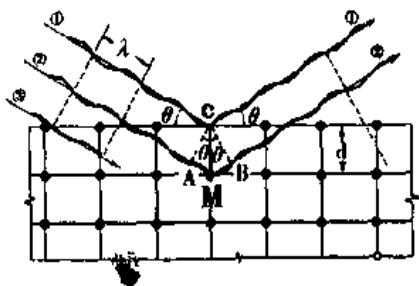


图 13-7 X 射线衍射原理

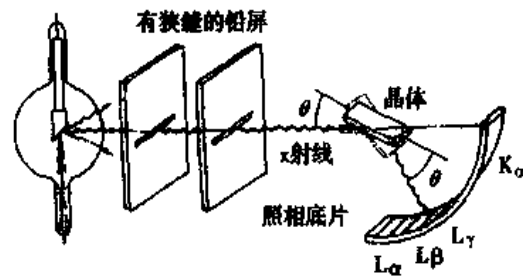


图 13-8 X 射线摄谱仪原理图

由上述可知, 用结构已知的晶体作为光栅, 式中  $d$  为已知, 利用式 (13-4) 可以计算出入射 X 射线的波长  $\lambda$ 。反之, 利用已知波长的 X 射线照射晶体, 则可测出晶体各点阵原子的位置和间隔。因此, X 射线衍射是研究晶体结构的主要方法之一。同样方

法也可在生物医学上研究有机体如细胞和蛋白质等的精细结构。现在这种研究已经发展成一门独立学科，称为 X 射线结构分析。

利用 X 射线晶体衍射的基本原理，布拉格父子设计了既能观察 X 射线衍射，又可摄取 X 射线谱的实验装置，即 X 射线摄谱仪。如图 13-8 所示，X 射线束通过两个铅屏上的狭缝射到晶体光栅上，转动晶体，当入射 X 射线与晶体表面的夹角为某一角度时，入射 X 射线中某一波长刚好满足式(13-4)的关系，这时，将有一道反射 X 线从晶体射到放置在其附近的圆弧形胶片上。波长愈短的射线，掠射角  $\theta$  愈小，改变  $\theta$  角，就可以使不同波长的 X 射线在不同的方向上得到加强并射向胶片。当晶体往复转动时，反射 X 线束就在胶片上从一端到另一端反复感光，取下胶片冲洗后就可获得本章第二节图 13-3 所示的 X 射线谱。利用该摄谱仪还可获得单色 X 射线。

#### 第四节 物质对 X 射线的衰减规律

当 X 射线通过物质时，光子能与物质中的原子发生多种相互作用。在作用过程中，一部分光子被吸收并转化为其他形式的能量，一部分光子被物质散射而改变方向，总之，都使 X 射线原来方向上的强度被衰减。X 射线通过物质时，与物质发生的各种的相互作用称为物质对 X 射线的吸收，本节仅讨论它的宏观总效果，即 X 射线通过物质时强度被衰减的规律。

##### 一、单色 X 射线的衰减规律

实验指出，单色平行 X 射线束通过物质时，沿入射方向 X 射线强度的变化服从指数衰减规律，即

$$I = I_0 e^{-\mu x} \quad (13-5)$$

式中  $I_0$  是入射 X 射线的强度， $I$  是通过厚度为  $x$  的物质层后的射线强度， $\mu$  称为线性衰减系数。如果厚度  $x$  的单位为 cm，则  $\mu$  的单位为  $\text{cm}^{-1}$ 。显然， $\mu$  愈大则射线强度在物质中衰减愈快， $\mu$  愈小则衰减愈慢。对于同一种物质来说，线性衰减系数  $\mu$  与它的密度  $\rho$  成正比，因为吸收体的密度愈大，则单位体积中可能与光子发生作用的原子就愈多，光子在单位路程中被吸收或散射的概率也就愈大。线性衰减系数  $\mu$  与密度  $\rho$  的比值称为质量衰减系数，记作  $\mu_m$ ，即

$$\mu_m = \frac{\mu}{\rho} \quad (13-6)$$

质量衰减系数用来比较各种物质对 X 射线的吸收本领。一种物质由液态或固态转变为气态时，虽然它的密度变化很大，但  $\mu_m$  值都是相同的。引入质量衰减系数后，式(13-5)改写成

$$I = I_0 e^{-\mu_m x_m} \quad (13-7)$$

式中  $x_m = x\rho$  即称为质量厚度，它等于单位面积、厚度为  $x$  的吸收层的质量。 $x_m$  的常用单位为  $\text{g}\cdot\text{cm}^{-2}$ ， $\mu_m$  的相应单位为  $\text{cm}^2\cdot\text{g}^{-1}$ 。

X射线在物质中强度被衰减一半时的厚度(或质量厚度),称为该种物质的半价层。由式(13-5)和式(13-7)可以得到半价层与衰减系数之间的关系式

$$x_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu} = \frac{0.693}{\mu} \quad (13-8)$$

$$x_{m1/2} = \frac{\ln 2}{\mu_m} = \frac{0.693}{\mu_m} \quad (13-9)$$

式(13-5)和式(13-7)可写为  $I = I_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{x_{1/2}}}$  或  $I = I_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x_m}{x_{m1/2}}}$ 。

各种物质的衰减系数都与射线波长有关,因此以上各式只适用于单色射线束。X射线主要是连续谱,所以射线的总强度并不是严格地按照指数规律衰减的。在实际问题中,我们经常近似地运用指数规律,这时式中的衰减系数应当用各种波长的衰减系数的一个适当平均值来代替。

X射线通过物质时强度按指数规律衰减,其微观机制是X射线与物质发生多种相互作用,从而使能量不断减少。X射线与物质相互作用的方式主要有三种:光电效应、康普顿散射和电子对产生。各种作用的具体过程将在下一章介绍。

## 二、衰减系数与波长、原子序数的关系

对于医学上常用的低能X射线,光子能量在数十到数百 keV 之间,各种元素的质量衰减系数近似地适合下式

$$\mu_m = KZ^\alpha \lambda^3 \quad (13-10)$$

式中的K大致是一个常数,Z是吸收物质的原子序数, $\lambda$ 是X射线的波长。指数 $\alpha$ 通常在3~4之间,与吸收物质和射线波长有关。吸收物质为水、空气和人体组织时,对于医学上常用X射线, $\alpha$ 可取3.5。吸收物质中含有多种元素时,它的质量衰减系数,大约等于其中各种元素的质量衰减系数按照物体中所含质量比例计算的平均值。从式(13-10),我们得出两个有实际意义的结论:

原子序数愈大的物质,吸收本领愈大。人体肌肉组织的主要成分是H、O、C等,而骨的主要成分是 $\text{Ca}_3(\text{PO}_4)_2$ ,其中Ca和P的原子序数比肌肉组织中任何主要成分的原子序数都高,因此骨骼的质量衰减系数比肌肉组织的大,在X射线照片或透视荧光屏上显示出明显的阴影。在胃肠透视时服钡盐也是因为钡的原子序数较高( $Z=56$ ),吸收本领较大,可以显示出胃肠的阴影。铅的原子序数很高( $Z=82$ ),因此铅板和铅制品是应用最广泛的防护材料。

波长愈长的X射线,愈容易被吸收。这就是说,X射线的波长愈短,则贯穿本领愈大,即硬度愈大。因此,在浅部治疗时应使用较低的管电压,在深部治疗时则使用较高的管电压。

根据上述结论可知,当X射线管发出的含有各种波长的射线进入吸收体后,长波成分比短波成分衰减得快,短波成分所占的比例愈来愈大,平均衰减系数则愈来愈小。这也就是说,X射线进入物体后愈来愈硬了,称为它的硬化。利用这一原理,我们常常让X射线通过铜板或铝板,使软线成分被强烈吸收,这样得到的X射线不

仅硬度较高，而且射线谱的范围也较窄，这种装置称为滤线板。实际的滤线板往往由铜板和铝板合并组成。在使用时，铝板应当放在 X 射线最后射出的一侧，这是因为各种物质在吸收 X 射线时都发出它自己的标识 X 射线，铝板可以吸收铜板发出的标识 X 射线，而铝板发出的标识 X 射线波长约在 0.8nm 以上，很易在空气中被吸收。

$\gamma$  射线被物质吸收的规律与 X 射线相同，只是它的波长比 X 射线更短，贯穿本领更强。

## 第五节 X 射线的医学应用

X 射线在医疗上的应用，主要有治疗和诊断两个方面。

### 一、治 疗

X 射线在临床上主要用于治疗癌症，其治疗机制是，X 射线通过人体组织能产生电离作用、康普顿散射及生成电子对，由此可诱发出一系列生物效应。研究表明，X 射线对生物组织细胞有破坏作用，尤其是对于分裂活动旺盛或正在分裂的细胞，其破坏力更强。组织细胞分裂旺盛是癌细胞的特征，因此用 X 射线照射可以抑制它的生长或使它坏死。各种细胞对 X 射线的敏感性是不一样的，因此放射治疗方案的设计就显得尤为重要，不仅要根据肿瘤位置及细胞种类计算出给予病人肿瘤的照射量，还要及时测定和调节治疗设备输出的射线量。

用于治疗的 X 射线设备有两种，即普通 X 射线治疗机和“X-刀”。普通治疗机与常规摄影 X 射线机的结构基本相同，只是 X 射线管采用了大焦点，常用来治疗皮肤肿瘤。“X-刀”是利用直线加速器产生的高能量 X 射线和电子线作为放射源，围绕等中心点作  $270^\circ \sim 360^\circ$  旋转，依其垂直旋转与操作台  $180^\circ$  范围内的水平旋转，在靶区形成多个非共面的聚焦照射弧，使照射线集中于某中心点上以获得最大的辐射量。“X-刀”可用于各器官、组织肿瘤的放射治疗。

由于 X 射线能引起生物效应，因此人体组织受过量 X 射线照射后会引发某些疾病。因此，应尽量减少病人不必要的照射。对经常从事 X 射线工作的人员要注意防护，常用的防护物品有铅板、含铅玻璃、含铅胶皮裙和手套等。

### 二、诊 断

X 射线常规透视、摄影、X-CT 以及近几年出现的数字减影血管造影技术是医学影像诊断中应用最普遍的检查手段。

1. 常规透视和摄影 其基本原理是，由于体内不同组织或脏器对 X 射线的吸收本领不同，强度均匀的 X 射线透过人体不同部位后的强度是不相同的，透过人体后的 X 射线投射到荧光屏上，就可以显示出明暗不同的荧光像。这种方法称为 X 射线透视术。如果让透过人体的 X 射线投射到照相胶片上，显像后就可于照片上观察到组织或脏器的影像，该技术称为 X 射线摄影。X 射线透视或摄影可以清楚地观察到骨

折的程度、肺结核病灶、体内肿瘤的位置和大小、脏器形状以及断定体内异物的位置等。若延长 X 射线透视时间，还可以观察脏器的运动情况。X 射线摄影的位置分辨能力和对比度分辨能力都较好，照片可以永久保存。X 射线透视时，荧光屏上的影像也可以用胶片记录下来，以供保存和长时间观察，但分辨能力不及直接摄影，这种方法主要用于普查。在 X 射线摄影时，由于 X 射线的贯穿本领大，致使胶片上乳胶吸收的射线量不足。如果在胶片前后各放置一个紧贴着的荧光屏，就可以使摄影胶片上的感光量增加很多倍，这个屏称为增感屏。使用增感屏摄影时可以降低 X 射线的强度或缩短摄影时间，从而减少患者所接受的照射量。此外还可使用影像增强管提高影像亮度。

在对软组织摄影时，不能使用硬 X 射线。因为软组织对硬 X 射线的能量吸收较少，X 射线几乎可以全部透过，无法达到分辨不同组织的目的，因此采用较软的 X 射线以增大软组织之间的影像反差。目前用低电压（~25kV）的钨靶 X 射线管专供软组织特别是乳腺摄影之用，取得了较好的结果，为乳腺的良性病变和乳腺癌的早期诊断及普查提供了有利的工具。

人体某些脏器或病灶对 X 射线的衰减本领与周围组织相差很少，在荧光屏或照片上就不能显示出来。一种解决的办法就是给这些脏器或组织注入衰减系数较大或较小的物质来增加它和周围组织的对比，这些物质称为造影剂。例如在检查消化道时，让受检者吞服衰减系数很高的“钡餐”（即硫酸钡），使它陆续通过食管和胃肠，并同时进行 X 射线透视或摄影，就可以把这些脏器显示出来。在作关节检查时，可以在关节腔内注入密度很小的空气，然后用 X 射线透视或摄影，从而显示出关节周围的结构。类似的方法也可以用来观察大脑和心脏。

2. 数字减影血管造影(DSA) 其基本原理是，把穿过人体的 X 射线影像通过影像增强器转变为光学图像，然后经摄像管变成视频信号，再把视频信号进行对数转换和模数转换后，就可获得一幅图像的数字信号，并暂时存入图像存储器。把未注入造影剂时获得的影像称为“原像”或“本底图像”，注入造影剂后的图像称为“造影像”，这两种图像分别以数字形式存在两个图像存储器内。通过图像处理器将代表“原像”和“造影像”的数字相减，即从造影像中减去原像，使充盈造影剂的血管图像保留下来，而骨髓等无关组织的影像则被减影除去。保留下来的血管图像信号再经过放大处理使对比度提高，然后经数模转换器恢复为视频信号，输入监视器的阴极或栅极，就可得到实时血管图像。DSA 是一种理想的非损伤性血管造影检查技术，它取代了危险性较大的动脉造影检查。DSA 不仅用于血管疾病的诊断，如观察血管梗阻、狭窄、畸形及血管瘤等，而且还可为血管内插管进行导向，从而施行一些“手术”和简易治疗，如吸液、引流、活检和化疗或阻断肿瘤血供等。

### 三、X-CT

X 射线计算机辅助断层扫描成像装置，简称 X-CT。它通过 X 射线管环绕人体某一层面的扫描，利用探测器测得从各个方向透过该层面后的射线强度值，利用计算机及图像重建原理，获得该层面的图像。



1. X-CT 的基本原理 设用单色 X 射线通过密度均匀的介质, 根据式(13-5)可得到射线强度与介质层厚度  $x$  的关系为

$$\mu = \frac{1}{x} \ln \frac{I_0}{I} \quad (13-11)$$

如果介质沿 X 射线路径的密度不均匀, 则可将整个介质分成若干个很小的体积元, 其线度为  $l$ , 每一个体积元可视为均匀介质, 体积元中的  $\mu$  值相同。该体积元称为体素, 如图 13-9 所示。

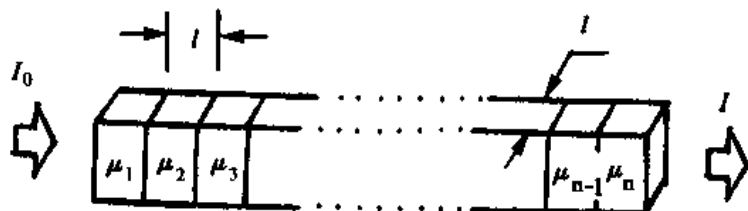


图 13-9 X 射线穿过  $n$  个厚度为  $l$  的体素的衰减

对第一个体素有

$$I_1 = I_0 e^{-\mu_1 l}$$

对第二个体素有

$$I_2 = I_1 e^{-\mu_2 l} = (I_0 e^{-\mu_1 l}) e^{-\mu_2 l} = I_0 e^{-(\mu_1 + \mu_2) l}$$

对第  $n$  个体素有

$$I_n = I_0 e^{-(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \dots + \mu_n) l}$$

$I$  值可以测量,  $I_0$  和  $l$  值为已知, 则根据式(13-11), 可求出衰减系数的和为:

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \dots + \mu_n = \frac{1}{l} \ln \frac{I_0}{I}$$

或

$$\frac{1}{l} \ln \frac{I_0}{I} = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \dots + \mu_n = \sum_{i=1}^n \mu_i \quad (13-12)$$

上式是 X-CT 建立层面图像的主要依据。

当穿透人体的 X 射线经组织吸收后, 透射部分的强度可用探测器接收, 其信号强弱决定于人体的组织密度。不同的信号强度反映不同组织的特性, 也就是  $\mu$  值不同, 于是把  $\mu$  值作为一种成像参数。所以, 一幅 X-CT 图像实际上是反映层面 X 射线衰减系数  $\mu$  的空间分布。如何求得层面中每一个体素的  $\mu$  值, 是 X-CT 基本原理的关键所在。图 13-10 是把欲观测的层面分解成为  $n \times n$  个体素的矩阵阵列, 每个体素的长度和宽度都用  $l$  表示, 并在层面所在的平面上建立直角坐标系  $(x, y)$ , 则衰减系数可用  $\mu(x, y)$  进行描述。

当 X 射线束平行于 X 轴穿透第 1 排体素时, 透射强度  $I_1$  与该射线路径上各体素的衰减系数的总和有关。常把某方向各体素衰减系数的总和, 称为投影值, 用  $p$  表示。如果这些体素的  $\mu$  值各不相同, 那么仅从  $I_1$  的测量结果, 显然不可能计算出各个体素的  $\mu$  值。同样, 当射线束顺序穿透第 2、3、 $\dots$   $n$  排时, 从测得的  $I_2, I_3, \dots, I_n$  也不可能算出各排中每个体素的  $\mu$  值。但根据  $I_1, I_2, \dots, I_n$  的这组数据可得到该特定方向的强度分布图或相应投影值  $(p_1, p_2, \dots, p_n)$  分布图。如果此时 X 射线源和探测器绕坐标的原点(一般取层面的几何中心), 一起转动一个很小的角度  $\varphi$ , 则可实现第二个特定方向下的投影值分布图。继续改变角度  $\varphi$ , 每改变一个角度记录下该方向的投

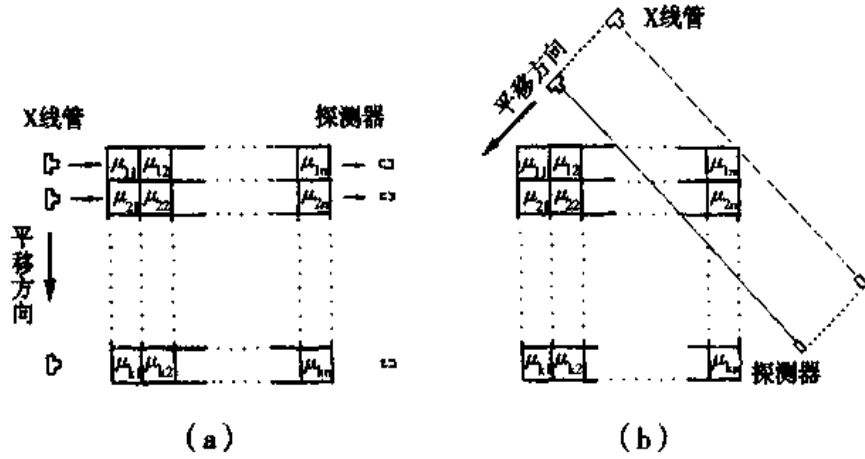


图 13-10 层面矩阵扫描示意图

影值分布图，直到记录足够多的投影值分布图(或数据)，使各体素  $\mu$  值所组成的方程式的个数，符合重建图像的需要为止。

假如层面所在的坐标系  $(x, y)$  固定，然后在同一平面，取相同原点的旋转坐标系  $(r, s)$ ，如图 13-11 所示。其中  $\varphi$  是  $s$  轴的旋转角度(相对  $y$  轴)，若保持  $s$  轴与射线方向平行，则  $r$  为原点到射线路径的垂直距离， $s$  为沿射线路径上某点至  $r$  轴的垂直距离，则投影值分布图  $p(r, \varphi)$  代表角度为  $\varphi$  的特定方向下的一系列投影值( $p_1$  至  $p_n$ )，并可由衰减系数的分布函数  $\mu(x, y)$  的线积分表示。

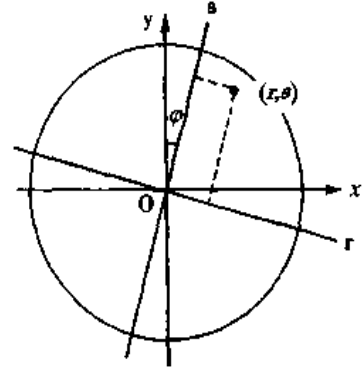


图 13-11 层面体素空间定位的一种坐标系

$$p(r, \varphi) = \int_{r, \varphi} \mu(x, y) ds \quad (13-13)$$

上式说明层面中每个体素的  $\mu$  值，可以通过测量  $p(r, \varphi)$  求得。故重建图像的关键是从多个方向测量投影值  $p(r, \varphi)$ ，最后求出层面的吸收系数  $\mu(x, y)$ 。

**2. 图像重建的基本方法** 图像重建的数学方法主要有：联立方程法、反投影法、滤波反投影法、二维傅里叶变换法、卷积反投影法及迭代法等。下面介绍两种求解衰减系数的方法，作为理解复杂重建图像原理的基础。

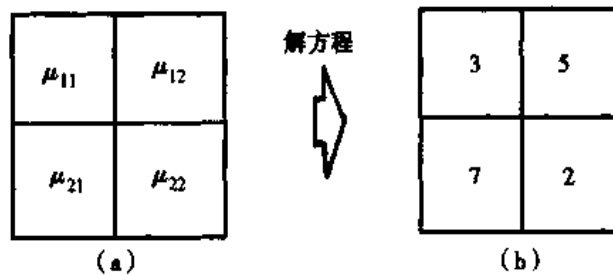


图 13-12 一个  $2 \times 2$  矩阵的简单层面

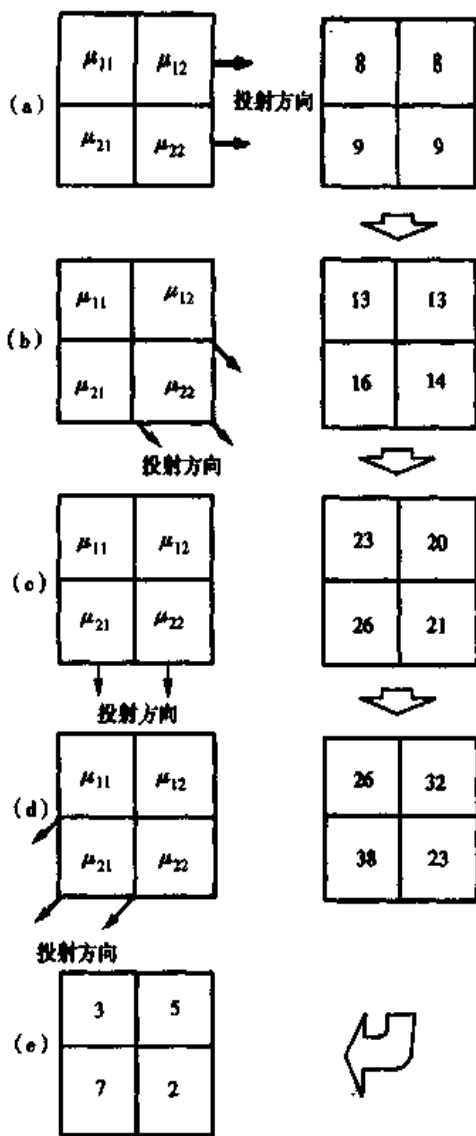


图 13-13  $2 \times 2$  矩阵反射投影法求解

联立方程法：图 13-12 (a) 是一个  $2 \times 2$  矩阵的简单层面。设体素的衰减系数分别为  $\mu_{11}$ 、 $\mu_{12}$ 、 $\mu_{21}$  和  $\mu_{22}$ 。由水平方向的两射线路径得出投影值  $p_1 = \mu_{11} + \mu_{12} = 8$ ， $p_2 = \mu_{21} + \mu_{22} = 9$ ；垂直方向得到  $p_1 = \mu_{11} + \mu_{21} = 10$ ， $p_2 = \mu_{12} + \mu_{22} = 7$ ，虽然可列出 4 个方程式，但其中仅有 3 个方程是独立的，无法求得层面各个体素衰减系数的解。因此，通常列出的方程数需多于  $n^2$  个。例如，再取一个左对角线方向的投影值，得  $p = \mu_{11} + \mu_{22} = 5$ 。解上述方程，得  $\mu_{11} = 3$ 、 $\mu_{12} = 5$ 、 $\mu_{21} = 7$  和  $\mu_{22} = 2$ ，见图 13-12 (b)。实际上一个层面的体素对应于荧光屏上图像的像素矩阵远不止  $2 \times 2$ ，常采用的有  $256 \times 256$ 、 $512 \times 512$  等矩阵。对于  $256 \times 256$  矩阵来说，用此法就得求解多于 65536 个联立方程的 65536 个未知数，运算量甚大，因而需要使用高速计算机才能完成。

反投影法：此法是把各向投影值沿投影反方向投影回矩阵里，然后把它们累加起来，经数学方法处理后，得到重建一幅图像的  $\mu$  值方阵。为了理解这种建像方法，我们仍用图 13-12 (a)  $2 \times 2$  矩阵的特例加以说明。如图 13-13 (a)，开始时体素的  $\mu$  值为未知，水平方向的投影值为  $p_1 = 8$ 、 $p_2 = 9$ ，反投影法将这些数值放入两射线所穿过的体素格内。假如第二个方向与水平方向成  $45^\circ$ ，如图 13-13 (b)，此时的投影值为  $p_1 = 5$ 、 $p_2 = 5$ 、 $p_3 = 7$ ，并将这些数值叠加到对应的体素格内。第三个方向是垂直投影，其投影值  $p_1 = 10$ 、 $p_2 = 7$ ，将这些数值反投影叠加后，得到一个新的总数，见图 13-13 (c)。第四个方向的投影如图 13-13 (d)，其投影值为  $p_1 = 3$ 、 $p_2 = 12$ 、 $p_3 = 2$ ，将这些数值加到体素格内而得到最终的总数为 26、32、38 和 23。为了提高图像的对比度，需将这些数作最后一个步骤处理，即把每个体素格内的数减去一个底数 17，并除以 3，使各体素降低到一个最简单的比例，结果是 3、5、7 和 2。由此法得到的结果与联立方程法得到的一样。

**3. X-CT 扫描机** X-CT 扫描机主要是由 X 射线管与探测器组成的扫描系统。从探测器的排列和移动方式的不同，出现了多种形式的 CT 机，按其扫描方式大致可分为六种。

单束扫描(称第一代 CT 机)：它是由一个 X 射线管和一个探测器组成的扫描系统，射线束经准直器对准探测器，扫描时由 X 射线管和探测器对观测层面作第一次

平移扫描(如图 13-14 所示),得到一组(例如 160 个)投影值。然后围绕层面,整个扫描系统旋转  $1^\circ$ ,作第二次平移扫描,获得另一组投影值。再转动  $1^\circ$ ,作第三次平移扫描。直到旋转  $180^\circ$ ,总共取得  $180 \times 160 = 28800$  个投影值。第一代 CT 机采用单束扫描,图像矩阵取  $160 \times 160 = 25600$ ,显然用 28800 个方程求解 25600 个未知数是足够了。这种扫描运动是平移加旋转,单帧影像扫描时间需 5 分钟,时间较长,仅能用于头部检查。

窄角扇束扫描(称第二代 CT 机):为减少扫描时间,提高成像速度,初时将 X 射线束准直成几个笔状束,分别对准几个探测器。但随着探测器的增多而难以一一对准,于是采用扇形线束,其张角有  $10^\circ$  等,分别对准 20 个探测器(见图 13-15)。扫描动作与单束扫描方式相同,可缩短平移路程,减少旋转角度,用这种方法作全身扫描,单帧影像需时 20s,但对腹部扫描仍嫌太长。

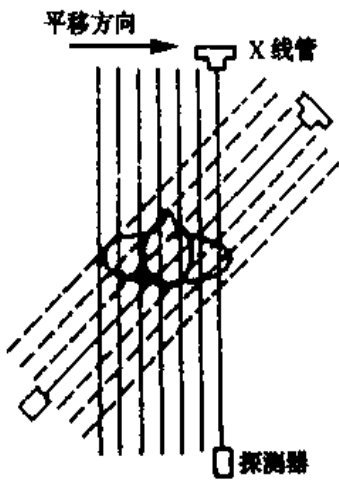


图 13-14 平移和转动扫描程序

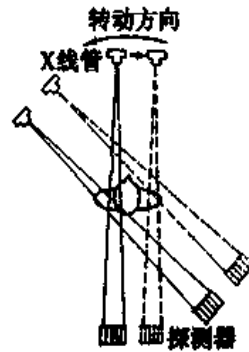


图 13-15 窄束扇形扫描



图 13-16 广角扇形扫描

广角扇束扫描(称第三代 CT 机):窄束扫描仍需平移和旋转运动,限制了扫描速度的提高。第三代 CT 机采用广角扇形 X 射线束,其张角可达  $30^\circ \sim 45^\circ$ (如图 13-16 所示),探测器多达 300 ~ 450 个。这种扫描方式取消了平移运动,X 射线管和探测器组作为一个整体,只绕病人作旋转运动,从而进一步缩短扫描时间,单帧影像可缩短到 2 秒,是目前 X-CT 机采用的主要扫描方式。

固定-旋转广角扇束扫描(称为第四代 CT 机):这种扫描机把探测器的数量增加到 1500 个左右,扫描时探测器固定不动,X 射线管可以更高的速度进行扫描。单帧扫描时间可缩短到 2s 以内。

动态空间扫描(称第五代 CT 机):扫描装置由 28 个 X 射线管排成半圆形和与之相对应的 28 个影像增强器组成,是一种取消机械运动的全电子控制的扫描系统,称为动态空间重现技术(DSR)。该装置能获得心脏和肺等动态的图像。

电子束扫描(称第六代 CT 机):在一个巨大钟形 X 射线管内,顶端电子枪发射的电子束经两次磁偏转,撞击在钟形边沿的圆形靶上,电子束以高速进行  $360^\circ$  旋转扫描,从圆形靶的不同位置发射出旋转的扇形 X 射线束,并采用双列探测器阵列收集扫描数据。

螺旋扫描 CT 是近几年推出的新机型，就其扫描方式而言，仍属第三代。它采用滑环技术解决了高压电缆随 X 射线管连续旋转而缠绕的问题，使扫描速度大大提高。传统方式扫描时，X 射线管围绕人体作往返圆周运动。螺旋方式扫描时，是在床面匀速运动的同时，球管绕人体连续旋转，球管相对人体而言经历一螺旋形路径，故称螺旋扫描。扫描过程中探测器可连续采集数据，一次扫描十几个层面只需几秒钟。

#### 4. CT 值和窗口技术

像素的 CT 值：一幅 X-CT 图像是由一定数量由黑到白的不同灰度小方块，按矩阵排列方式组成，这些小方块称为像素，其灰度与观测层面相对应体素的衰减系数大小有关。但在图像重建过程中，并不直接运用衰减系数来进行处理，而是用与此有关且能表达组织密度的合适数值来反映，这一数值叫像素的 CT 值。实际上，它是将待检体的衰减系数  $\mu_{待}$  与水的衰减系数  $\mu_{水}$  作为比值计算，并以骨和空气的衰减系数分别作为上下限进行分度。CT 值的计算公式为

$$CT \text{ 值} = K \frac{(\mu_{待} - \mu_{水})}{\mu_{水}} \quad (13-14)$$

式中 K 在多数 CT 机中规定为 1000，单位是 Hu。我们知道，水的衰减系数  $\mu_{水} = 1$ ，空气的衰减系数  $\mu_{气} = 0.0013$ ，骨的衰减系数  $\mu_{骨} = 2.0$ ，从式(13-14)可计算出水的 CT 值 = 0 Hu。空气的 CT 值 = -1000 Hu，而骨的 CT 值 = 1000 Hu，其他人体组织的 CT 值介于 -1000 ~ 1000Hu 之间。衰减系数大于水的物质 CT 值为正，小于水的物质 CT 值为负。

窗口技术：人体组织的 CT 值范围大致可分成 2000 个等级，但人眼无论如何也分辨不出如此微小的灰度差别。所以一般黑白电视显像管(CRT)，由黑到白分为 10 ~ 30 个灰度等级或灰阶，已能满足人眼对灰阶的分辨能力。设荧光屏上的图像是由 10 个灰度来反映 2000 个分度，则图像能被分辨的 CT 值是 200 Hu，即两组织的 CT 值相差 200Hu 以下时，就不可能加以分辨。为了提高图像的分辨率，在 CT 成像中，常把感兴趣部位的对比度增强，无关紧要部位的对比度压缩，使 CT 值差别小的组织能得到

分辨，这一工作称为窗口技术。即把某一段 CT 值扩大到整个 CRT 的灰度等级。常用窗宽表示 CRT 所显示的 CT 值范围；用窗位表示 CRT 所显示的中心 CT 值位置。窗宽的上限和下限所包含的范围叫窗口，依窗口的设置，组织的 CT 值比设置的窗口上限高的在图像显示中为白色，比窗口下限低的为黑色，介于窗口上下之间的组织就形成灰度不同的图像。例如图 13-17 (a) 中，图面的像素每相差 200 个 CT 值为一个灰度等级，图像中病变细节难以分辨。但如所检查部位组织的 CT 值在 -200 ~ 300Hu 之间，

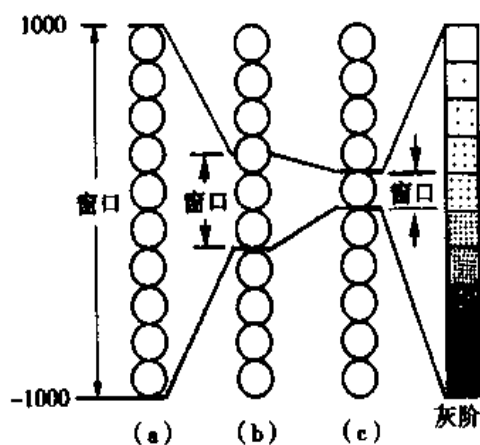


图 13-17 窗口技术示意图

窗口的上限为 300 Hu, 下限为 -200 Hu, 则 -200 ~ 300 Hu 叫窗口, 此时窗宽为 500Hu, 窗位选定在 50Hu。这样被检查部位每 40 个 CT 值表示一个灰度等级, 见图 13-17 (b)。若图面仍不能判断病变细节, 可改变窗位和进一步压缩窗宽, 如图 13-17 (c), 其窗位为 100 Hu, 窗宽为 200 Hu, 窗口上限为 200 Hu, 下限为零, 即每一个灰度等级相当于 20 个 CT 值。从上面的例子说明图像可分辨的细节与窗口上、下限差值有关, 大窗口图像可分辨的细节少, 但图面的可见度具有较宽的 CT 值范围。而小窗口可提高图像的分辨率, 突出难以分辨的病变细节, 提高病变的确诊率。可见正确使用窗口技术在观察 CT 图像和拍摄 CT 照片时是非常重要的。

图像显示: 当 X 射线管与探测器作同步平移和旋转或只作旋转进行扫描时, 可得到被观测层面的一系列投影值信号, 经模-数(A/D)转换成数字信号后, 输入计算机中央处理系统(CPU), 它按照一定的图像重建方法, 经快速运算得到层面各体素  $\mu$  的相对值, 这些原始数据再由计算机按层面体素矩阵与 CRT 像素矩阵一一对应进行排列组合及数学处理, 得出可在荧光屏上显示图像的数据。数据可存入磁盘, 然后经 D/A 转换成模拟信号, 加在电视显像管的控制栅极(或阴极), 依 CPU 的指令, 由电视扫描系统把观测层面的图像显示在荧光屏上。若利用各个层面的图像数据及三维成像软件还可显示脏器的立体影像。

X-CT 从根本上解决了常规摄影、透视及体层摄影中存在的影像重叠问题, 医生可看到人体各种器官和骨骼的断层影像及形态, 并能分辨出密度相差很小的组织, 从而判断病变的部位、形态和性质。为了使病变和正常组织的密度吸收区别更明显, 可使用造影剂(碘类化合物)进行增强扫描。目前使用的 X-CT 机几乎能诊断人体各个部位的疾病, 尤其对识别良性或恶性肿瘤, 具有较高的确诊价值。X-CT 是临床诊断的重要设备之一。

### 思考题与习题十三

- 13-1 产生 X 射线的必要条件是什么?
- 13-2 一连续工作的 X 射线管, 工作电压是 250 kV, 电流是 40mA, 假定产生 X 射线的效率是 0.7%, 问靶上每分钟会产生多少热量? (595.8 kJ)
- 13-3 什么是 X 射线的强度? 什么是 X 射线的硬度? 如何调节?
- 13-4 什么是韧致辐射? 连续 X 射线谱中的最短波长是如何产生的?
- 13-5 标识 X 射线是如何产生的? 它与光学光谱的产生有何不同?
- 13-6 设 X 射线机的管电压为 80 kV, 计算光子的最大能量和 X 射线的最短波长。  
(80KeV, 0.0155 nm)
- 13-7 X 射线有哪些基本性质? 这些基本性质在 X 射线的应用上各有何意义?
- 13-8 一束 X 射线, 在晶格常数为 0.281 nm 的单晶体氯化钠的天然晶面上反射, 当掠射角一直减少到  $4.1^\circ$  时才观察到镜反射, 试确定该反射 X 射线的波长。 (0.04 nm)
- 13-9 X 射线被衰减时, 要经过几个半价层, 强度才减少到原来的 1%? (6.6)
- 13-10 设密度为  $3\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$  的物质对于某单色 X 射线束的质量衰减系数为  $0.03\text{cm}^2\cdot\text{g}^{-1}$ , 求该射线束分别穿过厚度为 1mm、5mm 和 1cm 的吸收层后的强度为原来强度的百分数。  
(99.1%, 95.6%, 91.4%)

13-11 对波长为  $0.154\text{nm}$  的射线，铝的衰减系数为  $132\text{cm}^{-1}$ ，铅的衰减系数为  $2610\text{cm}^{-1}$ 。要和  $1\text{mm}$  厚的铅层得到相同的防护效果，铝板的厚度应为多大？ (19.8 mm)

13-12 滤线板对 X 射线能起什么作用？当同时使用两种不同物质制作的滤线板时，应按什么顺序放置？为什么？

13-13 X-CT 与常规 X 射线摄影的成像方法有何不同？

13-14 X-CT 图像说明被观测层面的什么物理量的二维分布？

13-15 设有一个  $2 \times 2$  图像矩阵，其中像素的 CT 值为 5、7、6、2，试用反投影法重建该图像矩阵。

13-16 某波长的 X 射线通过水时的衰减系数为  $0.77\text{cm}^{-1}$ ，通过某人体组织时的衰减系数为  $1.02\text{cm}^{-1}$ ，K 值为 1000，水的 CT 值等于零，求此人体组织的 CT 值。 (324.5 Hu)

13-17 什么叫窗宽？若窗宽为 400Hu 和 800Hu，则图像矩阵中像素可识别的灰度差所对应的 CT 值分别是多少？设黑白显示器荧光屏的灰度可分为 16 个等级。 (25Hu, 50Hu)

13-18 什么叫窗位？若窗宽为 500Hu，窗口上限为 400Hu，则窗位为多少？可观测的 CT 值范围是多少？ (150 Hu, -100 Hu ~ 400 Hu)

(冀 敏)

## 第十四章 原子核和放射性

---

学习本章后，你应：

---

1. 了解原子核的基本性质和原子核的衰变类型。
  2. 掌握原子核的衰变规律和应用。
  3. 理解射线与物质相互作用的几种形式。
  4. 理解射线剂量的定义及射线的防护方法。
  5. 了解放射性核素在医学上的应用和基本粒子概念及分类。
- 

### 第一节 原子核的基本性质

#### 一、原子核的组成

1. 原子核的电荷 原子核是原子的中心体，其重要特征之一是带正电，而且是旋转的，具有动量矩和磁矩，最小电量单位是电子电量  $e$  的整数倍。这个倍数和元素周期表中的原子序数  $Z$  是一致的。这个数值可从卢瑟福(Rutherford)的  $\alpha$  粒子散射实验中测得，或从伦琴射线谱的莫塞莱(Moseley)定律排列元素的次序得到。自然界中最高原子序数的元素是铀，它的原子序数是 92，带有 92 倍最小电量单位的正电荷，在周期表中排在 92 位。近年来人造元素其  $Z$  值超过 100。

2. 原子核的质量 原子核的另一重要特征是它的质量。原子的质量等于原子核的质量加核外全部电子的质量。原子的质量可用质谱仪精密地测定。表达原子质量的单位是把自然界中较丰富的碳原子质量定为 12 个单位，这样，每一个单位的质量是  $1.66054 \times 10^{-27} \text{ kg}$ ，称为统一原子质量单位(u)。在原子核物理学中，标记原子核用  ${}^A_Z X$ ，如氢核、氧核分别由  ${}^1_1\text{H}$ 、 ${}^{16}_8\text{O}$  表示。左上角的数值  $A$  代表质量数，左下角的数字为原子序数  $Z$ ，由于  $X$  已经反映  $Z$  的值，习惯上也写成  ${}^A X$ 。这个符号表达了原子核的两大特征：质量和电量。

3. 原子核的成分 原子核由质子(p)和中子(n)两种粒子组成。p 具有  $1.007277\mu$  的质量和 一个单位的电量；n 是具有  $1.008665\mu$  的质量、不带电的中性粒子。由于这两种粒子的质量近似等于  $1u$ ，所以原子核的质量数  $A$  是代表构成原子核的 p 和 n 两种粒子的总数， $Z$  代表核内 p 数，也代表原子核的电量。因此， $A-Z$  是核内的中子数  $N$ ，p 和 n 统称为核子。



**4. 核素、同位素、同质异能素和同量异位素** 原子核内的  $Z$ 、 $N$  和能量状态都相同的原子称为核素。原子量不同而化学性质相同的元素在化学元素周期表中处于同一位置，有相同的  $Z$ ，这种元素称为同位素，如氢有三种同位素：普通氢 $^1\text{H}$ 、氘 $^2\text{H}$ 和氚 $^3\text{H}$ 。氙  $\text{Xe}$  有 26 种同位素。 $Z$  和  $N$  相同而处于不同能量状态的核素，称为同质异能素，如 $^{99m}_{43}\text{Tc}$ 和 $^{99}_{43}\text{Tc}$ ，右(或左)上角加“m”，表示处于较高能级。 $Z$  不同的元素有相同的  $A$ ，这种原子称为同量异位素，如 $^{40}_{18}\text{Ar}$ 和 $^{40}_{20}\text{Ca}$ 。

## 二、原子核的性质

**1. 原子核的尺寸和密度** 原子核的形状近似球形，半径小于  $10^{-15}\text{m}$ 。实验显示各种原子核的半径  $R$  与原子质量数  $A$  有如下关系。

$$R = R_0 A^{1/3} \quad (14-1)$$

式中  $R_0$  是常数，其值约等于  $1.20 \times 10^{-15}\text{m}$ 。若原子核的体积  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ ，质量为  $M$ ，则其平均核密度  $\rho$  如下。

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R_0^3 A} = \frac{3}{4\pi R_0^3 NA} \quad (14-2)$$

式中  $NA = \frac{A}{M}$  是阿佛加德罗常数。由于原子核的体积与质量成正比，可见各种原子核的密度是均匀分布的。若把  $NA$  和  $R_0$  的数值代入(14-2)式，其  $\rho \approx 10^{17}\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ，可见原子核是物质紧密集中之处。

**2. 核力** 是什么原因使得  $n$  和  $p$  聚合在一起形成原子核呢？显然不可能是电磁力，更不是万有引力。实验表明，核内的核子之间存在一种特殊的相互作用力，这种力称为核力。核力主要有四种特征：①核力是一种“短程力”，只有当核子之间的距离在  $10^{-15}\text{m}$  数量级时才能显示出来；②核力是目前已知的最强的力；③核力具有“饱和”性，即一个核子只能与它紧邻的核子以核力相互作用；④核力的相互作用与核子的带电状况无关，即  $n$  与  $n$ 、 $n$  与  $p$  和  $p$  与  $p$  之间的核力在数值上大致相同。综上所述，可认为每个核子，无论是  $p$  或  $n$ ，都占有相同的体积，只能与紧邻的核子以核力相互吸引，大小基本相同，并与电荷无关，是最强的力。

**3. 核能级** 原子核和原子一样具有分立的能级，它可以处在不同的能量状态，称为原子核能级，在外界干扰下，可发生能级跃迁。

## 三、原子核的结合能及质量亏损

原子核是由核子组成，它的质量应等于全部核子质量之和，若以  $m_x$ 、 $m_p$  和  $m_n$  分别表示原子核 $^A\text{X}$ 、质子和中子的质量，应有如下关系。

$$m_x = Zm_p + (A - Z)m_n$$

但实验测定的  $m_x$  总是少于  $Zm_p + (A - Z)m_n$ ，其差值为  $\Delta m$ ，称为质量亏损。相对论指出：当系统有质量改变时，一定也有相应的能量改变，其关系为： $\Delta E = (\Delta m)c^2$ ，

显然  $\Delta E$  为

$$\Delta E = [Zm_p + (A - Z)m_n - m_x]c^2 \quad (14-3)$$

可见当 p 和 n 组成核时，有大量的能量放出，这能量称为原子核的结合能。根据相对论的质能关系，1u 的质量其能量为

$$1(u)c^2 = 1.66054 \times 10^{-27} \times (2.99792 \times 10^8)^2 = 1.49242 \times 10^{-10} \text{J}$$

再根据能量单位 eV 与 J 的关系换算得

$$1(u)c^2 = 931.494 \text{MeV}$$

结合能愈大，核子结合成核时放出的能量就愈多，核的结合就愈紧密，原子核愈稳定。原子核的结合能  $\Delta E$  随核子数  $A$  的增加而增加。相反若要使原子核分解成单个核子，外界必须给予和结合能等值的能量。但不同原子核稳定程度不一样，于是用每个核子的平均结合能  $\epsilon$  来说明，称为比结合能，其值等于原子核的结合能  $\Delta E$  与质量数  $A$  的比值，即  $\epsilon = \Delta E/A$ 。表 14-1 列出一些核素的原子质量及平均结合能。图 14-1 给出了不同核素的比结合能对核子数的曲线图。从图中可以看到  $A < 30$  的原子核， $\epsilon$  显示周期性变化，最大值的位置都在  $A$  为 4 的整数倍处； $A$  在 30 以上的原子核，核子的平均结合能变化不大，表明原子核的结合能  $\Delta E$  差不多与质量数  $A$  成正比，这个事实显示前面所说的核力具有饱和性；曲线中间高，两端低，说明中等质量的核结合得比较紧，它们的平均结合能约为 8.6MeV，较轻核 ( $A < 30$ ) 和重核 ( $A > 200$ ) 结合得较松。中子数和质子数基本相同的原子核，即中、质比为 1 时为稳定核素。中子数过多或过少的原子核都是不稳定的。当核子数大于 209 时，都不能组成稳定的核，这种原子核称为放射性核素，能放射出特定的射线，以调整中、质比，衰变为  $A$  值较低的稳定核。

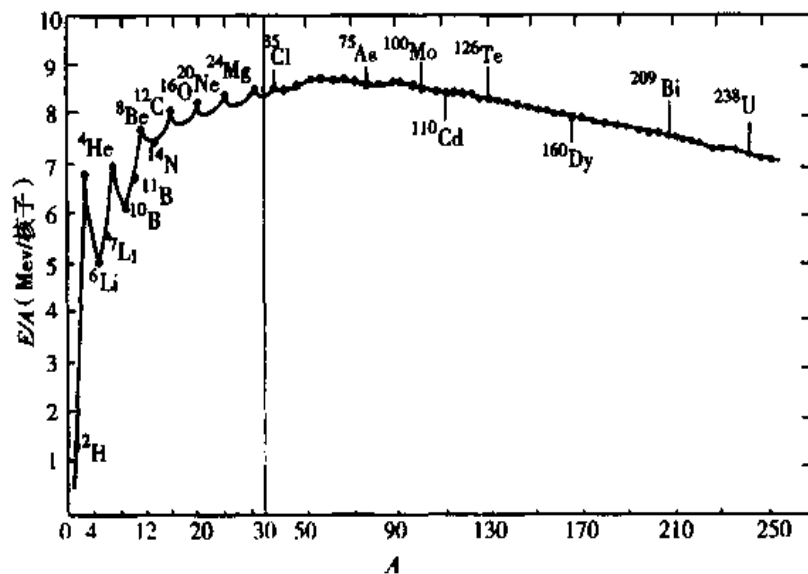


图 14-1 平均结合能曲线

表 14-1 一些核素的原子质量及平均结合能

| 核素               | 含量 %                       | 原子质量<br>( $\mu$ ) | 平均<br>结合能<br>(MeV) | 核素                | 含量 % | 原子质量<br>( $\mu$ ) | 平均<br>结合能<br>(MeV) |
|------------------|----------------------------|-------------------|--------------------|-------------------|------|-------------------|--------------------|
| $^1\text{H}$     | 99.985                     | 1.00782503        | —                  | $^{84}\text{Sr}$  | 0.56 | 83.913429         | 8.6775             |
| $^2\text{H}$     | 0.009 ~ 0.023              | 2.014102          | 1.1123             | $^{86}\text{Sr}$  | 9.8  | 85.909273         | 8.7084             |
| $^3\text{He}$    | $1.38 \times 10^{-4}$ (大气) | 3.016029          | 2.5727             | $^{87}\text{Sr}$  | 7.0  | 86.908890         | 8.7052             |
| $^4\text{He}$    | 99.99986                   | 4.002603          | 7.0729             | $^{88}\text{Sr}$  | 82.6 | 87.905625         | 8.7326             |
| $^6\text{Li}$    | 7.5                        | 6.015123          | 5.3323             | $^{89}\text{Y}$   | 100  | 88.905856         | 8.7139             |
| $^7\text{Li}$    | 92.5                       | 7.016004          | 5.6064             | $^{90}\text{Zr}$  | 51.5 | 89.904708         | 8.7100             |
| $^9\text{Be}$    | 100                        | 9.012182          | 6.4628             | $^{91}\text{Zr}$  | 17.1 | 90.005644         | 8.6934             |
| $^{10}\text{B}$  | 19.3                       | 10.012938         | 6.4751             | $^{92}\text{Zr}$  | 17.1 | 91.905039         | 8.6927             |
| $^{11}\text{B}$  | 80.2                       | 11.009305         | 6.3440             | $^{94}\text{Zr}$  | 17.4 | 93.906319         | 8.6668             |
| $^{12}\text{C}$  | 98.89                      | 12.000000         | 7.6802             | $^{96}\text{Zr}$  | 2.8  | 95.908272         | 8.6355             |
| $^{13}\text{C}$  | 1.11                       | 13.003355         | 7.4699             | $^{93}\text{Nb}$  | 100  | 92.906378         | 8.6642             |
| $^{14}\text{N}$  | 99.63                      | 14.003074         | 7.4757             | $^{92}\text{Mo}$  | 14.8 | 91.906818         | 8.6578             |
| $^{15}\text{N}$  | 0.366                      | 15.000109         | 7.6995             | $^{94}\text{Mo}$  | 9.3  | 93.905086         | 8.6624             |
| $^{16}\text{O}$  | 99.76                      | 15.994915         | 7.9763             | $^{95}\text{Mo}$  | 15.9 | 94.905838         | 8.6488             |
| $^{17}\text{O}$  | 0.038                      | 16.999131         | 7.7505             | $^{96}\text{Mo}$  | 16.7 | 95.904676         | 8.6541             |
| $^{18}\text{O}$  | 0.189 ~ 0.209              | 17.999159         | 7.7672             | $^{97}\text{Mo}$  | 9.6  | 96.906018         | 8.6352             |
| $^{19}\text{F}$  | 100                        | 18.998403         | 7.7788             | $^{98}\text{Mo}$  | 24.1 | 97.905405         | 8.6353             |
| $^{20}\text{Ne}$ | 90.51                      | 19.992449         | 8.0324             | $^{100}\text{Mo}$ | 9.6  | 99.907473         | 8.6047             |
| $^{21}\text{Ne}$ | 0.27                       | 20.993845         | 7.9719             | $^{203}\text{Te}$ | 29.5 | 202.972336        | 7.8862             |
| $^{22}\text{Ne}$ | 9.22                       | 21.991384         | 8.0806             | $^{205}\text{Tl}$ | 70.5 | 204.974410        | 7.8786             |
| $^{23}\text{Ne}$ | 100                        | 22.989770         | 8.1116             | $^{204}\text{Pb}$ | 1.42 | 203.973036        | 7.8801             |
| $^{24}\text{Mg}$ | 78.99                      | 23.985045         | 8.2607             | $^{206}\text{Pb}$ | 24.1 | 205.974455        | 7.8755             |
| $^{25}\text{Mg}$ | 10.00                      | 24.985839         | 7.8061             | $^{207}\text{Pb}$ | 22.1 | 206.975885        | 7.8700             |
| $^{26}\text{Mg}$ | 11.01                      | 25.982595         | 7.9427             | $^{208}\text{Pb}$ | 52.3 | 207.976641        | 7.8676             |
| $^{40}\text{Ar}$ | 99.6                       | 39.962395         | 8.5952             | $^{209}\text{Bi}$ | 100  | 208.980389        | 7.8386             |

## 第二节 原子核的衰变类型

核素有两大类，即放射性核素和稳定性核素。放射性核素又分为天然放射性和人工放射性核素(简称人造核素)。人造核素主要由反应堆和加速器制备。目前已知的元素有 107 种，而核素有 2000 多种，近 90% 是放射性核素。医用放射性核素均是人造核素，如  $^{131}\text{I}$ 、 $^{99\text{m}}\text{Tc}$  等。放射性核素能自发放出射线变为另一种核素，这种现象称为原子核衰变，简称核衰变。核衰变过程遵守电荷、质量、能量、动量和核子数守恒定律。下面讨论几种主要核衰变类型。

## 一、 $\alpha$ 衰变

质量数  $A > 209$  的重核发射  $\alpha$  射线, 变为  $A$  值较低的原子核, 这种衰变叫  $\alpha$  衰变。其过程可写成



式中  $X$  叫母线,  $Y$  叫子核,  $Q$  为衰变能, 由母核放出的能量, 其值用两侧的原子质量差值计算, 不同核素  $Q$  值不同, 单位用 MeV。从式中可知衰变前后的核子数和电量数量守恒的。子核比母核的质量数  $A$  少 4, 电量数  $Z$  少 2, 在元素周期表中的位置比母核前称两位, 实际是  ${}^4_2\text{He}$  核。这就是  $\alpha$  衰变的位移法则。 $\alpha$  衰变过程放出的能量主要反映在  $\alpha$  粒子的动能, 子核的动能很小。 $\alpha$  粒子以很高的速度从核中飞出, 受物质所阻而失去动能, 捕捉两个电子变成一个中性氦原子。原子核发生  $\alpha$  衰变时, 子核一般处于基态, 也有处于激发态。且

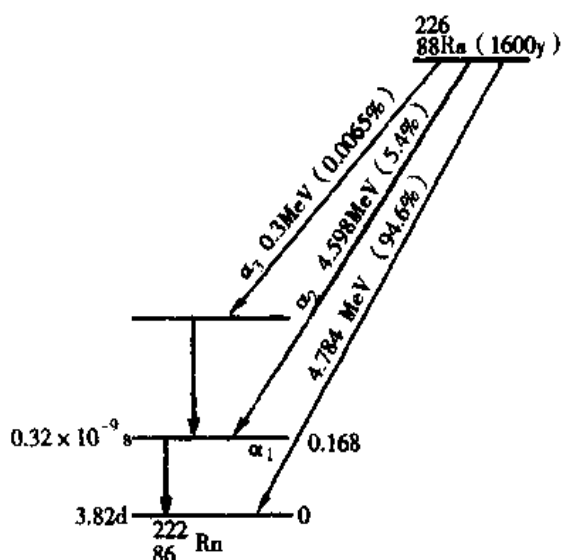
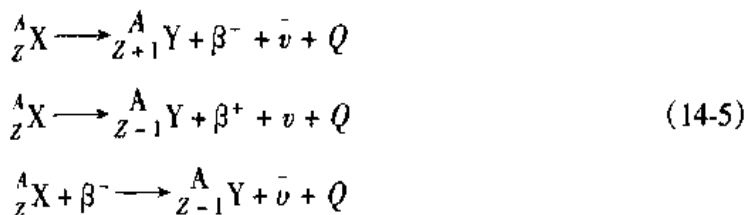


图 14-2  ${}^{226}_{88}\text{Ra}$  的衰变图

能量状态是分立的, 图 14-2 是  $\alpha$  衰变中能量分立和各种能量状态的百分比。如  ${}^{226}_{88}\text{Ra}$  是最早用于临床镭的衰变图, 图中说明放出能量为 4.784 MeV 的  $\alpha$  粒子后衰变到  ${}^{222}_{86}\text{Rn}$  的基态, 占 94.6%; 放出能量为 4.598 MeV 的  $\alpha$  粒子占 5.4%。同时还有占比例很小的其能量为 0.3 MeV, 这两种子  $\alpha$  粒子衰变到  ${}^{222}_{86}\text{Rn}$  是处于激发态, 在向基态跃迁时放出的能量为 0.186 MeV 的  $\gamma$  射线。

## 二、 $\beta$ 衰变

$\beta$  衰变是指一种核自发地变成另一种核, 其质量数  $A$  不变, 而原子序数  $Z$  在元素周期表中向前或后移一个位置, 有  $\beta^-$ 、 $\beta^+$  衰变和电子俘获三种类型, 可分别表示为



1.  $\beta^-$  衰变 是由母核放出电子的一种衰变, 式中  ${}^A_Z X$  和  ${}^A_{Z+1} Y$  代表母核和子核,  $\bar{\nu}$  称为反中微子, 它在衰变中与  $\beta^-$  粒子同时放射出的一种粒子, 不带电, 静止质量为零,  $Q$  为衰变能。原子核中并不存在电子, 而是在衰变时原子核中的一个中子放出

一个电子变为一个质子的过程，遵守位移法则。

2.  $\beta^+$ 衰变 在衰变过程中，原子核放出一个正电子，即原子核中一个质子放出一个正电子而变成中子，同时放射出一个中微子，遵守位移法则。从式中不管是 $\beta^-$ 或 $\beta^+$ 衰变都有三种产物，因此衰变时所放出的能量为三者共有，而且 $\beta$ 所携带的能量不是分立的，而是连续的 $\beta$ 能谱。图 14-3 给出了 $^{40}\text{K}$ 、 $^{30}\text{P}$ 和 $^{28}\text{Al}$ 的 $\beta$ 能谱图。其特点有： $\beta$ 粒子数按能量连续分布；每一种放射性物质的 $\beta$ 能谱有固定的上限能量和峰值；不同的放射性物质有不同形状的能量分布，且其上限能量和峰值也不相同。

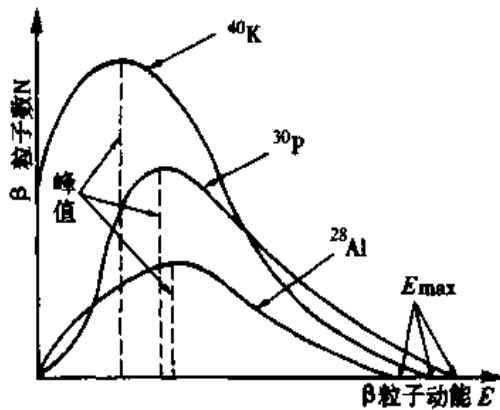


图 14-3  $^{40}\text{K}$ 、 $^{30}\text{P}$ 和 $^{28}\text{Al}$ 的 $\beta$ 能谱图

3. 电子俘获 原子核俘获核外电子，使核内的一个质子变为一个中子，电荷数变为 $Z-1$ ，这种衰变称为电子俘获。在电子俘获过程中，可能出现核更外层电子填补内层电子空位，而产生标识 X 射线或俄歇电子。俄歇电子是当高能级的电子跃迁至低能级，其多余的能量直接转移给同一能级的另一电子，

而不辐射 X 射线，接受这份能量的电子脱离原子，成为自由电子，这种电子叫俄歇电子。在核医学中计算核衰变，人体接收的剂量应考虑这一因素。

有些放射性核素在发生 $\beta$ 衰变和电子俘获后，子核可以处于激发态，于是有 $\gamma$ 射线伴随发射。由于从原子核中发射出来的正电子，很快与周围的电子结合形成两个能量为 $0.511\text{MeV}$ 、传播方向相反的 $\gamma$ 射线，检测这两个射线可用于确定 $\beta^+$ 衰变核素的位置，将在正电子发射型计算机断层成像中介绍。

### 三、 $\gamma$ 衰变和内转换

$\alpha$ 和 $\beta$ 衰变后的子核大部分处于激发态，并以 $\gamma$ 射线的形式释放能量，跃迁到较低的能量或基态，这种跃迁叫 $\gamma$ 衰变。在核医学中使用的 $^{60}\text{Co}$ 、 $^{99}\text{Tc}^m$ 等放射源均有 $\beta$ 和 $\gamma$ 射线发射。图 14-4 为核衰变示意图，叫衰变图，核素衰变图已汇编成册，供使用时查阅。图中横线表示核能级，最低一横线表示基态，在它上面的横线表示激发态，图中右侧的数字为能级的能量 MeV，左侧的数字为半衰期。

处于激发态的原子核还有另一种释放能量的方式，即原子核由激发态回到基态时，并不发射 $\gamma$ 射线而是把全部能量交给核外电子，使其脱离原子的束缚而成为自由电子，这一过程叫内转换，发射的电子叫内转换电子。这里要注意的是不能将内转换过程理解为内光电效应，即不能认为是原子核先放出电子，然后再与核外轨道电子发生光电效应，这是因为发生内转换概率远大于发生内光电效应。另外无论是电子俘获还是内转换过程，由于原子的内壳层缺少电子而出现空位，外层电子将会填充这个空位。因此这两个过程都将伴随着标识 X 射线和俄歇电子的发射。

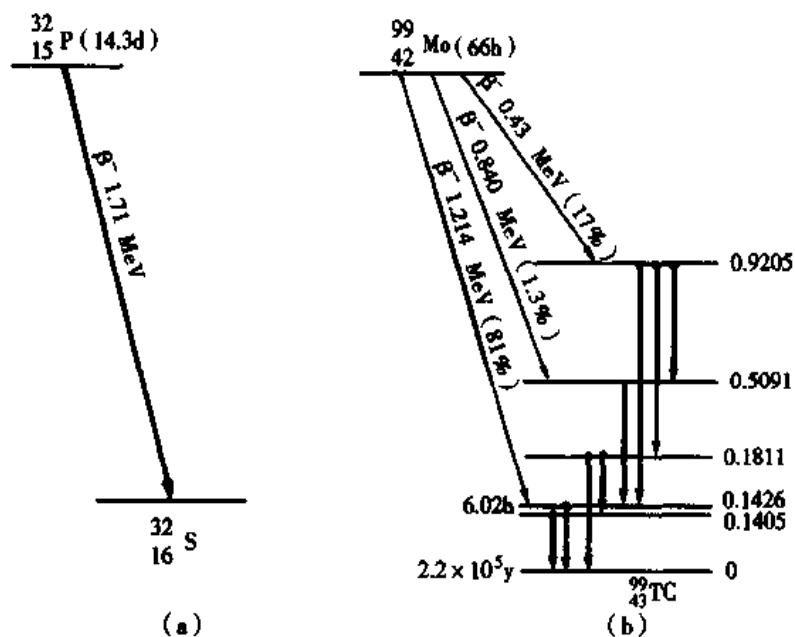


图 14-4  
(a)  $^{32}_{15}\text{P}$  的衰变图 (b)  $^{99}_{42}\text{Mo}$  的衰变图

### 第三节 原子核的衰变规律

#### 一、衰变规律

核衰变是原子核自发变化的过程，但每个核并不是同时发生衰变，而且无法预知哪一个核先衰变和哪一个核后衰变。但在大量原子核组成的放射性物质中，其衰变服从统计规律。下面只考虑一种放射性核素在衰变时，在  $t \rightarrow t + dt$  时间内，因衰变而减少的原子核数  $dN$  与  $t$  时刻未衰变的原子核数  $N$  成正比，即

$$-dN = \lambda N dt \quad (14-6)$$

式中左边的负号表示原子核在减少， $\lambda$  称为衰变常数，其值反映放射性核素随时间衰变的快慢。对上式进行积分，便可得到  $t$  时刻原子核数  $N$  与  $t=0$  时原子核  $N_0$  之间的关系

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \quad (14-7)$$

值得注意的是，一种核素能够进行几种类型的衰变，或子核可能处于几种不同的状态，则对应于每种衰变类型和子核状态，有各自的衰变常数  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ，式中的  $\lambda$  应是各衰变常数之和，即  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$ 。式(14-7)是放射性物质衰变的基本定律，它说明放射性核素衰变服从指数规律。

#### 二、半衰期

半衰期也是用来表示放射性核数衰变快慢的物理量，定义为放射性核素减少一半所需的时间，用符号  $T$  表示。在式(14-7)中，当  $t = T$ ， $N = N_0/2$  代入后，得  $T$  和  $\lambda$  的关系为

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0.693}{\lambda} \quad (14-8)$$

单位用 s、对半衰期长的核素用分(min)、小时(h)、天(d)和年(y)。经过一个  $T$  后，其放射性核素衰减到原来的  $1/2$ 。两个  $T$  后衰减到原来的  $1/4$ ，依此类推，经过  $n$  个  $T$  后，将衰减到原来的  $(1/2)^n$ 。将式(14-8)代入式(14-7)得到

$$N = N_0 \left( \frac{1}{2} \right)^{t/T} \quad (14-9)$$

当放射性核素引入动物体内时，其原子核的数量除按前述的规律衰变而减少外，还应考虑通过生物代谢而排出体外，使体内的放射性数量减少比单纯的衰变要快。若用上述的  $\lambda$  代表的物理衰变常数， $\lambda_b$  代表单位时间内从体内排出的原子核数与当时存在的原子核数之比，则放射性核素的排出率，称为生物衰变常数，于是  $\lambda_e = \lambda + \lambda_b$ ， $\lambda_e$  称为有效衰变常数。三种衰变常数的半衰期分别为有效半衰期  $T_e$ 、物理半衰期  $T$  和生物半衰期  $T_b$ ，三者的关系为  $1/T_e = 1/T + 1/T_b$ ，得

$$T_e = \frac{TT_b}{T + T_b} \quad (14-10)$$

可见  $T_e$  比  $T$  和  $T_b$  都短。

平均寿命  $\bar{T}$  是指放射性核平均生存的时间。从(14-7)式知，在  $t \rightarrow t + dt$  时间内衰变的核数  $dN = -\lambda N dt$ ，它们的寿命为  $t$ ， $t$  可以是 0 到  $\infty$  之间，故  $N_0$  个原子核的平均寿命为

$$\begin{aligned} \bar{T} &= \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} dN \cdot t = \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} -\lambda N dt \cdot t \\ &= -\frac{\lambda}{N_0} \int_0^{\infty} N e^{-\lambda t} \cdot t dt = \frac{1}{\lambda} = 1.44T \end{aligned} \quad (14-11)$$

$\bar{T}$  为  $\lambda$  的倒数，约比  $T$  大 50%。表 14-2 列出一些放射性核素的衰变类型和半衰期。值得注意的是上述的衰变规律是一个统计规律，当放射性样品实际衰变的原子核个数足够多时，其结果就会愈接近趋于准确。

表 14-2 一些放射性核素的衰变类型和半衰期

| 核素                    | 衰变类型                             | 半衰期     | 核素                       | 衰变类型                              | 半衰期     |
|-----------------------|----------------------------------|---------|--------------------------|-----------------------------------|---------|
| $^3_1\text{H}$        | $\beta^-$                        | 12.33y  | $^{85}_{36}\text{Kr}^m$  | $\beta^-$ (79%)<br>$\gamma$ (27%) | 4.48h   |
| $^{11}_6\text{C}$     | $\beta^+$ (99.75%)<br>EC (0.24%) | 20.4min | $^{90}_{38}\text{Sr}$    | $\beta^-$                         | 28.8y   |
| $^{14}_6\text{C}$     | $\beta^-$                        | 5730y   | $^{99}_{42}\text{Mo}$    | $\beta^-$ , $\gamma$              | 66h     |
| $^{18}_9\text{F}$     | $\beta^+$ (96.9%)<br>EC (3.1%)   | 15h     | $^{99}_{43}\text{Tc}^m$  | $\gamma$                          | 6h      |
| $^{24}_{11}\text{Na}$ | $\beta^-$ , $\gamma$             | 15h     | $^{113}_{49}\text{In}^m$ | $\gamma$                          | 99.5min |
| $^{28}_{12}\text{Mg}$ | $\beta^-$ , $\gamma$             | 21h     | $^{113}_{50}\text{Sn}$   | EC, $\gamma$                      | 115d    |
| $^{32}_{14}\text{Si}$ | $\beta^-$                        | 650y    | $^{125}_{53}\text{I}$    | EC, $\gamma$                      | 60d     |

续表

| 核素                      | 衰变类型                                       | 半衰期                        | 核素                     | 衰变类型   | 半衰期                        |
|-------------------------|--|----------------------------|------------------------|--|----------------------------|
| $^{32}_{15}\text{P}$    | $\beta^-$                                  | 14.3d                      | $^{131}_{53}\text{I}$  | $\beta^-, \gamma$                                  | 8.04d                      |
| $^{38}_{17}\text{Cl}$   | $\beta^-, \gamma$<br>$\beta^-$ (89.33%)    | 37.3min                    | $^{137}_{55}\text{Cs}$ | $\beta, \gamma$                                    | 30y                        |
| $^{40}_{19}\text{K}$    | EC (10.67%), $\gamma$<br>$\beta^+$ (0.001) | $1.28 \times 10^9\text{y}$ | $^{169}_{70}\text{Yb}$ | EC, $\gamma$                                       | 32d                        |
| $^{51}_{23}\text{Cr}$   | EC, $\gamma$                               | 27.7d                      | $^{198}_{79}\text{Au}$ | $\beta^-, \gamma$                                  | 2.7d                       |
| $^{57}_{26}\text{Fe}^m$ | $\gamma$                                   | $1.1 \times 10^{-7}$       | $^{203}_{80}\text{Hg}$ | $\beta^-, \gamma$                                  | 46.8d                      |
| $^{59}_{26}\text{Fe}$   | $\beta^-, \gamma$                          | 44.6d                      | $^{201}_{81}\text{Tl}$ | EC, $\gamma$                                       | 73h                        |
| $^{57}_{27}\text{Co}$   | $\beta^+, \gamma$                          | 270d                       | $^{210}_{86}\text{Rn}$ | $\alpha$ (96%), $\gamma$<br>EC (4%)                | 8.3h                       |
| $^{60}_{27}\text{Co}$   | $\beta^-, \gamma$                          | 5.27y                      | $^{222}_{86}\text{Rn}$ | $\alpha, \gamma$                                   | 3.8d                       |
| $^{67}_{31}\text{Ga}$   | EC, $\gamma$                               | 78h                        | $^{226}_{88}\text{Ra}$ | $\alpha, \gamma$                                   | 1600y                      |
| $^{68}_{31}\text{Ga}$   | $\beta^+$ (90%)<br>EC (10%), $\gamma$      | 68min                      | $^{233}_{92}\text{U}$  | $\alpha, \gamma$ 自发裂变<br>( $1.3 \times 10^{-12}$ ) | $1.59 \times 10^5$         |
| $^{68}_{32}\text{Ge}$   | EC   | 288d                       | $^{235}_{92}\text{U}$  | $\alpha, \gamma$ 自发裂变<br>( $2 \times 10^{-9}$ )    | $7.04 \times 10^8\text{y}$ |
| $^{71}_{32}\text{Ge}$   | EC   | 11d                        | $^{236}_{92}\text{U}$  | $\alpha, \gamma$ 自发裂变<br>( $10^{-9}$ )             | $2.34 \times 10^7\text{y}$ |
| $^{75}_{34}\text{Se}$   | EC, $\gamma$                               | 114d                       | $^{238}_{92}\text{U}$  | $\alpha, \gamma$ 自发裂变<br>( $0.5 \times 10^{-6}$ )  | $4.47 \times 10^8\text{y}$ |

### 三、放射性活度

常用单位时间内衰变的原子核数来表示放射性强度，或叫放射性活度，用  $I$  表示。

$$I = -\frac{dN}{dt} = \lambda N = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = I_0 e^{-\lambda t} \quad (14-12)$$

式中  $I$  和  $I_0$  分别表示  $t$  时刻和初始时刻的放射性活度。放射性活度的国际单位是贝可勒尔 (Becquerel, Bq),  $1 \text{ Bq} = 1 \text{ 衰变/秒}$ , 其衍生单位有 MBq、GBq 和 TBq。在此之前, 放射性活度单位用居里 (Curie, Ci) 表示。  $1 \text{ Ci} = 3.7 \times 10^{10} \text{ Bq} = 3.7 \times 10^4 \text{ MBq} = 3.7 \times 10 \text{ GBq} = 3.7 \times 10^{-2} \text{ TBq}$ 。



【例题 18-1】 设一台 $^{60}\text{Co}$   $\gamma$ -刀初装时的总活度为 6040Ci，使用 5 年后，钴源活度还剩相当于多少 Bq？其平均寿命为多少年？

解：将 $^{60}\text{Co}$ 的半衰期  $T = 5.27\text{y}$ ， $I_0 = 6040\text{Ci} \approx 224\text{TBq}$ ， $t = 5\text{y}$  代入(14-12)式，得 5y 后钴源的总活度

$$I = I_0 e^{-\lambda t} = 224 \times \exp\left(-\frac{0.693}{5.27} \times 5\right) = 116\text{TBq}$$

平均寿命  $\bar{T} = -1.44T = 7.6\text{y}$

在放射治疗中常用放射性比活度，是指单位质量放射源的放射性活度，其单位是  $\text{Bq} \cdot \text{g}^{-1}$ ，它是衡量放射性物质纯度的指标。任何放射性物质不可能全部由该种物质组成，而是由相同物质的稳定同位素所稀释，还可能含有与放射性元素相化合的其他元素的一些稳定同位素和有衰变的子核。含其他核素少的，放射性比活度就高，反之则低。

#### 四、放射性平衡

自然界里的一些重元素往往发生一系列连续的衰变而形成所谓放射族或放射系。天然存在的放射族有铀族、钍族和锕族，它们都是从一个长寿命的核素开始，这个起始的核素称为母体，这些母体的半衰期都很长，有些可和地质年代相比拟。如铀族：母体是 $^{238}\text{U}$ ，半衰期  $T = 4.51 \times 10^9\text{y}$ ，经过 8 次  $\alpha$  衰变和 6 次  $\beta^-$  衰变最后生成稳定的 $^{206}\text{Pb}$ ；钍族：母体是 $^{232}\text{Th}$ ，半衰期  $T = 1.4 \times 10^{10}\text{y}$ ，经 6 次  $\alpha$  衰变和 4 次  $\beta^-$  衰变，最后达到稳定的 $^{208}\text{Pb}$ ；锕族：母体是铀的同位素 $^{235}\text{U}$ ，半衰期  $T = 7.04 \times 10^8\text{y}$ ，又叫锕铀(AcU)：经 7 次  $\alpha$  衰变和 4 次  $\beta^-$  衰变，最终生成铅同位素 $^{207}\text{Pb}$ 。在上述放射族中都存在母体衰变为子体，再衰变为第三、第四代子体等，各代衰变快慢相差很大。对母体来说其数量决定于自己衰变快慢，但对于子体来说就要复杂得多，这是因为子体不断衰变为第三代核，另一方面又从母体的衰变中获得补充，这样，子体在数量上的变化不仅和它自己的衰变常数有关，而且也 and 母体的衰变常数有关。由于母体的衰变，子体的核数将逐渐增加，这些子体将按照自己的规律进行衰变。因为衰变率是与现有核数成正比的，所以随着子体的积累，子体每秒钟衰变的核数也将增加。经过一段时间后，子体每秒衰变的核数将等于它从母体衰变而得到补充的核数，子体的核数就不再增加，达到放射性平衡。

放射性平衡在放射性核素的应用中具有一定的意义。半衰期短的核素在医学应用中有很多优越性，但在供应上有很大困难，有些短寿命核素是由长寿命核素衰变产生的，当母体与子体达到或接近放射性平衡时，子体和母体的放射性活度相等。若把子体从母体分离出来，经过一段时间后，子体和母体又会到达新的放射性平衡，再把子体分离出来，又会再达到新的放射性平衡。这种由长寿命核素不断获得短寿命核素的分离装置叫核素发生器，俗称“母牛”(cow)，常用的“母牛”有 $^{99}\text{Mo} \rightarrow ^{99}\text{Tc}^m$ ， $^{68}\text{Ge} \rightarrow ^{68}\text{Ga}$ ， $^{226}\text{Ra} \rightarrow ^{222}\text{Rn}$  等。由于母体的寿命较长，一条“母牛”可以在较长时间供应短寿命核素，很适合远离同位素生产中心、交通不便的地方开展短寿命核素的应用工作。

## 第四节 射线与物质的相互作用

原子核在衰变过程中发出的各种射线通过物质时，都能与物质发生相互作用。研究这种作用可以了解射线的性质，射线产生的物理过程，射线对物质的影响及设计和研制射线探测装置。因此了解射线与物质相互作用的规律是进行射线探测、防护和分析，在医学中用射线进行诊断和治疗的重要基础。

### 一、带电粒子与物质的相互作用

1. 电离和激发  $\alpha$ 、 $\beta$  等带电粒子通过物质时，由于静电力的作用，使原子或分子中的电子获得能量，产生自由电子和正离子，合称为离子对，这一过程称为电离。若脱离出来的自由电子能量足够大，它又可以使其他原子电离，称为间接电离或次级电离。如果电子获得的能量不足以使它脱离原子，而只能使它由低能级跃迁到高能级，使原子处于激发态，这一过程称为激发。退激时释放出来的能量，可以光的形式发射出来或转变为热运动的能量。由于带电粒子的电离作用，当它通过物质路径周围将留下许多离子对，每厘米路径上产生的离子对称为电离比值或电离比度。它表示带电粒子电离本领大小，在生物体内表示对机体的损伤程度。电离比值和带电粒子的速度、电量和物质的密度有关。带电粒子的速度大、电离比值小；反之，速度小，电离比值大；带电粒子带的电量多，它与原子壳层电子的作用力大，电离比值就大，反之则小；物质的密度大，单位体积的电子数目多，与带电粒子的作用机会多，因而电离比值也大，这三种情况使粒子路径上产生的离子对增多。 $\alpha$  粒子所带的电量大于  $\beta$  粒，而速度比  $\beta$  粒子小，所以  $\alpha$  粒子的电离比值比  $\beta$  粒子大。能量为 1MeV 的  $\alpha$  粒子在空气中的电离比值约为每厘米  $4 \times 10^4$  离子对，而相同能量的  $\beta$  粒子则每厘米只有 50 离子对。由于它们的电离比值不同，其生物效应就有明显差异。

2. 散射和韧致辐射 当带电粒子通过物质时，因受到原子核静电场的作用而改变运动方向，这种现象称为散射。在发生散射前后，带电粒子的能量保持不变，称为弹性散射。若能量有部分损失，称为非弹性散射。 $\alpha$  比  $\beta$  粒子的质量大得多，散射不明显，其路径基本是一条直线，而  $\beta$  粒子因受原子核和电子的多次散射，路径是曲折的。带电粒子通过物质时，受到原子核的作用，速度急剧减少，这种带电粒子的一部分能量以光子的形式发射出来，称为韧致辐射，其实质就是连续 X 射线的发生机制。若与电离作用相比，粒子由于散射和韧致辐射所损失的能量要小得多。

3. 射程和吸收 带电粒子通过物质时，由于不断引起电离、激发、散射和韧致辐射，其能量将随着物质厚度的增加而减弱，以致完全丧失能量。这时若是  $\alpha$  粒子，则将吸收两个电子而成为氦原子； $\beta^-$  粒子则变成自由电子； $\beta^+$  粒子则会与自由电子结合而转变为两个光子。粒子在物质中通过的最大距离称为射程。带电粒子的能量损失与粒子能量和吸收体的性质有关，所以射程能比较直观地反映带电粒子贯穿本领的大小。用另一句话说，电离比值大，粒子的能量损失快，其射程短。 $\beta$  粒子的电离比值远小于  $\alpha$  粒子，其射程比  $\alpha$  粒子长得多，即  $\beta$  粒子的穿透本领比  $\alpha$  粒子强得多。

天然放射性核素发出的  $\alpha$  粒子，在空气中的射程为数厘米，在生物体内的射程只有几百个微米。而  $\beta$  粒子的射程要比  $\alpha$  粒子大得多，它在空气中可达到数米长，在生物体内为几毫米到几十毫米。

## 二、光子与物质的相互作用

X( $\gamma$ )射线统称为光子，是从原子核衰变中放射出来的，自身不带电，都是电磁波，它与物质相互作用机制与带电粒子不同，其作用方式主要有三种，分述如下。

1. **光电效应** 光子与物质相互作用，将其全部携带的能量交给一个壳层电子，使其脱离原子而成为自由电子，光子本身被物质吸收，这一过程叫光电效应，释放出来的电子主要是内壳层电子，叫光电子。它吸收光子的能量，除掉一部分用于克服电离能  $\epsilon_i$  外，其余能量  $(h\nu - \epsilon_i)$  转化为光电子的动能。值得说明的是内层电子释放后，在原子内壳层留下空位，较外层电子填补，则将发射标识 X 射线或俄歇电子。

2. **康普顿效应** 它的全称应叫康普顿-吴有训效应，是入射光束与物质原子较外层电子作用时，光子把部分能量传给电子，使其脱离原子成为反冲电子，而光子自身的能量减少，改变运动方向，这一过程称为康普顿效应，或康普顿散射。对光子束来说，由于散射作用，使光子束在原来进行方向的强度减弱。

3. **电子对产生** 当光子的能量大于  $1.022\text{MeV}$  时，光子在原子核场的作用下可能转化为一个电子和一个正电子，同时光子消失，这一过程称为电子对产生。这时光子的能量除转化为两个电子的静止质量外，其余的转化为正负电子的动能，其中一个电子成为物质中的自由电子的动能，而正电子则可能捕捉物质中的一个自由电子而产生电子对湮没。光子与物质作用的三种形式与光子的能量和物质的原子序数  $Z$  有关。用图 14-5 说明，从图中可见能量低的光子和高原子序数的物质，以光电效应为主；中等能量的射线以康普顿散射为主；电子对生成主要发生在高能光子和高原子序数的物质中，但在能量极高光子作用下，较低原子序数物质中，电子对生成也不可忽视。

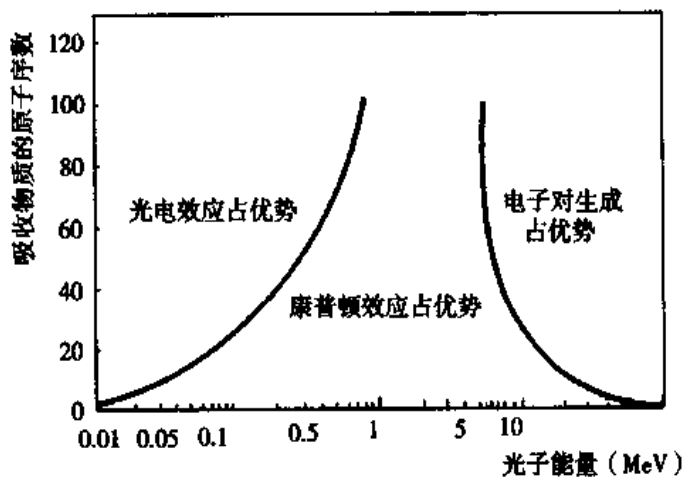


图 14-5 X( $\gamma$ )光子与物质相互作用的三种形式  
与光子能量、吸收物质  $Z$  的关系

### 三、中子与物质的相互作用

中子不带电，在物质中不直接引起电离而损失能量，它在物质中能穿行很长的距离。中子与物质的相互作用主要是受到原子核的散射或与原子核发生核反应。在中子与原子核发生碰撞时，将部分能量传递给原子核，并改变自身运动的方向和降低速度，引起原子核发生反冲，这种作用称为中子的弹性散射。能量低的中子与轻核相互作用主要是弹性散射，即反冲核愈轻，在弹性碰撞时得到的反冲能量愈多，中子损失的能量愈大，而且反应中生成的核素多数是稳定的。所以常用含氢多的水、石蜡等使中子减速，防护中子照射。由于中子不受库仑电场的阻碍，容易进入原子核，引起核反应，放射出各种次级射线，其反应前后的中子和原子核系统的总能量也就不再守恒，这种现象叫非弹性碰撞。能量大的(1MeV以上)中子与重核相互作用主要是非弹性碰撞。中子与原子核发生核反应，其反应的产物有稳定的核素和放射性核素，并伴随着各种射线产生。如原子核俘获中子，中子留在核内并发射 $\gamma$ 射线，这种反应叫中子俘获反应(n,  $\gamma$ )，其反应式写成 ${}^1_0\text{n} + {}^1_1\text{H} \longrightarrow {}^2_1\text{H} + \gamma$ ，简写为 ${}^1_0\text{n} + {}^1_1\text{H} \longrightarrow {}^2_1\text{H} + \gamma$ ； ${}^1_0\text{n} + {}^{23}_{11}\text{Na} \longrightarrow {}^{24}_{11}\text{Na} + \gamma$ ，简写为 ${}^{23}_{11}\text{Na}(\text{n}, \gamma){}^{24}_{11}\text{Na}$ 等。 ${}^{24}_{11}\text{Na}$ 是放射性核素，还将继续衰变。若中子留在核内而发射质子，叫电荷交换反应(n, p)，如 ${}^1_0\text{n} + {}^{14}_7\text{N} \longrightarrow {}^{14}_6\text{C} + \text{p}$ ，简写为 ${}^{14}_7\text{N}(\text{n}, \text{p}){}^{14}_6\text{C}$ 。此外还有中子留在核内发射 $\alpha$ 粒子，叫(n,  $\alpha$ )反应。中子与原子核反应的产物( $\alpha$ 、 $\beta$ 粒子和 $\gamma$ 射线等)都有电离作用，可导致生物组织的电离，有些放射性核素还可能较长时间滞留在人体内，造成组织损伤，所以中子对机体的危害是很大的。

### 第五节 辐射剂量与防护及测量原理

$\alpha$ 、 $\beta$ 粒子， $\gamma$ 和中子射线通过物质时，能直接和间接产生电离作用，统称为电离辐射。各种电离辐射都将使物质发生变化，称为辐射效应。人体组织吸收电离辐射能量后，会产生物理、化学和生物学的变化，导致生物组织的损伤，称为生物效应。这种效应的程度正比于生物体吸收的电离辐射的能量。因此，准确了解组织中吸收的电离辐射能量，对评估放射治疗的疗效及其副作用是很重要的，是进行放射治疗最基本的医学物理学知识。“剂量”是用来表示人体接受电离辐射的量。本节主要介绍剂量的概念、单位，放射防护的知识及测量剂量的原理和方法。

#### 一、辐射剂量及其单位

根据国际辐射单位和测量委员会(ICRU)1980年关于辐射量和单位的报告内容，着重介绍与放射治疗和防护有关的照射量及其单位。

##### 1. 照射量 X( $\gamma$ )射线的照射量定义为

$$E = dQ/dm \quad (14-13)$$

式中dQ是当射线在质量为dm的干燥空气中形成的任何一种符号(正或负)离子的总电量。E是照射量，单位为 $\text{C}\cdot\text{kg}^{-1}$ ，曾用单位为伦琴(R)， $1\text{R} = 2.58 \times 10^{-4} \text{C}\cdot\text{kg}^{-1}$ 。它是用来量度X( $\gamma$ )射线导致空气电离程度的一个物理量。根据定义，dQ中不包括

次级电子发生韧致辐射被吸收后产生的电离。在实际测量中,照射量也常提到在其他介质如水中的照射量。可以理解为在水介质中某一小体积单位用空气替代后测得的照射量,称为水中某点的照射量。照射率是指单位时间内的照射量,单位用  $C \cdot kg^{-1} \cdot s^{-1}$  或  $R \cdot s^{-1}$  表示。

2. 吸收剂量 电离辐射给予质量为  $dm$  的介质的平均授予的能量  $dE$ , 定义为

$$D = dE/dm \quad (14-14)$$

$D$  称为吸收剂量, 单位为  $J \cdot kg^{-1}$ , 专用名词称为戈瑞(Gy),  $1Gy = 1J \cdot kg^{-1}$ , 曾用单位为拉德(rad),  $1Gy = 100rad$ , 它是衡量单位质量受照射物质吸收辐射能量多少的一个物理量, 在辐射效应研究中很重要。因为辐射作用物质所引起的效应取决于该物质吸收的辐射能量。吸收剂量适用于任何类型和任何能量的电离辐射, 以及受照射的任何物质。由于在同样照射条件下, 不同物质, 像骨和软组织等吸收辐射能量的本领有差异, 所以在谈及吸收剂量时, 应该说明辐射类型、是什么物质和照射位置。单位时间内的吸收剂量称为吸收剂量率, 单位用  $Gy \cdot s^{-1}$ 。

3. 剂量当量 生物体内单位质量的组织, 从各种射线中吸收同样多能量, 所产生的生物效应有很大差别, 这是因为射线对细胞的损伤, 不但与它吸收的能量和产生的离子有关, 还与电离的密集程度有关。在射线路径上发生密集电离, 即高电离比值时, 细胞受到的伤害比稀疏电离, 即低电离比值时要大得多。 $X(\gamma)$ 射线的电离作用由二次电子射线产生, 而二次电子射线和  $\beta$ 射线的电离能力差不多, 都比较弱。因此, 在相同条件下吸收同样剂量的  $X(\gamma)$ 和  $\beta$ 射线所产生的生物效应基本相同。而  $\alpha$ 粒子和质子在路径上的电离密度比  $\beta$ 射线大得多, 即同样吸收剂量所产生的生物效应要强烈得多。中子射线的电离作用主要由反冲质子和核反应产物所产生, 而高能中子的生物效应几乎和带电重粒子射线同样强。高电离比值的射线比低电离比值的射线有着更高的生物效应, 故引入相对生物效应(RBE), 以比较不同辐射在引起生物效应方面存在的差异。根据射线的生物效应强烈程度, 引入一个称为品质因素(QF)的无量纲的量, 于是定义剂量当量<sup>①</sup>  $H$  如下:

$$H = D \times QF \quad (14-15)$$

表 14-3 射线的 QF

| 射线种类及能量范围                | QF (近似值) |
|--------------------------|----------|
| $X(\gamma)$ 射线           | 1        |
| $\beta^-$ 和 $\beta^+$ 射线 | 1        |
| 中子, 能量 < 10eV            | 5        |
| 100eV ~ 2MeV             | 20       |
| 2MeV ~ 20MeV             | 10       |
| > 20MeV                  | 5        |
| 质子, 能量 > 2MeV            | 5        |
| $\alpha$ 粒子, 重核          | 20       |

<sup>①</sup> 国际辐射防护委员会(International Commission on Radiological Protection, ICRP)1990年出版物把剂量当量改用当量剂量(equivalent dose)  $H_m$ , 是指某一组织或脏器所接受的平均吸收剂量  $D_m$ , 经辐射权重因子(radiation weighting factor)  $\omega_R$  加权处理的吸收剂量,  $\omega_R$  表示辐射在小剂量照射时诱发随机性效应的 RBE 的数值,  $\omega_R$  值与 QF 值基本一致。

式中  $D$  的单位为 Gy, 为了区别于吸收剂量,  $H$  的单位在 SI 中用希沃特(Sv), 专用单位用雷姆(rem), 它们之间的关系:  $1\text{Sv} = \text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$ ,  $1\text{rem} = 0.01\text{Sv}$ , 即吸收剂量为 1rad 时的剂量当量。表 14-3 列出几种射线及 QF, 表中是以 X( $\gamma$ )射线作为比较标准。

上面介绍的剂量当量主要在辐射防护涉及的剂量范围内使用。

## 二、辐射防护

放射性核素在医学等领域的广泛应用, 使接触放射性核素的人日益增多, 因此在使用、保存和清除放射性废料时, 都应采取相应的措施, 以达到安全使用的目的。

**1. 最大容许剂量** 人在自然条件下会受到各种射线的照射, 这些射线来自宇宙和地球上的放射性物质, 可见受到一定剂量射线照射并不影响人体的健康。国际上规定经过长期积累或一次性照射后, 对机体既无损害又不发生遗传危害的最大容许剂量, 叫最大容许剂量(MPD)。对这一剂量各国规定并不完全相同, 我国现行规定的 MPD 为每周 100mrem, 即每年不超过 5rem。放射性工作地区附近居民不得超过  $5 \times 10^{-3}\text{rem} \cdot \text{d}^{-1}$ , 一般居民还应低, 但医疗照射不受这个限制。

**2. 外照射防护** 放射源在体外对人体进行的照射称为外照射。人体接受外照射的剂量与离放射源的距离及停留的时间有关。因此, 与放射性核素接触的工作人员, 应尽可能利用远距离的操作工具, 并减少在放射源附近停留的时间。此外在放射源与工作人员之间应设置屏蔽, 以减弱放射性强度。对  $\alpha$  射线, 因其贯穿本领低, 射程短, 工作时只要戴上手套就能有效进行防护。对  $\beta$  射线, 除利用距离防护和时间防护外, 注意使用的屏蔽物质不宜用高原子序数的材料, 以避免产生韧致辐射, 一般采用有机玻璃、铝等中等原子序数的物质作为屏蔽材料。对于 X( $\gamma$ )射线, 因其穿透能力强, 采用高原子序数的物质, 如铅衣、铅和混凝土等作为屏蔽材料。

**3. 内照射防护** 用放射性核素注入体内进行的照射叫内照射。由于  $\alpha$  射线在体内具有高电离比值, 其造成的损害比  $\beta$ 、 $\gamma$  射线都要严重。因此, 除出于介入疗法或诊断的需要必须向体内引入放射性核素外, 任何内照射都应尽量避免。这就要求使用放射性核素的单位要有严格的规章制度, 对接触人员的一切行为进行规范, 以防止放射性物质进入体内。

## 三、射线的测量原理

射线探测器是根据射线能使物质的原子、分子电离或激发的原理制成的, 它是将射线的能量转变为电流或电压信号, 供电子仪器采集, 实际上是一种换能器件。射线探测器的种类很多, 根据射线在探测器内产生的效应和探测器的工作介质, 可分成气体电离探测器、闪烁探测器和半导体探测器等。

**1. 气体电离探测器** 又称为电离室, 其测量吸收剂量的过程是通过测量电离辐射在与物质相互作用时产生的次级粒子的电荷量。图 14-6 是电离室探测器示意图。左边是两个互相平行的电极, 内充有一定量的气体, 两电极间加上适当的电压形成电场。当 X( $\gamma$ )射线射入电离室, 与气体介质相互作用, 产生次级电子, 这些电子在其

运动的路径上使气体中的原子电离，产生一系列正负离子对，在电场作用下，正负离子向两极漂移，被电极收集，在外接电路中形成电离电流，这一电离电流应为次级电

度，因为硅半导体的密度  $2.3\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$ ，远大于气体的密度(空气) $0.00129\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$ ，在硅半导体中产生一对电子-空穴时，只需  $3.5\text{eV}$  的辐射能，而在气体中则需要  $33.97\text{eV}$ ，所以其灵敏度高。辐射剂量输出信号有很好的线性关系，即能量线性响应好，分辨时间短，体积小，可制成任意形状，便于携带，有很好的应用前景。

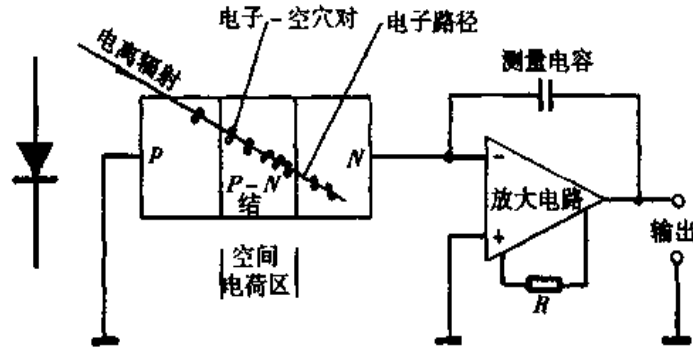


图 14-8 半导体探测器示意图

**4. 热释光剂量计** 图 14-9 是其原理图。具有晶体结构的固体，因含有微量杂质而形成晶格“陷阱”。当这种晶体受到辐射照射时，其原子外壳层电子会从价带跳到能自由运动的空间——导带。电子在导带中有可能落入陷阱，若陷阱足够深，在常温

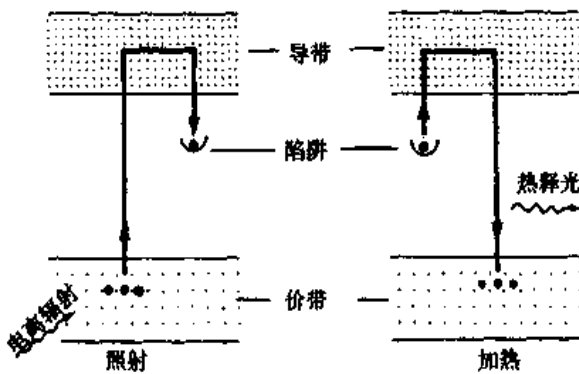


图 14-9 热致释光原理图

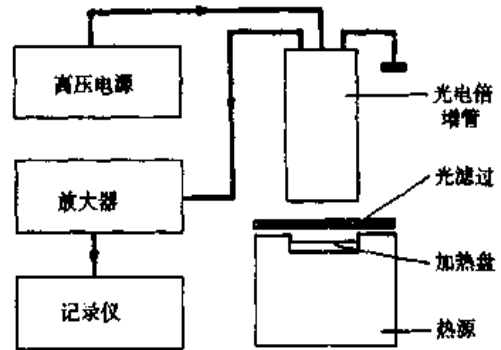


图 14-10 热释光剂量计示意图

下电子在陷阱中将长时间停留，只有当固体受热后才能从陷阱中跳出，跳出陷阱的电子从导带回到价带，会以发光形式释放能量，其发光强度与陷阱释放的电子数成正比，而电子数又与物质吸收辐射能量有关。经过标定可用于测量吸收剂量。常用的热释光材料有氟化锂(LiF TLD 100)晶体，它的发光光谱在  $0.35 \sim 0.6\mu$  之间，其有效原子序数  $Z = 8.2$ ，与软组织  $Z = 7.4$  比较接近，适用于临床。图 14-10 是热释光剂量计示意图。热释光材料的剂量响应与受照射和加热条件有关。如 LiF 在照射前要经过 1 小时  $400^\circ\text{C}$  高温和 24 小时  $80^\circ\text{C}$  低温退火，它的剂量响应在  $10\text{Gy}$  以前呈线性关系。由于用热释光材料可以制成任意大小和形状，或制成个人剂量笔，随身携带。使用时只要将热释光粉末放在欲测量处一段时间，用热释光剂量计读出的读数，便可确定所在地的环境辐射和个人接受电离辐射的照射剂量。此外，还可以将热释光材料放进病人体内，如空腔、膀胱、肛门及阴道等，以测量病人治疗中所接受的辐射。



## 第六节 放射性核素在医学上的应用

### 一、示踪的原理

放射性核素作为示踪原子是指一种元素的各种同位素都有相同的化学性质，它们在机体内的分布、转移和代谢都是一样的。如要研究某一种元素在机体内的情况，只要在这种元素中掺入少量该元素的放射性核素，这些放射性核素在体内参与各种过程的变化，然后借助它们放出的射线，在体外探查该元素的行踪，这种方法称为示踪原子法。引入的放射性核素称为标记原子或示踪原子，就是说使该元素无形中带上一种特殊的标记，便于从体外进行追踪。如将经放射性核素标记的药物引入体内，根据放射性药物聚集在体内某些脏器、参与代谢过程和流经某一通道，然后探测其分布、聚集和流通量，可以作为诊断疾病的重要依据。临床上的示踪诊断应用日益广泛，如应用<sup>131</sup>I标记的马尿酸作为示踪剂，静脉注射后通过肾图仪描记出肾区放射性活度随时间变化情况，可以反映肾动脉血流、肾小管分泌功能和尿路排泄情况。

**体外标本测量：**它是将放射性药物引入体内，然后取其血、尿、粪或活体组织等样品，测量其放射性活度。如口服维生素 B<sub>12</sub> 示踪剂，通过测定尿液排出的放射性活度，可以间接量度胃肠道吸收维生素 B<sub>12</sub> 的情况。

**放射自显影：**放射性核素发生的射线能使胶片感光，人们利用胶片来探测和记录放射性的方法称为放射自显影，它是追踪标记药物或代谢物在体内去向的一种有效方法，如把细胞培养在含有放射性脱氧核糖核酸(DNA)的水中，就可以把细胞内的染色体标记上放射性核素，通过放射自显影，可观察到染色体分裂过程中 DNA 的变化细节。

示踪原子法的优点是灵敏度高，可在生理条件下研究物质在机体内的活动规律，而且简单易行。

### 二、放射诊断

放射诊断主要介绍放射性核素成像，简称核素成像，是一种利用放射性核素示踪方法显示人体内部结构的医学影像技术。由于体内不同组织和脏器对某些化合物具有选择性吸收的特点，故选用不同的放射性核素制成的标记化合物注入体内后，可以使体内各部位按吸收程度进行放射性核素的分布。再根据核素放出射线的特性，在体外用探测器进行跟踪，以获得反映放射性核素在体内的浓度分布及其随时间变化的图像。借助这种影像技术可以了解各种组织、脏器对药物的选择吸收、正常组织与病变组织的吸收差异、血液循环情况对药物吸收的影响等，医生可以根据图像中某脏器的占位性病变和功能变化进行诊断。

核素成像仪器早期有闪烁扫描机和  $\gamma$  照相机，目前临床使用最多的是发射型计算机断层成像(ECT)。

1.  $\gamma$  照相机 可将体内放射性核素分布一次性成像，其特点是成像速度快，可

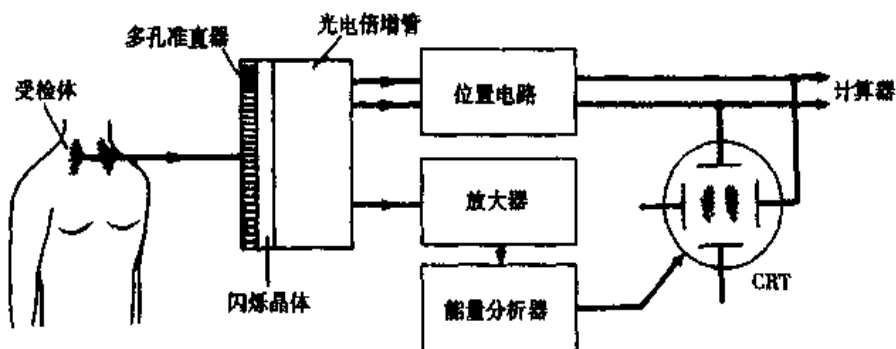


图 14-11  $\gamma$  照相机框图

提供静态和动态图像，把形态和功能结合起来进行观察和诊断。在使用时只要将  $\gamma$  照相机的探头放置在待测部位体表上一段时间，采集这段时间内从体内放射出的  $\gamma$  射线，即可得到  $\gamma$  射线在该方向的全部投影，在屏幕上的放射性核素分布图像很像一幅 X 射线透射照片，当然其分辨率远不如 X 光片。一台  $\gamma$  照相机一般由探头、位置和能量通道、显示系统组成。图 14-11 是  $\gamma$  照相机框图。探头包括准直器、闪烁晶体和光电倍增管等。由于引入体内的放射性核素放射出来的  $\gamma$  射线向四面八方传播，而且强度在每一个方向的几率相同，靠它们在闪烁晶体上激发产生的闪烁光点无法确定射线的空间位置。因此在探头前方有千个以上紧密排列整齐的孔道，每一个孔道就是一个准直器。图 14-12 是准直器及其视野示意图。由铅或铅钨合金制成，能有效吸收  $\gamma$  射线。从图中可知凡在灵敏区内的放射点，其通过准直孔射线立体角均能引起闪烁晶体发出荧光。在半影区体内的放射点只有部分射线能打到闪烁晶体；在屏蔽区的放射点，其射线无法进入闪烁晶体。这就是说晶体上每个点只能采集到来自体内相应点的射线，所以准直器能起到空间定位作用。 $\gamma$  照相机配有若干个可交替使用的准直器，它们的区别在于其孔道的大小、长度、数目及孔道排列方式和方向，选用不同的准直器可以提高采集特定检查部位射线的灵敏度，进而提高图像的质量。探头使用的闪烁晶体，其直径可达到 511mm，吸收通过准直器的  $\gamma$  射线，并将其转变为闪烁光点。此时晶体上的荧光像与观测体在探查方向的放射性活度分布一一对应，但其荧光像的强度不足以直接照相，而需要通过紧贴在其背后的光电倍增管，使光电子成  $2^6$  倍数增加。把晶体上的光点转变成电脉冲，输出的电脉冲信号分成三路：一路通过能量通道进入显示系统，用来表示  $\gamma$  射线强弱；另外两路分别代表水平位置和垂直位置，以控制进入显示系统的电信号在屏幕上图像的位置。能量通道主要是一个脉冲高度分析器，它位于探头和显示系统之间。能通过脉冲高度分析器的脉冲大小

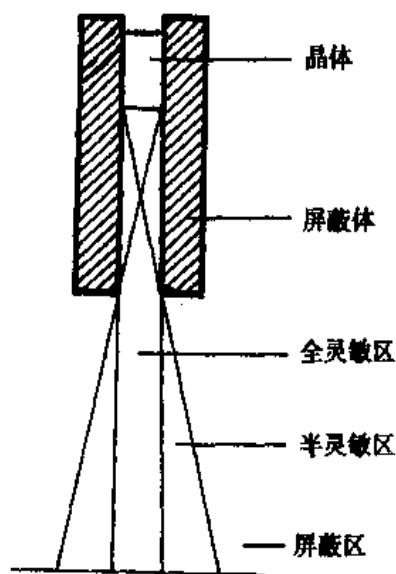


图 14-12 准直器及其视野示意图

由两个控制器的设置来确定，这两个控制器称为能量阈值和能量范围。凡是能够超过阈值并在预选的能量范围内的电脉冲，将通过脉冲高度分析器到达成像单元，在屏幕上产生一个光点。光点的位置由  $x$  位置电路和  $y$  位置电路来确定，使屏幕上光点的位置对应于被查部位放射点的位置。这一过程相当于把放射性核素在体内的三维分布，通过一系列紧密排列的平行孔(准直器)转换为 NaI (Tl)晶体闪烁点的二维分布，再把这种光点分布通过能量通道进行灰度定标，通过位置通道进行坐标定位，最后显示在屏幕或胶片上。

2. 发射型计算机断层成像(ECT) 可分为单光子发射型计算机断层和正电子发射型计算机断层。

(1) 单光子发射型计算机断层 单光子发射型计算机断层(SPECT)的基本原理是用探测器绕着人体外部分别把各个方向放射性核素所放射出来的射线强度记录下来。其过程是先进行直线扫描，将每一条直线上体内放射性核素发射出来的射线记录下来，得到一组直线的投影值，见图 14-13。每完成一次直线扫描，探测器旋转一定角度，再重复以上过程，直到绕人体一周。然后将每一个角度的直线投影值集合组成一个投影正层面，这就是人体内某一断层面上放射性核素分布的层面图像。设被扫描的断层是  $n \times n$  个体素(每个体素的放射性核素密度可视为均匀的)组成的，每个体素的放射性强度为  $I_{11}$ 、 $I_{12}$ 、 $\dots$ 、 $I_{1n}$  等。从探测器得到每条线上放射性强度的总和为  $y_1$ 、 $y_2$ 、 $\dots$ 、 $y_n$  等。即  $y_1 = I_{11} + I_{12} + \dots + I_{1n}$ ； $y_2 = I_{21} + I_{22} + \dots + I_{2n}$  等，则一个断层至少应由  $n^2$  个方程组成，将这些大小不同的强度值经 A/D 转换，送进电子计算机去解，就可以把这一层面的每一个体素的放射性强度计算出来。这一过程如同早期的 X-CT 扫描，再经图像重建和 D/A 转换成层面的体素，在图像中对应像素的灰度，得到一幅按层面放射性核素密度分布的层面图像。但 SPECT 所产生的图像仅是描绘人体内组织和脏器断层中放射性核素的浓度分布，这种分布不是有关断层的解剖学形态，而是把放射性核素注入体内一个或几个有关组织脏器时的生理、生化过程的分布。SPECT 常用的放射性标记物主要有  $^{99m}\text{Tc}$ 、 $^{201}\text{Tl}$ 、 $^{131}\text{I}$  和  $^{67}\text{Ga}$  等能产生  $\gamma$  射线的核素。

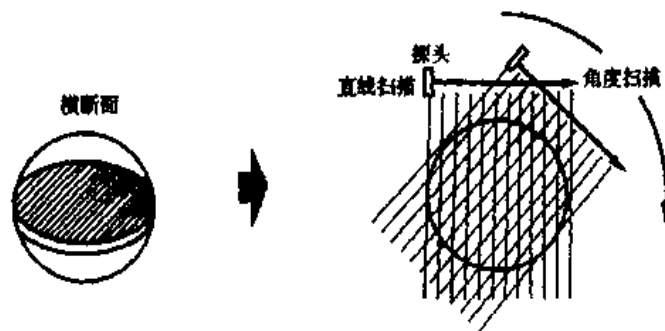


图 14-13 SPECT 扫描示意图

(2) 正电子发射型计算机断层(PET) PET 是通过探测注入体内的  $\beta^+$  放射性核素所放射的  $\beta^+$  射线产生的湮没光子而实现断层成像的，是目前大型的医学影像设备之一。

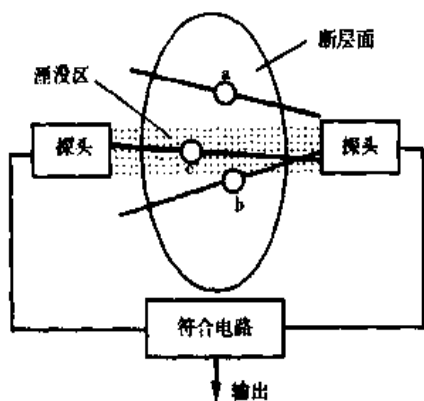


图 14-14 PET 的探头及其准直特性

PET 的基本原理：X-CT 的原理是通过体外 X 线穿透机体，根据不同组织对 X 线的吸收差别，由探测器接收后再由计算机处理重建断层图像，反映机体内组织的结构和形态，是一种获得解剖学图像的设备。PET 不同于 X-CT，它是通过跟踪技术将具有选择性吸收的  $\beta^+$  放射性核素或其标记化合物引入体内某些特定的脏器或病变部位，根据探测正电子在体内器官湮没辐射到体表的光子，由计算机处理重建图像。其探测方法和重建图像所用数据表示的物理意义不同于 X-CT。在 PET 中，探测器放置在需要

扫描的断层周围。由于体内放射性核素衰变而产生的正电子，与组织的分子、原子相互作用而使本身的能量很快消耗，故在人体组织内的射程最多只有几毫米。正电子的寿命很短，它丧失全部动能后即与电子复合，发生电子对湮没，同时放射出的两个能量均为 0.511MeV 的光子，沿相反方向离开湮没点。PET 探测系统的特点是位于扫描断层两侧的一对探头同时工作，只有当两个探头都分别接收到湮没光子时，才有信号发生。图 14-14 所示为 PET 的探头及其电子准直特性，设扫描断层中 a、b、c 为某瞬间正电子湮没点，其放射出的光子，a 点的一对光子没有进入探头，b 点的一对光子只有一个进入探头，因而没有信号发生，称为无效辐射，只有 c 点的一对光子同时进入探头对，符合计数探测要求，称为符合事件。可以通过测定两探头间组织中湮没光子的起点而推知放射源的位置，这是因为该起点离正电子的初始位置，即放射源(衰变核)的位置最多几毫米。

PET 使用的标记化合物相当多，如测定糖代谢的  $^{18}\text{F-DG}$ 、 $^{11}\text{C-DG}$ ，测定血流量的  $^{13}\text{NH}_3$ 、 $\text{C}^{15}\text{O}_2$ ，测定血容量的  $\text{C}^{15}\text{O}$ ，测定蛋白质合成的  $^{11}\text{C}$ -蛋氨酸等，其中 C、N、O 和 F 是构成人体组织的基本元素，它们在体内的代谢、生化反应和稳定性元素一样，将这些标记化合物注入体内后，在体内用 PET 即可记录到有关组织脏器的摄取、吸收、分泌、代谢、排泄等一系列生理和生化反应过程。因此，PET 所提供的图像是反映人体的生理、病理及功能的状况。又由于 PET 所使用的核素半衰期非常短，可以注入较大的剂量，而人体接受的辐射剂量却相对较小，这就有利于提高图像的对比度和空间分辨能力。总的来说，用 PET 所得到的断层图像比 SPECT 真实、清晰，不论器官大小都能反映放射性量的分布。

医学应用：SPECT 的应用提高了影像对比度与分辨力，可以测量病变的大小、范围和脏器的体积，定量分析放射性在脏器内的分布等。而 PET 能探测 C、N、O 等标记的化合物，是研究生命现象的重要手段，用图像的方法来表达人体在生理条件下的血流量、血容量、耗氧量、糖代谢、蛋白质合成及受体的分布和功能。因此，PET 有可能将人的思维、行为和脑化学联系起来，探讨、解释和定位人脑的功能活动。对于许多精神、感情、功能及运动障碍等功能性疾病，PET 具有理论意义和实用价值。

### 三、放射治疗

放射治疗简称放疗，是治疗肿瘤的一种有效物理疗法。它是利用放射性核素放出的射线通过机体时，会对机体组织产生破坏作用，来达到治疗肿瘤的目的。从射线的照射方式可分为外照射、近距离照射和内照射。如将放射源密封直接放入人体的内腔，如食管、宫颈、直肠等部位进行照射，叫近距离照射；利用人体某些组织或器官对某种放射性核素的选择性吸收，将该放射性核素注入人体内进行治疗，如 $^{131}\text{I}$ 注入体内，会很快集中到甲状腺，利用它发射的 $\beta$ 射线将甲状腺组织的癌细胞杀死，以达到治疗甲状腺癌的作用。这部分将介绍临床广泛使用的外照射装置。

1. 钴-60 治疗机 用 $^{60}\text{Co}$ 作为放射源，其半衰期为 $5.27\text{y}$ ，射线平均能量为 $1.25\text{MeV}$ 。它主要由机头、治疗机架、治疗床和控制台组成。机头是治疗机的核心，其内装有 $^{60}\text{Co}$ 放射源，具有开关的遮线器和定向限束的准直器。根据ICRP推荐，当钴源处于关闭时，距离钴源 $1\text{m}$ 处，各方向的平均照射量应小于 $2\text{mR/h}$ 。按此要求，对千居里级的钴-60机，需要衰减到 $10^{-6}$ 或20个半价层。遮线器是截断钴源 $\gamma$ 射线的大门，开启时射线通过准直器直射治疗部位，关闭时射线被截断，只有少量射线因遮线器密闭不严而漏出。准直器起限定照射野大小，以适应治疗需要。根据ICRP推荐，准直器的厚度应使漏射量不超过照射量的5%。按这个要求，钴-60机准直器的吸收厚度最少应为4.5个半价层。铅的半价层为 $1.25\text{cm}$ ，使用铅作为准直器吸收壁材料，所需铅厚为 $5.7\text{cm}$ ，一般取 $6.0\text{cm}$ 。钴-60机有直立型和旋转型两种：直立型机头能上下升降，旋转型能作 $360^\circ$ 旋转。目前主要用旋转型，钴源有千居里级和万居里级，治疗距离可达到 $100\text{cm}$ 。

2.  $\gamma$ -刀 它是一种立体放射神经外科(SRNS)治疗设备，是根据半圆弧等中心聚焦技术原理，借助高精度的立体定向仪，在CT、MRI和DSA等影像技术的参与下对颅内病灶(亦称治疗靶点)施行精确定位，确定靶点的三维坐标参数，并将其转换到照射装置的坐标系统中，使用大剂量 $\gamma$ 射线一次多方向限制性地聚焦在颅内靶点上，使病灶受到不可逆性摧毁，发生放射性坏死，同时又能保证靶区边缘及其周围正常组织所接受的放射性剂量呈锐减分布，控制在安全剂量以内，使靶点以外脑组织无任何不可逆损伤。由于用SRNS技术使靶区边缘形成一如刀割的损伤边界，达到类似于外科手术的治疗效果，故称为 $\gamma$ -刀。

$\gamma$ -刀以其不经开颅便可“切除”颅内病灶，且手术精确，“切割”处误差 $\pm 0.1\text{mm}$ ，病人无痛苦，治疗时病人可保持清醒，操作简单，每次治疗照射一次即可，已经成为一种有效、无痛、损伤小且并发症少的治疗方法，供病人和神经外科医生选择。

### 第七节 基本粒子简介

基本粒子，按其含义是指物质微观结构的基本单元，没有内部结构，不能再分割的物质最小单元。目前发现的“基本粒子”有400多种，但这些粒子中大部分是有内

部结构的，有更基本的单元组成。所以一般不称基本粒子，而称粒子。研究这些粒子的基本性质、粒子间相互作用、转化及探索其内部结构等叫粒子物理或高能物理。但由于方便和习惯的称呼，故仍称这些粒子为基本粒子。

## 一、粒子的基本性质

粒子的基本性质主要用如下物理量进行描述。

1. 质量 质量是量度粒子的基本性质，以电子质量  $m_e$  为单位，亦用能量单位 MeV 表示。

2. 电荷 粒子的电荷单位是  $e$ ，至今测得的粒子电荷都是  $e$  的整数倍或零。

3. 自旋 每一种粒子都有自旋角动量，用自旋量子数表示，简称自旋。例如正电子、负电子、质子、中子和  $\mu$  子等的自旋为  $1/2$ 。光子和  $J/\psi$  介子的自旋为 1，基本粒子的自旋可以是零、整数或半整数。

4. 磁矩 粒子的磁矩用玻尔磁子  $\mu_B$  或核磁子  $\mu_p$ ，如电子的磁矩为  $1.001145\mu_B$ ，质子的磁矩为  $2.7896\mu_p$ ，中子的磁矩为  $-1.903\mu_p$ 。

5. 平均寿命 很多粒子都是不稳定的，可以自发衰变为其他粒子，通常用平均寿命或半衰期来表征其衰变快慢。同一种粒子的平均寿命是一定的，若平均寿命  $> 10^{-22}s$  的粒子，称为“稳定”粒子。

## 二、粒子的相互作用

现在人们已认识到粒子间相互作用有引力相互作用、弱相互作用、电磁相互作用和强相互作用。

1. 引力相互作用 一切有质量的粒子间都有引力作用，与其他相互作用比较是一种最弱的力。

2. 弱相互作用 是中子、质子相互转换过程中起作用的力，如导致原子核发生衰变的力就是一种弱相互作用力，是一种短程力，力程约为  $10^{-17}m$ ，强度为电磁力的  $10^{-11}$ ，除光子以外，其他粒子都有这种作用力。

3. 电磁相互作用 一切带有电荷或磁矩的粒子都有电磁力，它是通过交换电磁场的量子即光子来实现的。

4. 强相互作用 将中子和质子维系在一起组成坚固的原子核的核力就是强相互作用力，又叫强力，是一种短程力，力程约  $10^{-15}m$ 。

## 三、粒子的分类

粒子的分类很多，一般是按粒子参与相互作用的情况分成三类。

1. 光子 它是电磁相互作用的媒介，存在于一切带电粒子或具有磁矩的粒子间的电磁相互作用中，一些中性粒子可以通过电磁作用发生衰变产生光子，如  $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$  或  $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda^0 + \gamma$ 。

2. 轻子 轻子(lepton)来源于希文，目前发现的轻子有电子  $e^-$ 、 $\mu$  子、 $\tau$  子，中微

子有电子中微子  $\nu_e$ 、 $\mu$  中微子  $\nu_\mu$  和  $\tau$  中微子  $\nu_\tau$  ①，它们的反粒子  $e^+$ 、 $\mu^+$ 、 $\tau^+$ 、 $\bar{\nu}_e$ 、 $\bar{\nu}_\mu$  和  $\bar{\nu}_\tau$  共 12 种。反粒子的质量、自旋、寿命与相应粒子相同，但电荷符号和磁矩方向相反。反粒子的基本特征是与相应的粒子结合时，能够转变为其他粒子，发生湮没过程，特点是没有强相互作用。

**3. 强子** 强子参与强相互作用和弱相互作用，带电强子或中性带磁矩的强子都参与电磁相互作用。根据粒子的自旋，强子可分为介子和重子：①介子：介子的质量介于核子和轻子( $\tau$ 子除外)之间，自旋量子数为零或整数，具有强相互作用，有  $\pi$ 、 $\hat{e}$  和  $\eta$  及它们的反粒子。②重子：重子的自旋为半整数的粒子，包括质子、中子和超子及它们的反粒子，具有强相互作用。

强子具有复杂的内部结构。从 60 年代开始 M.Gell Mann 等就提出强子的夸克(quark, q)模型，也称为层子，它是组成强子的基本单元，其主要特点是有自旋(1/2)的费米子，带有分数电荷，每种夸克都有相应的反夸克。这种模型指出，所有介子都由一个夸克和一个反夸克组成(qq)，所有重子都有三个夸克组成(qqq)。夸克间有强相互作用、电磁相互作用和弱相互作用。从目前的认识，夸克和轻子及其反粒子是组成物质世界、并被视为无结构的基本单元。

表 14-4 列出了一些寿命较长的基本粒子，表中稳定粒子是指它们不会自发地衰变为其他粒子。强子具有较复杂的内部结构，光子和轻子尚未发现有任何内部结构。在基本粒子中除了电子和核子外， $\pi^-$  介子已在医学上得到应用。 $\pi^-$  介子通过物质的情况与稳定粒子基本相同，但在射程末端， $\pi^-$  介子失去动能后，在进行自发衰变前就很容易被原子核俘获而发生星裂， $\pi^-$  介子的全部固有能量(约 140MeV)都转变为碎片的动能。这些碎片都是带电重粒子，电离比值很大，射程很小。用适当能量  $\pi^-$  介子照射肿瘤，能够在它的射程末端对肿瘤组织造成大伤害，比 X、 $\gamma$  射线和  $\alpha$ 、 $\beta$  粒子造成的伤害更集中、疗效更好。

表 14-4 基本粒子简表

| 分类 | 粒子名称     | 符号                         | 质量(MeV)                 | 电荷(e)  | 自旋  | 平均寿命(S)*                   | 主要衰变方式  |
|----|----------|----------------------------|-------------------------|--------|-----|----------------------------|---|
| 光子 | 光子       | $\gamma$                   | 0 ( $< 10^{-12}$ )      | 0      | 1   | 稳定                         |   |
| 轻子 | 中微子      | $\nu_e, \bar{\nu}_e$       | 0 ( $< 60\text{eV}$ )   | 0      | 1/2 | 稳定                         |   |
|    |          | $\nu_\mu, \bar{\nu}_\mu$   | 0 ( $< 1.2$ )           | 0      | 1/2 | 稳定                         |   |
|    |          | $\nu_\tau, \bar{\nu}_\tau$ | 0 ( $< 250\text{MeV}$ ) | 0      | 1/2 | 稳定                         |   |
|    | 电子       | $e^-, e^+$                 | 0.511003                | -1, +1 | 1/2 | 稳定                         |   |
|    | $\mu$ 子  | $\mu^-, \mu^+$             | 105.6595                | -1, +1 | 1/2 | $2.2 \times 10^{-6}$       | $\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$   |
|    | $\tau$ 子 | $\tau^-, \tau^+$           | $1807 \pm 20$           | -1, +1 | 1/2 | $\leq 2.3 \times 10^{-12}$ | $\tau^- \rightarrow \nu_\tau + \mu^- + \bar{\nu}_\mu$<br>$\nu_\tau + e^- + \bar{\nu}_\mu$<br>$\nu_\tau + \pi^-$ |

①  $\tau$ 中微子是物理学家“标准模型”亚原子粒子一大家族中的第三代粒子。2000年7月份各国科学家组成的研究小组，动用巨大的外力，进行了审慎的分析，在数百万个中微子轰击到一沓感光底片上后，对每一张底片进行数码扫描和重建，显示每个粒子穿过胶片路径的三维示意图，得到4颗 $\tau$ 中微子的踪迹，此项发现打开利用 $\tau$ 中微子研究大门，尤其是研究其具有质量的可能性。对这一发现有人说将会让亚原子家族实现团圆，有人说最终将会导致这个家族分裂。

2001年6月份国际物理学科研小组还宣布，在加拿大萨伯里中微子观测台发现，太阳中微子失踪的原因在于中微子从太阳到地球的旅途中本身特性发生了变化，电子中微子转变成了其他形式的中微子。这一发现揭开了30多年来困扰物理学界的中微子失踪之谜。

续表

| 分类          | 粒子名称                       | 符号           | 质量(MeV)                      | 电荷(e)   | 自旋                     | 平均寿命(S) <sup>*</sup>  | 主要衰变方式  |  |
|-------------|----------------------------|--------------|------------------------------|---------|------------------------|---|---|--|
| 强           | 介子                         | $\pi$ 介子     | $\pi^0$                      | 134.965 | 0                      | 0   | $0.84 \times 10^{-16}$  | $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$  |
|             |                            |              | $\pi^+, \pi^-$               | 139.569 | 0                      | 0   | $2.6 \times 10^{-8}$  | $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$  |
|             | 子                          | $\kappa$ 介子  | $\kappa_1^0$                 | 497.7   | 0                      | 0   | $0.866 \times 10^{-10}$   | $\kappa_1^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0 + \pi^0$   |
|             |                            |              | $\kappa_2^0$                 | 497.7   | 0                      | 0   | $5.179 \times 10^{-8}$  | $\kappa_2^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0, 3\pi^0$   |
|             |                            |              | $\kappa^+, \kappa^-$         | 493.71  | +1, -1                 |   | $1.237 \times 10^{-8}$  | $\kappa^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu, \pi^+ + \pi^0,$<br>$2\pi^+ + \pi^-,$<br>$e^+ + \nu_e + \pi^0$ |
|             | $\eta$ 介子                  | $\eta^0$     | 548.8                        | 0       | 0                      | $2.52 \times 10^{-19}$  | $\eta^0 \rightarrow \gamma + \gamma, 3\pi^0$<br>$\pi^+ + \pi^- + \pi^0$ |  |
| 子           | 重子                         | 质子           | $p, \bar{p}$                 | 938.28  | +1, -1                 | 1/2   | 稳定  |  |
|             |                            | 中子           | $n, \bar{n}$                 | 939.573 | 0                      | 1/2   | 918   | $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$  |
|             |                            | $\Lambda$ 超子 | $\Lambda^0, \bar{\Lambda}^0$ | 1115.6  | 0                      | 1/2   | $2.578 \times 10^{-10}$   | $\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$<br>$n + \pi^0$   |
|             |                            | $\Sigma$ 超子  | $\Sigma^0, \bar{\Sigma}^0$   | 1192.48 | 0                      | 1/2   | $\sim 10^{-20}$   | $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda^0 + \gamma$  |
|             |                            |              | $\Sigma^+, \bar{\Sigma}^-$   | 1189.37 | +1, -1                 | 1/2   | $0.8 \times 10^{-10}$   | $\Sigma^+ \rightarrow n + \pi^+$   |
|             |                            |              | $\Sigma^-, \bar{\Sigma}^+$   | 1197.35 | -1, +1                 | 1/2   | $1.48 \times 10^{-10}$  | $\Sigma^- \rightarrow n + \pi^-$   |
|             |                            | $\Xi$ 超子     | $\Xi^0, \bar{\Xi}^0$         | 1314.9  | 0                      | 1/2   | $3 \times 10^{-10}$   | $\Xi^0 \rightarrow \Lambda^0 + \pi^0$  |
|             | $\Xi^-, \bar{\Xi}^+$       | 1321.3       | -1, +1                       | 1/2     | $1.65 \times 10^{-10}$ | $\Xi^- \rightarrow \Lambda^0 + \pi^-$                                       |   |  |
| $\Omega$ 超子 | $\Omega^-, \bar{\Omega}^+$ | 1672.2       | -1, +1                       | 3/2     | $1.3 \times 10^{-10}$  | $\Omega^- \rightarrow \Xi^0 + \pi^-, \Xi^- + \pi^0,$<br>$\Lambda^0 + \pi^-$ |   |  |

### 思考题与习题十四

- 14-1 计算两个 $^2\text{H}$ 原子核结合成一个 $^4\text{He}$ 原子核时释放的能量(以 MeV 为单位)。(23.69MeV)
- 14-2 两个氢原子结合成氢分子时释放的能量为 4.73eV, 试计算由此发生的质量亏损, 并计算 1mol 氢分子的结合能。(  $5.08 \times 10^{-9}\text{u}; 4.563 \times 10^5\text{J}\cdot\text{mol}^{-1}$  )
- 14-3 试计算氘核和氦原子核的结合能和平均结合能。(氘: 2.23MeV, 1.11MeV; 氦: 28.28MeV, 7.07MeV)
- 14-4  $^{32}\text{P}$  的半衰期是 14.3d, 试计算它的衰变常数  $\lambda$  和平均寿命,  $1\mu\text{g}$  纯 $^{32}\text{P}$  的放射性活度是多少贝可(Bq)? (  $4.85 \times 10^{-2}/\text{d}; 20.62\text{d}; 1.06 \times 10^{10}\text{Bq}$  )
- 14-5  $^{131}\text{I}$  的半衰期是 8.04d, 问在 12 日上午 9 时测量时为  $5.6 \times 10^8\text{Bq}$  的 $^{131}\text{I}$ , 到同月 30 日下午 3 时, 放射性活度还有多少? (  $1.7 \times 10^8\text{Bq}$  )
- 14-6 利用 $^{131}\text{I}$  的溶液作甲状腺扫描, 在溶液出厂时只需注射 0.5ml 就够了( $^{131}\text{I}$  的半衰期为 8.04d), 如果溶液出厂后贮存了 11d, 作同样扫描需注射多少溶液? (1.30ml)
- 14-7 一个含 $^3\text{H}$  的样品的放射性强度为  $3.7 \times 10^2\text{Bq}$ , 问样品中 $^3\text{H}$  的含量有多少克? (  $1.03 \times 10^{-12}\text{g}$  )
- 14-8 设例题 18-1 中的 $^{60}\text{Co}$  源初装时不含任何杂质, 试计算其质量。(5.36g)
- 14-9 某患者口服 $^{131}\text{I}$  治疗甲状腺功能亢进症, 设每克甲状腺实际吸收  $3.7 \times 10^6\text{Bq}$  的 $^{131}\text{I}$ , 其有效半衰期约为 5d (这里所说的有效半衰期就是包括衰变和排泄过程, 使体内放射性减少一半的时间), 衰变时发出的  $\beta$  射线的平均能量为 200keV, 全部在甲状腺内吸收,  $\gamma$  射线的吸收可忽略, 试计算甲状腺接受的剂量。(73.8Gy)
- 14-10 两种放射性核素的半衰期分别为 8d 和 6h, 设含这两种放射性药物的放射性活度相同,



问其中放射性物质的 mol 数相差多少倍? (32 倍)

14-11 已知  $U_3O_8$  中的铀为放射性核素, 今有  $5.0g U_3O_8$ , 试求其放射性活度。 ( $5.3 \times 10^4 Bq$ )

14-12  $^{226}Ra$  和  $^{222}Rn$  原子质量分别为  $226.02536u$  和  $222.01753u$ ,  $^4He$  原子质量  $4.002603u$ , 试求  $^{226}Ra$  衰变为  $^{222}Rn$  时衰变能  $Q$  为多大? ( $4.866MeV$ )

(曾仁端)

## 第十五章 量子生物学基础

---

学习本章后，你应：

---

1. 了解量子生物学的研究方法。
  2. 理解能量指数和结构指数的意义。
  3. 了解量子生物学的主要研究内容。
- 

量子生物学是研究生命物质微观结构的科学，它是量子力学与分子生物学相结合的产物。它运用量子力学的理论、概念与方法来研究生物分子的电子结构、电磁性质、能量转移和化学反应等问题，从电子水平来解释生命现象。

本章简要介绍量子生物学的基本方法及其主要研究内容。

### 第一节 量子生物学的基本方法

量子生物学的研究方法是用量子力学方法来描述一个微观体系的运动状态和规律，并用计算得到的各种参量来说明该体系的结构、能量状态及其变化与生物学活性和生命过程的关系。量子力学中，定态薛定谔方程可表示为

$$\hat{H}\psi = E\psi \quad (15-1)$$

式中  $\psi$  为波函数， $E$  为体系的能量， $\hat{H}$  称为哈密顿算符。上式表示  $\hat{H}$  作用于  $\psi$  (或对  $\psi$  进行运算) 的结果就等于体系所具有的能量  $E$  (即能量本征值) 与  $\psi$  的乘积。量子力学的计算任务就是解上述方程，求出  $E$ 、 $\psi$  以及其他各项指标。

在量子生物学中，要确定和评价各个分子的电子结构和反应性能，首先就是根据研究的对象和目的，结合计算条件来选择计算方法和确定理论指数。

#### 一、分子轨道法

所谓轨道，指电子围绕核占据的特殊空间区域，即单电子波函数。原子轨道就是这样一些单电子波函数，它的绝对值的平方表明了电子的几率密度分布。分子轨道是围绕着分子骨架分布的多中心电子波函数。即当原子组合成为分子时，原来专属于某一原子所有的电子将在整个分子范围内运动，其轨道也不再是原来的原子轨道，而成为整个分子所共有的分子轨道。无论是原子轨道还是分子轨道，都只能在一定近似的基础上应用。在分子轨道法(简称 MO 法)中，把分子轨道看作为各个原子轨道线性相加而成，称为原子轨道线性组合(简称 LCAO)。因此， $\psi$  可写成：

$$\psi = C_1\phi_1 + C_2\phi_2 + \cdots + C_n\phi_n = \sum C_i\phi_i \quad (15-2)$$

式中  $\phi_1 \cdots \phi_n$  表示总数为  $n$  的各个原子轨道的波函数,  $C_1 \cdots C_n$  代表不同的系数,  $i$  是  $n$  项中的一个代表项。

图 15-1 表示两个氢原子的  $1s$  电子在组成氢分子后, 原子轨道变为分子轨道的两种可能性。如果两个原子相距较远, 这两个原子的电子各自占据一个原子轨道, 它们是单一的  $1s$  轨道  $\phi_A(1s)$  和  $\phi_B(1s)$ 。当原子结合在一起时, 它们的原子轨道便发生合并。我们可以得到两个可能的分子轨道, 其特点是电子云分布相对于连结原子核  $A$  和  $B$  的键轴是对称的。在两个核之间有较大的电子云密度, 能量较低的, 称为成键  $\sigma$  轨道, 用  $\sigma$  表示, 这时形成的键, 称为  $\sigma$  键。在两个核之间电子云密度较小, 造成它们彼此排斥, 能量较高者, 称为反键  $\sigma$  轨道, 用  $\sigma^*$  表示。按照泡利不相容原理, 每个轨道中都可以有两个电子占据, 因此在  $H_2$  的共价键里成键轨道均有两个自旋相反的电子占据。分子接受一定能量(激发)则导致一个电子跃迁到反键轨道上去, 这时两个电子自旋平行。 $s$  轨道融合所产生的轨道一般是  $\sigma$  轨道。

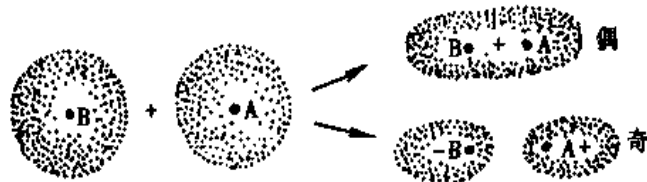


图 15-1 两个氢原子轨道形成的氢分子的两个分子轨道

$P$  电子(例如  $2p$  电子)云的分布是“8”字形的。由  $P$  电子形成的  $\sigma$  键如图 15-2 (a)所示。如果一个原子具有一个以上的  $P$  电子, 则它们的电子云分布彼此垂直, 图 15-2 (b)表示两个和键轴方向垂直的  $P$  电子云彼此接近的情况。这时形成的键称为  $\pi$  键, 其中的电子称为  $\pi$  电子。 $\pi$  键的特点是分子轨道相对于通过键轴并与  $P$  电子云垂

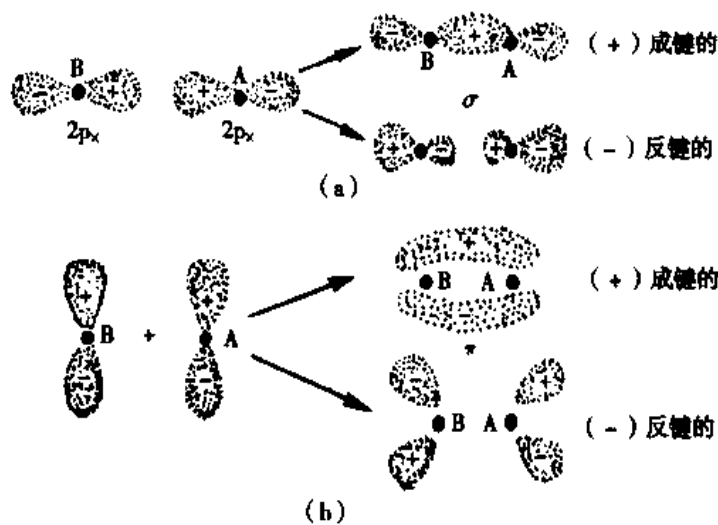


图 15-2 由  $P$  电子轨道形成的分子轨道

(a) 成键的和反键的  $\sigma$  轨道 (b) 成键的和反键的  $\pi$  轨道

直的一个平面(图中与纸面垂直且通过 A、B 两点的平面)为对称。其中能量较低的是成键  $\pi$  轨道, 用  $\pi$  表示; 能量较高者称为反键  $\pi$  轨道, 用  $\pi^*$  表示。P 轨道可以形成  $\sigma$  以及  $\pi$  轨道。

$\pi$  键之间的相互作用往往引起  $\pi$  电子在更大范围内的不定位, 即电子不止在两个原子之间, 而是在  $n$  个原子的范围活动, 这就是电子的非定域化作用, 其结果是使体系的能量减少, 稳定度提高。

除  $\sigma$  与  $\pi$  电子外, 分子中某一原子还剩下的不成键电子称为非键孤对电子, 用  $n$  表示, 它的运动一般局限在该原子附近。

量子力学不作任何近似能得到精确解的, 只限于像氢原子那样的二体问题, 而对于具有两个以上电子的系统, 没有任何近似则不能解。对于量子生物学处理的分子, 如生物分子和药物分子, 都是复杂的多原子体系, 因而必须采取各种近似, 如表 15-1 所示。各种近似方法的选择是否合理要根据计算结果与实验结果的符合情况作出判断。

表 15-1 分子轨道(MO)法的各种近似法

| 近似方法名称                        | 处理的电子    | 电子间的排斥<br>(考虑+, 不考虑-) |
|-------------------------------|----------|-----------------------|
| 单纯 MO 法                       |          |                       |
| HMO 法(Hückel 近似法)             | $\pi$ 电子 | -                     |
| EHT 法(推广的 Hückel 法)           | 全部价电子    | -                     |
| 半经验 MO 法                      |          |                       |
| P-P-P 法(Pariser-Parr-Pople 法) | $\pi$ 电子 | +                     |
| CNDO 法(全略微分重叠法)               | 全部价电子    | +                     |
| 非经验 MO 法                      |          |                       |
| 从头计算法(ab initio 法)            | 全部电子     | +                     |

## 二、能量指数与结构指数

解薛定谔方程后所得到的结果可以分为两大类: 能量指数与结构指数。表 15-2 对此作了归纳。

**1. 能量指数** 能量指数主要说明体系的能量状态。总能量代表整个体系的能量状态。共振能是指共轭双键系统中附加的起稳定作用的能量与假定该系统中的双键都定位时的能量之差, 用来衡量由于  $\pi$  电子的非定域化而获得的稳定性。共振能越大, 分子的稳定性越高。它提供了可逆系统中氧化-还原电位、化学转化中的热力学稳定性和许多其他相关问题的信息, 对研究细胞内的生物能力学过程非常重要。跃迁能给出光谱信息。

最高占据分子轨道(HOMO)能表示把电子从一个能量最高的填满轨道移到无限远处所需要的能量, 即电离势。它是一个分子给出电子能力大小的一种量度。最低空分子轨道(LUMO)能表示把一个电子由无限远移到一个能量最低的空分子轨道时所放出

的能量，即电子亲合势。它是一个分子接受电子能力大小的一种量度。HOMO 值越大，则表示这一个轨道中的电子越稳定，该分子给电子的能力越小。LUMO（一般均为负值）值越大（绝对值越小），则表示电子进入该轨道后体系能量降低的越多，即该分子接受电子的能力越强。

表 15-2 能量指数与结构指数

| 单个 MO 的能量指数  | 结构指数  |
|--|---|
| 总能量 → 共振能 → 热力学稳定性、化学平衡<br>→ 键级 → 化学反应能力<br>→ 电荷 → 化学反应能力<br>跃迁能 → $\pi - \pi^*$ 跃迁 → 紫外光谱, 三重线态,<br>→ $n - \pi^*$ 跃迁 → 荧光、磷光<br>→ 其他跃迁<br>最高占据分子轨道 → 电离势<br>最低空分子轨道 → 电子亲合势<br>反磁各向异性<br>定域能 → 化学反应能力 | 键级 → 键长<br>→ 键能<br>→ 力常数<br>→ 振动频率<br>→ 化学反应能力<br>自由价 → 化学反应能力<br>→ 共轭能力<br>电荷 → 偶极矩<br>→ 化学反应能力<br>电子跃迁强度 → 跃迁的偏振<br>→ 分子折射性 |

**2. 结构指数** 说明体系中各原子所在处的电荷数量，结合能力以及成键的性质，用以讨论生物分子的性质和行为。电子电荷可看作是某个原子附近的  $\pi$  电子密度，它说明电子在整个分子中的分布状况。键级是分子中某一个键的“双键性”的量度，它和一个键的成键能力相关联。键级的数值越大，键的强度亦大，则键长越短，通过此键产生化学反应的能力就越强。自由价是一个反应活性指数，说明一个原子还未被利用于形成  $\pi$  键的能力，即原子的  $\pi$  电子的残余键合力。自由价越大的原子，其残余键合能力越大，它和其他原子发生化学反应的可能性就越大。

上述理论指数，常用来说明和预测生物分子或药物分子的电子结构与反应活性间的关系。通过理论计算，能够提供出由实验不可能得到的分子内部的电荷分布信息。

## 第二节 量子生物学的主要研究内容

量子生物学的研究内容包括：生物分子的电子结构与反应活性的关系；生物分子间的相互作用；生物分子的构象及溶剂对构象的影响；特异相互作用与识别；致癌物质的结构与致癌活性；生物体中的电子转移、质子转移和能量转移；金属离子在生物过程中的作用；遗传、突变的量子理论；量子药理学等。以下仅就几个主要方面加以介绍。

### 一、核酸的结构和功能

**1. 核酸的结构** 核酸的化学结构是由许多核苷酸的基本单位组成的生物多聚物。每一个核苷酸又是由三种基本的亚单位组成的，即一个含氮碱基、一个戊糖环和一个

磷酸基团。核苷酸单体则通过共价的磷酸二酯键相互连接成为长链多聚物。

Watson 与 Crick (1953)提出了脱氧核糖核酸(DNA)的空间结构模型: DNA 的结构是由两条多核苷酸链组成的反平行的右手螺旋,磷酸在外,碱基在内;螺距为 3.4nm,每圈螺旋包含 10 个单核苷酸。每个单核苷酸轴长 0.34nm,螺旋半径约为 1.1nm,两条链对应的碱基之间以氢键相连(见图 15-3)。

在量子生物学研究中,由于核酸分子的螺旋对称性和重复单位的存在,可通过简化和模型化,运用量子力学原理和方法来近似计算一个核苷酸,从而获得核酸分子电子结构的某些信息。计算所得到的各种参量,可以说明核酸的结构、能量状态及其变化与生物活性和生命过程的关系。

**2. 核酸的功能** 核酸在生物系统中起着信息功能分子的重要作用。DNA 是生物体的遗传物质。基因就是 DNA 大分子的片段,有复制、转录等主要功能,是生物遗传繁殖的物质基础。

Wiener 在《控制论》一书中指出:“许多存储信息的方法,共同具有一个重要的物理因素,这就是它们似乎都是高度量子简并系统。换句话说,都是振动方式很多但频率相同的系统。铁磁性物质的情况就是这样,具有很高介电常数的物质也是这样。因此这些物质特别适合用来作为储存信息的电容器。”研究表明, DNA 是具有很高介电常数的物质。按照 Wiener 的观点, DNA 分子即是一种高度量子简并性物质。由于 DNA 具有高度的量子简并性,所以其中存在着大量的简并状态——内部共振。它的电子离域性极强,分子的键型变异很大。由量子力学中变分法所取得波函数  $\psi$  值,是极其大量的。因此共振能很大,亦即能量降低很多,使分子趋向于很稳定的状态。这与作为遗传物质基础的核酸分子在世代传递中和代谢活动中所表现的稳定性是一致的。DNA 具有一定的产生共振转移的条件。产生共振转移的可能性取决于电子激发态的寿命。一个简并态被激发的寿命越长,激发能进行共振转移的概率越大。DNA 最重要和最可能出现的电子激发态是长寿命的三重态。根据量子力学的解释可设想:在 DNA 进行复制或转录时,很可能以进行共振转移的红外波段的三重态电子激发能作为“信道”,向介质中的三磷酸核苷单体的原料发送信息。DNA 分子中特定的核苷酸也可能以特定频率的电子激发能发送信息,从而吸引与它配对的核苷酸单体,如 A 吸引 T(或 U)、G 吸引 C。

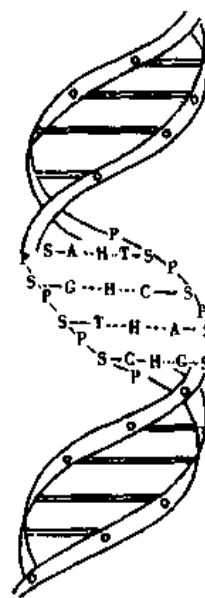


图 15-3 DNA 螺旋的模型图

S-糖、P-磷酸基、A-腺嘌呤、T-胸腺嘧啶、G-鸟嘌呤、C-胞嘧啶

## 二、蛋白质的结构和功能

**1. 蛋白质的结构** 构成蛋白质的基本单位是氨基酸。氨基酸靠肽键相互合成多肽链。多肽链中氨基酸的排列顺序及连接方式称为蛋白质的一级结构。经螺旋折叠成  $\alpha$ -螺旋和(或) $\beta$ 片层结构即为蛋白质的二级结构,进一步盘曲成为三级结构。数条具有三级结构的多肽链靠辅键连接成复合体成为四级结构。二、三、四级结构又称为空间结构。

对蛋白质来说，多肽链的 C=O 与 N-H 之间有少量共轭现象。虽然  $\pi$  电子并不能沿着同一条多肽链的骨架运动，当相邻的多肽链以氢键相互连接时，能形成链与链之间的广泛共轭， $\pi$  电子可以跨越链而运动，从而在蛋白质的总体结构上非定域化。联系到蛋白质分子在活细胞中的结构和状态，诸如电荷迁移相互作用等因素，必然导致蛋白质分子表现出半导体性质。Evans 与 Gergely (1949) 用分子轨道法处理这种体系的结果表明，全部电子能级组成三个能带，其中较低的两个能带是填满电子的，称为满带；最高的一个带则是空的，称为空带。每个带的宽度约为 0.25eV，而满带与空带间的禁带宽度则在 3.1 ~ 4.8eV。因此蛋白质在基态是不导电的，只有在受到激发后才导电，表现出蛋白质的半导体性质。

**2. 蛋白质的某些生物学功能** 蛋白质在生物体中具有多种功能，其中催化功能占有相当重要的地位。与生物体的新陈代谢、生长、分化以及和生殖有关的生物化学反应，一般都是由酶来催化的。在酶参与的生物化学反应中，从电子由一种蛋白质转移至另一种蛋白质，直到聚合百万个以上核苷酸长度的 DNA 分子，总是与电子转移相联系的。除催化功能外，蛋白质还具有遗传信息载体所具有的特征。

通过对  $\alpha$ -螺旋蛋白质分子以及  $\beta$ -折叠结构蛋白质分子的介电常数进行计算，发现二者的介电常数与 DNA 大分子的介电常数( $10^5$  量级)比较也相当高，约在  $10^3 \sim 10^4$  之间。在蛋白质分子中，最可能出现的电子激发态是三线态，与单线态相比寿命较长。当电子被激发到三线态时，有一部分能量消耗在使电子自旋反向上，因而能量较低，磷光波长较长，接近红外线，这就为蛋白质等生物大分子利用电子激发能来传递信息提供了可能。在蛋白质的高级结构中包含有大量的氢键，在  $2 \sim 3\mu\text{m}$  的红外波段，容易产生频率相同而方式各异的激发，这就是量子简并性。正是由于蛋白质分子的高度量子简并性以及很高的介电常数，才适合用作储存信息的“电容器”。由此看来，某些蛋白质分子也有可能作为遗传物质，在遗传信息的储存和传递中起着重要作用。

### 三、酶的催化作用机制

酶是活细胞制造的具有催化作用的一类特殊蛋白质。酶反应的一个重要特征是在反应的第一阶段生成酶-底物配合物，这个配合物的稳定性是由于酶和底物间的非共价键相互作用(氢键、范德瓦耳斯力等)造成的。作为催化剂，酶有以下两个显著的特点：极高的催化效率和高度的专一性。

为了解释酶惊人的催化效率，人们提出了各种各样的设想，并从轨道对称性、电子、质子运动规律及量子微扰论等观点出发进行解释。众所周知，酶的诱导-契合作用，除了使反应物与活性部位相接近外，还能使反应物与一些催化基团有固定的几何方向，从而使反应物用一种“正确方式”相碰，即定向效应。从图 15-4 (a) 的邻近效应和定向效应都没有的状态成为图 15-4 (b) 具有邻近效应的状态，只有进一步达到具备邻近效应和定向效应时，才能提高反应物的有效碰撞，提高反应速率。图 15-5 是表示图 15-4 (c) 的状态活性中心和底物反应位置的原子轨道取向模式图。Koshland 认为在酶反应中由于进行了高效的轨道取向造成反应加速。轨道取向越正确，反应速度

越快。酶活性部位大量的催化基团能向底物提供电子或质子，削弱了底物的反应键，或者是借助于电子或质子的转移过程与底物共价结合成中间产物，因此提高了反应速率。

从能量的观点来看，分子间或者分子内旋转移动的主要是  $\pi$  电子，像  $\sigma$  电子那样局限在键上也有一定程度的活动，这种电子移动产生的能量，形成非定域能。酶和底物之间产生电子移动时，这部分非定域能使系统稳定，导致活化能降低而使反应加速。



图 15-5 酶活性中心与底物反应基团之间定向效应的轨道取向

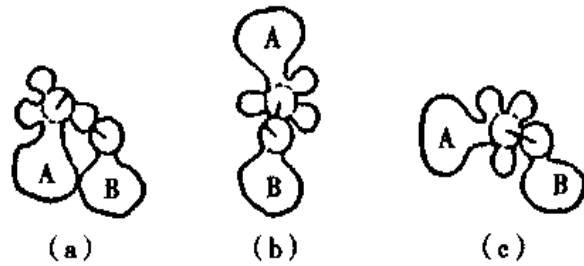


图 15-4

(a)无邻近、定向效应 (b)有邻近效应，无定向效应 (c)有邻近、定向效应

酶的专一性表现在：酶只对一些特定的分子在特定的位置上发生特定的反应起作用，这对于控制生物体内各种反应过程是极为重要的。酶与底物的专一性结合是通过三种不同类型的相互作用来实现的。①疏水性相互作用：由于酶的非水溶性侧链具有避水倾向而聚拢到折叠肽链的“核心”，使亲水性侧链留于表面而适宜与水性环境相互作用，疏水基团与疏水侧链自动靠拢形成“疏水键”，该键对酶的专一性有一定作用。例如  $\alpha$ -糜蛋白酶表面的非极性部分与底物的氨基酸部分形成的“疏水键”，表现出二者的专一性。②静电相互作用：肽的  $C=O$  基与各侧链基团之间以及侧链基团本身之间可借助于静电力形成氢键。③

范德瓦耳斯相互作用：一对原子间的范德瓦耳斯力是较小的，当底物的许多原子同时接近酶原子时，可同时形成大量的范德瓦耳斯相互作用，此时可以体现出酶的专一性。总之，由于上述这些相互作用关系各自起作用或重叠起作用，使酶能与底物以最适当的键结合，从而把底物稳定地固定在特定结构的结合部位上，体现出酶分子的高度专一性。相应的离子键、氢键和范德瓦耳斯键，可以由于水的存在而受到各种影响。

#### 四、遗传突变和化学致癌

1. 遗传突变 遗传物质是相对稳定的，但又是可变的。遗传物质的变化以及由其所引起表现型的改变，称为突变。遗传物质突变包括染色体畸变和基因突变。Delbrück 认为染色体中遗传物质在漫长年代里的巨大稳定性仅仅说明它可能是一个处于稳定状态的巨大分子，突变也可能就对应于它经“量子跳跃”而变成的异构形式。薛定谔认为，人的某些遗传特性的物质基础一直被保存在  $37^{\circ}\text{C}$  左右的恒温条件下，好几千万年来分子热运动的影响居然没有破坏它的结构。因此外界因素如果要引起生物遗传物质发生突变，必须经过一个量子化了的很高的能阶。

1963 年，Löwdin 提出了由于质子的隧道效应而导致突变的量子理论。在生物系



统中，氢键决定着对所有生命过程具有根本意义的蛋白质的二级结构。通过氢键，DNA分子的碱基才得以配对，导致双螺旋形成稳定的结构。同时，氢键对于复制和转录过程也起着重要的作用。Lowdin指出，每一个氢键体系  $X-H \cdots Y$  中存在着一个双势阱(见图 15-6)，按照量子力学的观点，质子可以穿过势垒进入另一个势阱中去(隧道效应)。因此，质子从给体  $X-H$  向受体  $Y$  的迁移概率不是零，可以由  $X-H \cdots Y$  变为  $X \cdots H-Y$ 。例如在 DNA 中的 A-T(或 G-C)碱基对的氢键，通过隧道效应由氨基-酮型氢键变成亚氨基-烯醇型氢键。即由于质子移动，碱基呈现异构体结构。如图 15-7 所示，由于质子转移，A-T 对变为  $A^*-T^*$  对， $A^*$  不再和 T 配对而和 C 配对， $T^*$  则和 G 配对。因而，通过 DNA 的复制，发生 A-T 置换成 G-C 的概率，从而产生突变。若 G-C 对发生质子转移，产生  $G^*-C^*$  异构体，通过复制则出现 A-T 对。当 DNA 受外界条件如辐射以及强电磁场等的影响时，可使碱基对中的碱基具有不等电荷，氢键中质子隧道的概率也会有很大的增加。在这种情况下，质子向带负电的碱基作单方向隧道运动产生迁移，从而产生两个离子异构体形式，导致 DNA 复制的错误和引起突变。

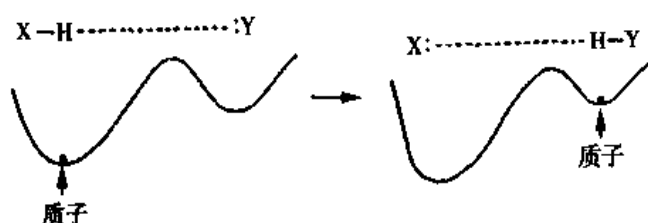


图 15-6 在双势阱中质子转移

2. 化学致癌 流行病学研究表明，在一定条件下，能诱发人类癌症的环境致癌因素有化学致癌因素、物理致癌因素和生物致癌因素等，其中化学致癌因素居于重要的位置。化学致癌物以多环芳烃(PAH)为最重要，量子生物学对化学致癌的研究也主要集中在 PAH 上。下面以 PAH 为例从电子水平上来了解化学致癌的有关假说。

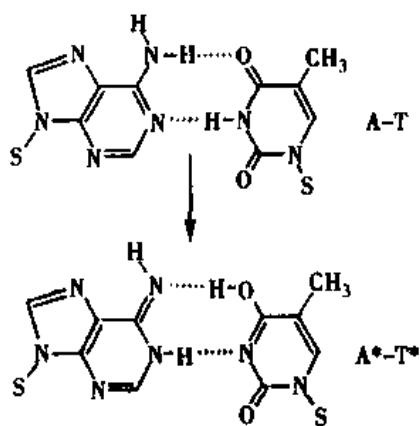


图 15-7 由于质子转移产生碱基的异构体变化

L-区理论: Schmidt 提出了致癌物分子的电子结构与致癌活性的有关设想认为，癌变是由于细胞受到某些外来因素的催化而处于某种激发状态，并计算了芳香族碳氢化合物中  $\pi$  电子的分布，进而以  $\pi$  电子的自由价作为结构指数，进行比较。发现这些分子的中位  $\pi$  电子密度分布特别大，致癌作用亦强，由此认为该位置(即 L-区)与致癌过程有关，如图 15-8(a)所示。中位电子密度大的 PAH 可以在蛋白质的酮-烯醇互变异构过程中起一种催化作用，从而导致细胞内蛋白质分子的不可逆改变，促进细胞癌变。

k-区理论: Pullman 等在 Schmidt 工作的基础上，提出了两点重要结论：①K-区是发生致癌反

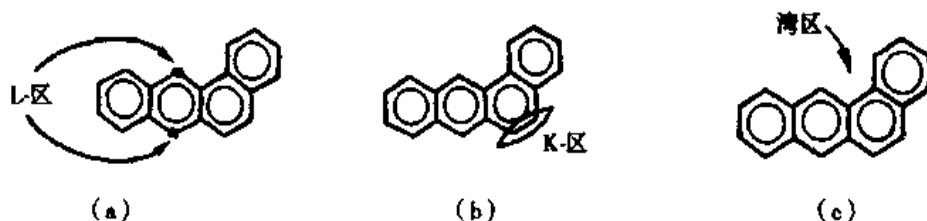


图 15-8 苯并[a]蒽的(a)“L-区”、(b)“K-区”、(c)“湾区”

应的关键区域，如图 15-8(b)所示，而 L 区是对致癌反应起拮抗作用的区域；②致癌反应的本质是致癌剂和生物体中各种亲电子活性中心发生加成反应，此时电子是从致癌剂流向生物体成分。

湾区理论：它强调了湾区碳阳离子的重要性，如图 15-8(c)所示。Jerina 提出的“湾区理论”主要论点有：①湾区的角环在代谢活化过程中，对致癌反应起着关键性的作用，其最终致癌形式为湾区环氧化物。②湾区碳阳离子稳定性越高，致癌性越强。

在解释 PAH 的结构与致癌活性的关系方面，我国学者也提出了“双区理论”，认为 PAH 分子致癌的必要结构存在着两个活性区域，即致癌剂在代谢过程中将产生两个亲电活性中心。以上各种理论表明，PAH 的电子结构是决定其有无致癌活性的重要因素，但要真正弄清致癌这样一个复杂问题，并非是某一个单一理论所能及的。

## 五、量子药理学问题

量子药理学是一门用量子力学方法研究药理学问题的新兴学科。研究内容包括药物分子构象、药物的受体、药物分子的静电势和电荷密度、电荷转移、药物定量构效关系和药物动力学等方面。

药物分子与生物大分子(DNA、核酸、酶、辅酶等)之间的相互作用存在空间化学问题。药物分子的构象只有与生物大分子化合物的构象相匹配或相适应，才易于与它结合而产生相应的药理作用。由于药物分子的构象不同，各个相互作用的原子或基团间距离不一，从而导致整个分子能量差异。当分子内某一化学键旋转时，原子核与电子间的引力、各原子核之间和各电子之间的斥力以及价键和非键作用力的改变，可使分子内旋转不同角度导致化合物具有不同的能量。能量较低的构象比能量较高的构象更为稳定，高能量的构象可以自动转化为低能量的构象。同样，与药物作用的生物大分子，也稳定在低能量的构象。而一系列类似药理作用的化合物应当与同一受体相互作用，与受体结合的药物基团也应有相似排列。从药物分子的能量，可以推测药物构象。计算药物分子构象的量子生物学方法中，分子轨道法可以计算分子的一部分相对于另一部分的一系列位置，并能比较各种位置的能量。例如从去甲肾上腺素的构象研究中得知，不仅药物有“活性构象”，与药物相互作用的生物大分子(如受体)，也需稳定在低能量的构象的空间位置。由于生物大分子化合物结构复杂，有时可能有几种不同构象的能量都较低，且可能同时存在。当药物小分子与这些大分子的不同构象相

互作用时，将分别产生不同的药理效应，称为一种受体的几种受体亚型。

各种类型的药物，可防治不同的疾病，疗效的产生与药物受体有关。受体实际上是一个弹性三维结构，其立体结构与药物的结构互补而生成复合物。在药物与受体生成复合物的过程中，两者的一些官能团间产生作用，其形式大致有：①药物与受体产生共价键结合；②药物分子内的羧基在生理酸碱条件下( $\text{pH} = 7.4$ )电离为阴离子，可与受体上的阳离子产生静电结合，而药物分子的脂肪胺可质子化成为阳离子，与受体上的阴离子生成离子键；③羧基、氨基、羟基、亚氨基等均可作为氢键的受体或给体；④许多基团的范德瓦耳斯力作用；⑤药物的非极性部分，可挤走外围的水分子，产生疏水性结合；⑥羰基或芳环等是 $\pi$ 键，电子易于流动，药物与受体间的这种基团可能产生电荷转移复合。对药物受体的研究，可从药物分子构象、电荷分布、空间的静电势场、化学键活性、疏水性能等角度，反推出与其作用的受体结构。例如用分子轨道法计算所得的分子内电荷密度分布，可反推受体各相互作用点的性质，电荷密度较高的部位，可作用于受体的正电中心，反之电荷密度较低的部位，则可作用于受体的负电中心。分子静电势则可描绘分子周围电荷作用，其正负电势部分可发生亲电或亲核进攻。从计算所得的最高占据轨道能量( $E_{\text{HOMO}}$ )和最低空轨道能量( $E_{\text{LUMO}}$ )的大小，可分析出药物与受体相互作用时电子跃迁能力的大小。研究药物与受体的作用，可为合理开发和设计新药提供依据，是药物学领域的一个极有希望的发展方向。

## 六、金属离子在生物系统中的作用

在生物体内，金属离子参与了重要的生命过程。多种金属离子如 Fe、Co、Mo、Ca、Mg、Cu、Zn 等是维持生命活动所必需的，这些金属离子往往通过引起构象的改变或在生物大分子中产生活性中心来稳定、分解、开关、调节和控制这些生物大分子。

金属离子的作用是通过与生物活性配体形成配位化合物(简称配合物)来体现的。在解释配合物的结构和性质上，一般认为比较成功的理论是所谓“配位场理论”，它是在晶体场理论的基础上和分子轨道理论相结合发展起来的。

**1. 金属离子与核酸间的相互作用** 研究证实，金属阳离子在较大程度上是结合在含氮碱基上，即与腺嘌呤和鸟嘌呤作用生成配位化合物，因为这两种碱基分子为金属螯合作用提供了合适的空间构型。核酸的杂环碱基、磷酸基团和核糖(或脱氧核糖)的若干位置均可成为与金属离子相互作用的位置，不同金属离子有不同的优先结合，同一金属离子因反应条件的变化可以改变其结合位置。

**2. 金属离子与蛋白质的相互作用** 所有的氨基酸、肽和蛋白质均可作为配位体和金属离子相互作用而生成配合物。这些配合物在生物体中的功能因结构而异。有些金属蛋白质用于金属离子本身的贮存和运送，如铁蛋白用于贮铁，铁传递蛋白用于运送铁；有些金属蛋白质则用于作为电子传递体，如细胞色素类在线粒体的氧化磷酸化和叶绿体的光合作用中起作用，铁硫蛋白则在光合作用、固氮作用和甾族化合物的生物合成中起重要作用。还有一些金属蛋白能够运送氧气供生物所需，称为氧载体，如血红蛋白、肌红蛋白和血清蛋白等。某些含金属的酶中，金属离子在活性中心占有一

定的地位。在已知酶中约有四分之一含有紧密结合的金属离子或在催化时需要用到金属离子。酶分子中金属的作用一般是维持酶的一种活性构象，但不少酶还能同时形成由酶通至底物的一种金属桥。这些金属的功能可用各种物理方法加以研究，如 X 射线结晶学、磁共振、电子自旋共振等，随着若干酶和蛋白质的三维结构在原子水平上的阐明，有关金属离子结合活性中心的量子生物学研究也活跃起来。

量子生物学已在化学致癌机制、生物固氮、病理机制的分子电子基础、抗原-抗体作用的分子识别、生物膜的研究等方面取得了一系列进展。随着高速大容量计算机的应用，那些过去认为根本不可能处理的生物分子，现在已实现了较为准确的量子力学计算。借助于计算机具有的记忆、判断和逻辑推理的性能，已可直接用来进行某些生物分子和药物分子的鉴定和合成路线的设计。

### 思考题与习题十五

- 15-1 量子生物学所采用的研究方法是什么？
- 15-2 量子生物学的主要研究内容有哪些方面？
- 15-3 能量指数和结构指数分别说明哪些方面的问题？

(吴明海)

## 第十六章 生物物理遗传学简介

---

学习本章后，你应：

1. 了解信息论、控制论、系统论，以及熵和负熵的概念在生物遗传学中的应用。
  2. 了解生物物理遗传学的研究领域和研究层次。
  3. 了解生物的遗传信息在其体内传递的方法和途径。
- 

遗传学从孟德尔定律发展到今天，已有 100 年的历史。遗传学与其他学科互相渗透、互相影响、彼此促进，形成许多新的边缘学科。生物物理遗传学就是其中之一。

表 16-1 基因型、性状表现型及它们的分离比例

| 基因型 $x$                | $P(x,y)$ 表现型 $y$ |     | $P(x) = \sum_y P(x,y)$ |
|------------------------|------------------|-----|------------------------|
|                        | W                | L   |                        |
| YY                     | 1/4              | 0   | 1/4                    |
| Yy                     | 2/4              | 0   | 2/4                    |
| yy                     | 0                | 1/4 | 1/4                    |
| $P(x) = \sum_x P(x,y)$ | 3/4              | 1/4 | $\sum_y P(y) = 1$      |

出信息源发出的基因型信号  $x$  的信息量  $I(x)$  为 1.50bit, 接收信息者接收到的表现型信号  $y$  的信息量  $I(y)$  为 0.81bit。可见,  $I(x) > I(y)$ , 说明信息正在传递过程中产生了损失。

从联合概率矩阵中可以计算出联合信息量  $I(x,y)$ 。在表 16-1 中的 6 个概率中有三个为 0, 另三个为非 0 概率。很显然, 联合信息量  $I(x,y)$  正好等于三种基因型的概率的信息量  $I(x)$ , 即信息源发出的基因信号  $x$  的信息量为 1.50bit, 传递的信息量  $T(x,y) = I(x) + I(y) - I(x,y) = 0.81\text{bit}$ 。在接收到基因型信号  $x$  的条件下, 对于表现型的不定度, 即条件熵  $H(x/y) = I(x,y) - I(x) = I(y) - T(x,y) = 0$ 。由于信息传递过程中的损失, 从表现型来推测基因型是非常困难的, 具有疑义度, 即收到表现型信号  $y$  的条件下对基因型信号  $x$  的条件熵, 或损失的信息量  $H(x/y) = I(x,y) - I(y) = I(x) - T(x,y) = 0.69\text{bit}$ 。

由上述分析可知, 信息源发送基因型信号的信息量  $I(x)$  与 6 个概率的联合信息量  $I(x,y)$  相等, 即  $I(x) = I(x,y)$ ; 接收信息者接收到的表现型信息量  $I(y)$  与系统传递的信息量  $T(x,y)$  相等, 即  $I(y) = T(x,y)$ ; 接收到的表现型信息量  $I(y)$  与接收到的表现型信息量  $I(y)$  条件下对基因型信号  $x$  的条件熵  $H(x/y)$  之和等于信息源发送基因型信号的信息量  $I(x)$ , 即  $I(y) + H(x/y) = I(x)$ 。

分析多对基因的情形可得到相同或类似的结果。

## 二、DNA 分子一级结构线性排列顺序

在遗传物质 DNA 的四( $m$ )种核苷酸 A、T、G、C 中, 每次取三( $n$ )个进行重复排列成三联体密码子, 组成遗传密码。根据重复排列的计算公式, 由于  $m = 4, n = 3 (m > n)$ , 则三联体密码子的种数为:  $m^n = 4^3 = 64$  种。

假若由四种核苷酸组成的 DNA 分子的一条链(互补的另一条链的核苷酸分子与它严格配对, 因此只计算一条单链)由 1000 个核苷酸组成。由于核苷酸的成分和排列顺序不同, 并且  $m = 4, n = 1000 (n > m)$ , 则组成的重复排列种数:  $m^n = 4^{1000} = 10^{602}$  种。这个极其巨大的天文数字比人类已经知道的宇宙中全部原子数的总和  $10^{73}$  大许多。这说明 DNA 分子能够储存极其大量的信息。实际上生物只利用了这些可能排列种数中的一部分, 有相当一部分排列方式成为没有功能的基因。在这些没有功能的基因中,

仍然有极其大量的有利于突变的排列方式存在。可见，基因通过突变而产生新的排列方式的潜能几乎是无限的；通过基因的突变，为生物进化和人类改造生物的遗传属性提供了物质基础。

若某个遗传基因的 DNA 分子段中含有 1000 个核苷酸对，且双螺旋的每一条单链含有等量的 A、T、G、C 四种核苷酸，每种为 250 个。利用不尽相异元素的全排列，在理论上计算出可能排列成  $4 \times 10^{595}$  种不同基因。 $10^{602}$  和  $4 \times 10^{595}$  两个数字的不同之处在于不尽相异全排列中各元素的组成是一定的，重复排列中各元素的组成和排列顺序均可不同。

### 三、遗传密码的概率和信息量

遗传密码是一种通用性的密码，在生物界中，从病毒、细菌到人体细胞都采用同样的遗传密码。人们发现真核生物中线粒体的遗传密码与细胞核中的通用遗传密码略有差别。

将遗传密码信息的传递假设为一通信系统，S 方发送信息称为发信者，R 方接收信息称为收信者。S 方以相等的概率发送 A、T、G、C 四种核苷酸信号，每种核苷酸出现的概率均为  $1/4$ ，则信息量为 2bit。由于 S 方不是发送单个核苷酸信号而是以三个核苷酸组成三联体密码子的形式发送信号。由计算可知，三联体密码子总数为 64 种。那么，每种三联体密码子出现的概率  $P(x)$  为  $1/64$ ，S 方发送的信息量  $I(x)$  为 6bit。

R 方接收到三联体密码子的信号后并转译成 21 种不同的氨基酸消息，设消息的概率为  $P(y)$ ，经分析，概率为  $1/64$  的氨基酸有两种，概率为  $2/64$  的氨基酸有 9 种，概率为  $3/64$  的氨基酸有 2 种，概率为  $4/64$  的氨基酸有 5 种，概率为  $6/64$  的氨基酸有 3 种，则 R 方接收到的平均信息量  $I(y)$  为 4.22bit。

S 方发送的信号  $x$  (三联体密码子) 与 R 方接收到的信号  $y$  (氨基酸) 的联合概率的联合信息量  $I(x, y) = H(x) = 6\text{bit}$ 。可见， $I(x) = I(x, y)$  表明 S 方每发送一个三联体密码子信号， $x$  都能决定 R 方所收到一个特定的氨基酸消息  $y$ 。 $I(y) = 4.22\text{bit} \neq I(x, y)$ ，反过来也说明，当 R 方收到一个消息  $y$  时，并不能完全确定 S 方所发送的信号  $x$ ，这是因为遗传密码存在简并的缘故。

### 四、基因调控

摩尔根基因调控假说指出：胚胎发育的各个阶段，不同的基因群相继活动起来。基因群相继活动的先后顺序被基因链本身具备的一种自动控制特性所决定。被基因控制的最初反应的生成物将对其周围的细胞质产生影响，使细胞质发生变化。发生了变化的细胞质又作用于基因，使其他基因群活化，摩尔根用基因调控假说把遗传学与胚胎学联系起来。

在摩尔根基因调控概念的启迪下，麦克林托提出“控制因子”的新概念。控制因子能够调控其他功能基因(又称结构基因)的活动。某些控制因子也是一种转座因子，它能从染色体的一个位置跳到另一个位置，甚至从一条染色体跳到另一染色体，

可见转座因子是一种跳跃基因。跳跃基因同时具有跳动特性和控制其他基因开闭的作用，使得受到控制因子调控的基因像开关一样时开时闭。

在控制因子学说的基础上，有人提出细菌操纵子学说。细菌操纵子分为诱导型操纵子和阻遏型操纵子两大类。诱导型操纵子与能源的分解代谢有关，大肠杆菌的乳糖操纵子是典型代表。操纵子中的结构基因通过转录特异性的 mRNA 而编码特定的酶，由调节基因所编码的阻遏蛋白相当于测量元件，测量出诱导物乳糖的浓度，以此为控制信号传输给操纵子中的控制元件——操纵基因调控执行元件——结构基因的转录活动。当培养基中乳糖浓度高时，细菌会自动产生半乳糖苷透膜酶(操纵子中三个结构基因之一)使乳糖进入细胞内；当乳糖消耗之后，阻遏蛋白(测量元件)又对操纵基因(执行元件)起作用，从而阻遏操纵子中的三个结构基因的转录活动。乳糖操纵子自控系统框图，如图 16-1 所示。

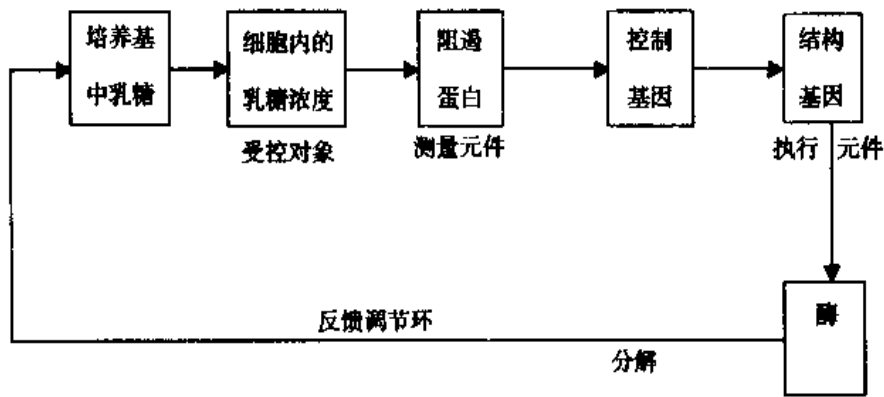


图 16-1 乳糖操纵子自控系统方框图

阻遏型操纵子与合成代谢(特别是氨基酸的合成)有关。大肠杆菌的色氨酸操纵子中有五个结构基因——E、D、C、B、A，分别编码与色氨酸合成有关的五种酶，这是阻遏型调控系统中的执行元件，且有操纵基因和弱化基因。阻遏蛋白为主抑物，色氨酸为辅抑物，两者结合后才能成为有活性的阻遏物，阻遏物抑制操纵基因。当结构基因开启时，与色氨酸合成有关的五种酶大量合成，辅抑物色氨酸随之也大量合成，色氨酸与主抑物结合后对操纵基因起关闭作用，阻遏结构基因的转录活动。于是，色氨酸停止合成，结构基因又重新开启，色氨酸又开始合成。这样不断地自动调控，使色氨酸的合成自动保持在一个适当的水平上。另一开关——弱化基因，受四磷酸鸟苷的调控。由于四磷酸鸟苷的合成必须以氨基酸缺乏的信号为先决条件，因此，在合成蛋白质的 20 种氨基酸中，任何一种氨基酸的缺乏信号均可作为这种先决条件。当氨基酸缺乏时，也可引起四磷酸鸟苷的合成，四磷酸鸟苷作用于弱化基因部位，弱化基因便失去弱化转录的作用，从而促进结构基因的转录活动，合成色氨酸，同样将色氨酸的合成自动调节在一个适当水平。阻遏型操纵子自控系统的双重控制方框图如图 16-2 所示。

## 五、遗传进化与负熵

负熵和信息的概念提供了组织复杂程度和进化发展程度的定量描述方法，为现代



生物学提供了新的研究方法和思维方法。玻耳兹曼说，生物为了生存所作的斗争，既不是为了物质，也不是为了能量，而是为了熵而斗争。负熵是十分积极而有用的，有机体就是赖以负熵而生。新陈代谢中本质的东西是有机体成功地消除自身活动时不得不产生的熵。生物体是一个开放系统，它能不断地从外界获得并积累自由能，从而使它的熵变为负。

普里高津指出，不可逆过程热力学中关于非平衡定态的描述与生物机体的显著特征十分符合。生物机体在生长时，在向定态发展的过程中，其熵在减少；生物体的组织结构普遍增加的事实，相当于熵的减少。从热力学观点来看，由于活的有机体是一个开放系统，它一旦成熟之后就处于定态中。有机体内许多不可逆(主要为新陈代谢)过程所产生的正熵率正好被供给的负熵所抵消。系统在生长的最后阶段达到每单位质量具有最小熵增率的状态，在此过程中熵本身在减少，此时在有机体内发生组织和结构的生长。进化学说在叙述这个过程时的“内部复杂化趋势”时，与上述的熵减少是一致的。

热力学第二定律指出，在一个孤立系统中发生的运动和变化总是导致熵增加。熵增加就意味着信息量的减少，意味着体系的分解、退化和衰亡。人类的劳动导致了开放系统增加负熵，因此人类依靠自身的辛勤劳动，改造自然，可越来越多地积累负熵。

## 第二节 亚分子遗传学和量子遗传学

从原子、电子的水平研究生物大分子本身的稳定性、反应活性，以及在储存、传递能量与信息等方面的性质，为进一步了解生物机体的功能和生命现象是十分必要的。

### 一、遗传物质的生物能力学特征

控制论指出，许多储存信息的方法具有一个共同的重要物理要素，它们似乎都是振动方式很多且频率相同的高度量子简并性的系统。许多储存信息和能量的物质具有很高的介电常数，这种物质在微小扰动时就能产生显著而稳定的结果，即出现量子简并性。作为遗传物质的 DNA 就具有这种高度量子简并的特征。DNA 的介电常数高

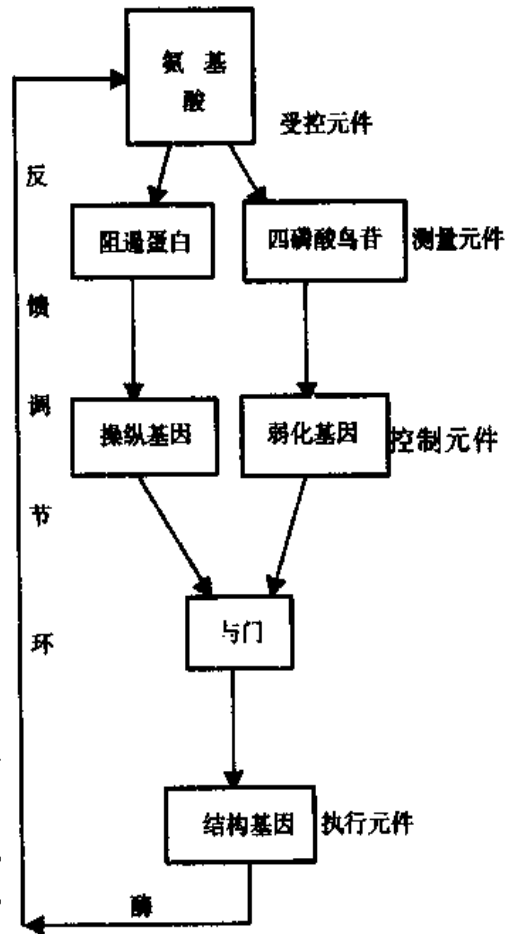


图 16-2 阻遏型操纵子自控系统方框图

达 120000 以上，是已知的介电常数最大的物质，可见大自然选择 DNA 作为遗传物质并非偶然。生物机体的新陈代谢和生殖作用的许多问题都与量子简并性物质有关。

在生物体内，信息的传递和变换离不开能量。尽管传递信息需要的能量很小，但能量转移的方式却多种多样、灵活、精确。DNA 的组成组分——嘌呤和嘧啶基团中都具有共轭双键，它们都有自己的非偶电子。这些非偶电子不受任何个别原子的束缚，为整个分子的共轭系统所共有，电子的激发能也属于整个共轭系统。DNA 在复制和转录过程中作为模板而传递信息。由于 DNA 分子为共轭双键体系，对于实现重叠转移、共振转移、电荷络合物转移、半导性能带的电子转移等各式各样电子激发能的转移十分有利。

具有共轭结构的有机高分子化合物有很多特殊的性能，除了顺磁性和导电性之外，还表现出催化活性和耐热性。DNA 在复制过程中的模板自身催化活性，以及在转录过程中对 mRNA 合成的异己催化活性都是共轭体系催化活性的表现。

DNA 在介质分子的热运动中得到保护，使遗传特性相对稳定，这是共轭体系耐热性的表现。若具有遗传特性的物质一直保持在 37℃ 左右的恒温条件下，几千年来分子热运动未能破坏它的有序结构。这说明，外界因素要引起生物的遗传物质发生突变，必须越过一量子化了的很高能垒，即在生物体内的遗传物质被一个“能障”保护着。

DNA 分子中存在大量的非偶电子，其自旋方向与原来配对的电子平行而使自旋改变了符号，这叫自旋反向。自旋反向的电子处于激发态，将其能级分裂成三个能量状态，这种能量状态称为三线激发态，简称三线态。三线态比单线态能量低，相对稳定，寿命较长，三线态是亚稳态。如果三线态一经形成，被激发的电子自旋已经反向，只有再次反转自旋后才能跃迁到基态。如图 16-3 所示。被激发的电子一经处于三线态能级，就难以回到原来的能级和它最初配对的电子偶合，这是因为它们的自旋已经相同。所以电子从三线态直接跃迁到基态的几率较小，其三线态的寿命约为单线态的一百万倍。处于单线态的电子的寿命很短，很快跃迁到基态，同时发出荧光，荧光持续时间仅有  $10^{-10} \sim 10^{-9}$ s，所以单线状又称荧光态。电子处于三线态的寿命较长，跃迁到基态时发出磷光，磷光持续时间为  $10^{-4} \sim 10^{-3}$ s，有的最长可达数秒，因此，三线状又称磷光态。

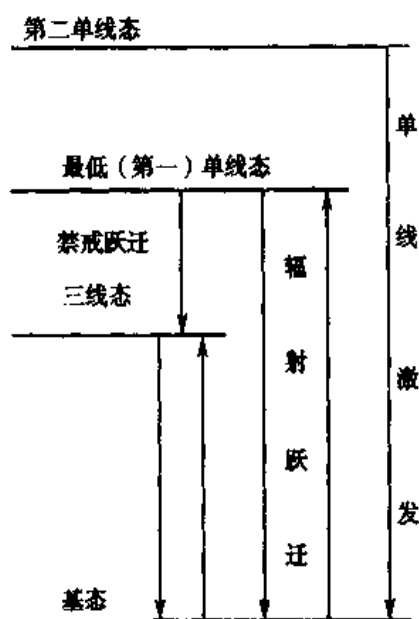


图 16-3 三线态

配对电子的激发则产生单线态，处于单线态的电子通过下列方式向三线态转移。三线态主要通过非偶电子吸收能量后从基态激发而产生。根据量子力学的选择定则和玻尔对应原理，电子从单线态直接跃迁到三线态需要一定条件

配对电子的激发则产生单线态，处于单线态的电子通过下列方式向三线态转移。

三线态主要通过非偶电子吸收能量后从基态激发而产生。根据量子力学的选择定则和玻尔对应原理，电子从单线态直接跃迁到三线态需要一定条件

(禁戒跃迁), 并且概率很小。在大分子和分子集体中, 分子与分子之间或基团与基团之间的能级彼此重叠而形成能带。最低单线态能级形成第一激子带, 其能量区域大大加宽, 它的一部分与三线态能级发生重叠, 于是电子有可能通过能带从单线态转移到三线态使得第一激子带跃迁到基态的概率减小, 加强了向三线态的转移概率。

三线态对电子激发能的共振转移十分有利。由于三线态的寿命较长, 电子激发能可在消失之前从一个分子或基团的三线态转移到另一个分子或基团的三线态。同时, 三线态激发转移相互作用需要的能量较大, 降低了辐射跃迁的概率, 有利于三线态寿命的延长。这样就保证了在生命过程中作为遗传信息载体的 DNA, 在它的电子激发能消失之前有足够的时间利用激发能来传递信息。三线态或许是物理能量转变为化学能量的一个中间阶段或过渡过程, 三线态电子不容易以发出磷光的形式释放能量, 而是将此能量用于反应分子的化学变化。这对 DNA 的复制、转录, 以及调控等生物化学反应具有重要意义。

三线态的磷光波长接近红外线, 其光量子的能量与生物体所利用的能量十分一致。如合成 DNA 和 RNA 的三磷酸核苷的高能磷酸键键能为  $4.186 \times 10^4 \sim 5.024 \times 10^4$  J/克分子, 相当于红外线区  $2 \sim 3 \mu\text{m}$  的光量子能量; 氢键键能约为  $2.3 \mu\text{m}$  光量子的能量。DNA 的电子激发能量处于红外波段不是孤立和偶然的, 而与 DNA 分子的结构、整体性质的电子结构以及许多生物能力学特征有关。在  $2 \sim 3 \mu\text{m}$  红外波段范围内, 纯电子激发和振动激发的能量正好相等, 容易产生频率相同、振动方式多种多样的电子激发, 使得 DNA 有可能进行多种多样、灵活、精确调谐的能量转移。因而, 只需很小的能量就能精确地储存和传递极其大量的信息。

生物体系要求在一定的长度内具有高度的有序排列, 在长距离内能以特定的方式对能量进行传输。DNA 大分子周围的液晶态有序水结构可以作为电荷载体, 例如电子、空穴、质子和离子等作为最初传递的基质。在很短的时间内, 电子的激发能有可能以激子转移、电子转移、自由基转移等方式进行传递。如果 DNA 周围的液晶态有序水结构遭到破坏, 就可能产生某些病理变化和畸形发育。癌细胞有很低级的组织结构, 其中的有序水结构也大为减少。

物质出现半导性的必要条件是满带与导带之间的宽度(禁带宽度, 即能隙)不能太大, 只要给电子以较小的激活能就可克服能隙从满带激发到导带而导电。具有共轭双键的有机半导体, 其分子链的长短对降低能隙有很大关系, 链越长,  $\pi$  电子所需激活能越小, 越容易出现半导性, DNA 大分子的长链正好满足这一要求。DNA 大分子既表现出共轭双键的效应, 又使得大量的非偶电子在基团之间的电子轨道重叠, 因而, DNA 分子的电子结构有可能出现半导性能带的形式。

从 DNA 分子周围的液晶态水结构, 以及 DNA 本身的电子结构、分子结构, 一直到细胞和生物整体都具有高度有序、有组织的复杂系统。这种包含巨大信息量的复杂结构的形成、保持, 以及进化发展, 与能量控制和信息传递之间有着十分复杂的相互依存关系。从亚分子水平探讨遗传物质的理化特性, 以及结构和功能的特点, 将有助于人们进一步认识生命现象的奥秘。

## 二、遗传物质中电子激发能的转移方式

前面从亚分子水平介绍了遗传物质的生物能力学特征，如大非偶电子、耐热性、三线态、液晶水结构等。这些特征不是孤立出现，而是互为条件、互相影响，并且综合表现出来统一的特征，从而使得遗传物质有可能进行灵活而且振动方式多种多样的微观活性能量（即电子激发能）的转移，并且利用电子激发能传递信息。由控制论可知，能量本身不是信息，在自动控制 and 通讯系统中，若没有能量的传递和转换，那么信息的传递和交换是不能实现的，因此，能量是信息的载体。传递信息需要的能量微不足道，如此小的能量可以携带和传递极其大量的信息。由于生物体的高度自动化，它能非常灵巧的传递和处理信息而不需要太大的能量。能量过大反而会破坏生物体精巧而精细的组织结构和信息传递；对有机体而言，要求有灵活的并且受到精确调控的多种多样的能量转移机制，以保证生命活动的正常进行。

目前认为在生物活细胞内电子激发能量转移的可能方式有：共振转移、重叠转移、络合物电荷转移、半导性能带转移、激子转移、自由基、质子转移和氢键等。

共振转移又叫感应转移或电磁偶联，是相同分子或不同分子之间的长距离的能量转移，是一种长程作用。电子激发能可以看成是一种振动，吸收能量的分子（受体）的振动电场处在已激发分子（供体）的电场中，并且供体的荧光光谱与吸收光谱有重叠部分，已激发分子的电磁振动就会引起吸收分子的同频振动，产生共振，从而转移电子的激发能。

遗传物质的核酸分子中各种原子团在不间断地振动和转动。由于原子团之间是磷酸酯键和氢键偶联，它们能像偶联振子那样的运动，于是电子激发能就可以通过电磁偶联在大分子中各原子团之间以及相邻分子之间进行迁移。通过这种方式，核酸分子中一个基团的能量就可以被其他任一个基团所吸收，使整个高分子形成统一的系统。产生共振转移的概率与电子激发态的寿命和波长有关。由于核酸分子中最重要的电子激发态是三线态，因此，三线态对产生电子激发能的共振转移十分有利。波长越长，对共振转移更为有利。

重叠转移是电子激发能的一种近程作用。当分子之间的距离小于  $2 \times 10^{-10} \sim 5 \times 10^{-10} \text{m}$  时，这种传递能量的方式易于产生。DNA 具有广义共轭系统的性质，分子中的嘌呤和嘧啶基都含有共轭双键系统，其中的  $\pi$  电子为整个系统所有，它们容易被激发并以重叠的方式传递能量。

络合物电荷转移在生物学过程中为普遍的能量传递方式。电荷转移表明组成络合物的一个分子 D（电子供体）的电子可以享用另一个分子 A（电子受体）的轨道，电荷迁移络合物的形成与组成它的分子的供、受电子的能力有关。当电子供体 D 与电子受体 A 外围的电子云互相重叠时，分子 D 的填满电子的轨道上将会有有一个电子部分或整个地转移到分子 A 的未能填满电子的轨道上。在生物大分子内的各基团之间可以产生电子的供、受体，形成类似于络合物电荷转移的方式传递能量。电子可以从一个基团的最高满带自发地转移到另一个基团的最低导带。如果大分子的结构和能量关系符合形成电荷迁移络合物的条件，则激发能就可以通过电子在这些由分子所组成的

骨架中进行转移。

电荷转移可分为自发和光致两种，前者叫强电荷转移，后者叫弱电荷转移。强电荷转移不需要光能激发就可自发产生。由于络合物电荷转移传递能量的大小与生物体所利用的能量大小十分一致，因此，DNA 也就可能利用这种传递能量的方式传递信息。

络合物电荷转移使电子从一物质向另一物质转移，其能量损失很小，不会引起分子结构或化学键的重新排列，这是一种不产生化学变化的亚分子过程。DNA 在复制和转录时，DNA 模板分子链本身不发生化学变化。因此，利用电荷转移传递信息对不发生化学变化的模板是非常适合的。

自由基是处于电子激发态的分子或分子碎片，具有很强的化学活性和特殊的电磁性质。DNA 分子中存在大量的相互作用的非偶电子层，处于三线态的电子因其自旋方向便成为非偶电子。经研究表明，处于三线态的分子往往是带有两个非偶电子的自由基。自由基的非偶电子与激发能的传递有着密切关系。因此，自由基在生命活动过程中具有相当重要的地位。化学反应中的简单自由基，其化学性质异常活泼，存在的时间非常短暂，对生物体往往起破坏作用，简单自由基能诱发基因突变和加速生物体的衰老；自由基的连锁反应能引起肿瘤细胞的产生。有人提出，在正常代谢状态下生物细胞和其中的 DNA 分子是否可利用自由基来传递能量和信息论的问题。在普通条件下存在另一类自由基，即由稳定而复杂的基团形成的自由基。在许多情况下，当聚合物粘度大到使长度较长的聚合基团无法移动时，部分自由基复合而释放能量并消失；另一部分自由基被聚合物分子所封闭而稳定下来。可见，细胞在正常代谢状态下，DNA 大分子中具有的自由基可能相当稳定。

在常温和生活状态下，DNA 分子本身具有高度有序的螺旋形结构，其周围还有液晶态的有序水结构阻碍自由基的扩散，形成了使其稳定的条件。除极少数外，许多自由基与饱和分子的反应活化能不超过  $4.1868 \times 10^4$  J/克分子。活化能的数值相当于高能磷酸键以及氢键和三线态的能量范围。因此，在生活状态下的活细胞及其中的 DNA 大分子有可能利用这种稳定的、长寿命的复杂自由基来转移能量和传递信息。

核酸具有很高的介电常数，它对能量的转移和信息的传递具有重要意义。在高介电常数的晶体中被激发电子的轨道可以笼罩许多分子，能量沿晶格迁移则表现为“正穴”（空穴）传递，与正穴对应的激发电子离正穴有一定距离，它们共同组成一个中性激发单位，称为激子。这种激发不是定域在某个分子上，而是属于分子的聚集体。所以，激子转移是非定域化激发的能量转移形式。激子转移通常是在相同分子的电子系统之间非常迅速的一种传递能量的方式。由于晶体中的质点排列非常规则，电子系统被激发后会振作起来，因而激发能以激子转移方式可以传递得很远。

生物学的许多基本过程不仅与电子的转移相联系，而且与质子的转移有关。生物高分子的表面有大量的质子，这些质子不停地运动，从而形成质子转移，质子转移的同时伴随着激发能的传递。DNA 大分子与周围分子的互相作用也可能受到质子运动的影响，质子的运动可与邻近类似的分子相呼应，构成能量转化和传递的系统，使 DNA 分子能利用这种方式传递信息。

以质子相互联系而成的化学键即为氢键。DNA 分子的两条单链以氢键维系并形成严格有序的双螺旋构型。氢键中质子的振动也能传递能量，其振动的能量与三线态和高能磷酸键的能量十分一致。在 DNA 复制和转录过程中，三磷酸核苷中高能磷酸键的能量很容易转移到氢键上并与模板链上的核苷酸进行配对，形成新的 DNA 或 mRNA 分子。DNA 分子中构成氢键的质子具有隧道效应。DNA 可能利用质子的隧道效应来传递能量和信息，从而在复制和转录时形成新的氢键；同时，质子的隧道效应还有助于 DNA 复制时使双螺旋解旋。

### 思考题与习题十六

- 16-1 信息量和熵在意义上有何不同？在同一系统中信息量和熵在数值上有何关系？
- 16-2 为什么说 DNA 分子具有储存极其大量信息的能力？
- 16-3 跳跃基因具有哪些性质？
- 16-4 细菌操纵子可分哪两大类？试分别简述它们的调控作用。
- 16-5 遗传物质的生物能力学特征有哪些？
- 16-6 遗传物质中电子激发能的转移有哪些方式？

(李宜贵)

## 第十七章 激光及其医学应用

---

学习本章后，你应：

---

1. 掌握激光的基本原理与特性。
  2. 理解激光的生物作用。
  3. 了解激光在基础医学研究与临床中的应用、医用激光器、激光的安全防护知识。
- 

激光是受激辐射光放大的简称，1964年经钱学森教授建议而得此名。它是20世纪最重大的科技成就之一。爱因斯坦在1917年提出基本原理，预言受激辐射的存在和光放大的可能。汤斯于1954年制成受激辐射微波放大器，梅曼于1960年制成世界上第一台激光器——红宝石激光器。激光以其特殊的发光机制与激光器结构而具有普通光源发出的光所无可比拟的优点，受到广泛重视，在理论与技术两方面得到迅速发展。到80年代便逐步形成一门新学科——光电子学，并发展为一个新工业部门——光电子工业。

就激光输出的波长范围而言，从远红外直到紫外甚至X光波段；波长可以是单一的，也可是多种可调的；方式可以是连续的，也可是多种形式的脉冲。就其功率水平而言，从 $10^{-3} \sim 10^5 \text{W}$ ，脉冲峰值可达 $10^{13} \text{W}$ ，目前激光器的品种已达数百种之多。激光的应用引起现代光学技术的重大变革，对整个科学技术的发展起了推动作用，在国民经济各方面有着广泛的应用前景。本章着重介绍激光的原理、特性及在医学中的应用。

### 第一节 激光的基本原理

#### 一、粒子的能级与辐射跃迁

**1. 粒子的能级与平均寿命** 粒子(分子、原子、离子等)总是处于一定的能态或能级，其中最低者称为基态，其余称为激发态。粒子处于基态最稳定，而处于激发态则不稳定，且停留时间既很短暂又互不一致。为此我们定义大量粒子在某激发态停留时间的平均值称为该激发态的平均寿命，一般在 $10^{-9} \sim 10^{-7} \text{s}$ 。某些平均寿命相对较长，在 $10^{-3} \sim 10^{-2} \text{s}$ 左右的激发态称为亚稳态。

粒子在能级之间实现跃迁必然伴随与外界交换能量的过程。跃迁只在满足所谓“选择定则”的能级之间才能实现，且各能级之间跃迁的概率也并不一致。

**2. 粒子能级之间的跃迁** 粒子实现能级间跃迁的方式有两种：一种是以光能形式吸收或释放称为光辐射或辐射跃迁；另一种是以非光能(例如热能)的形式吸收或释放称为非光辐射或无辐射跃迁。与激光发射有关的辐射跃迁包括吸收、自发辐射与受激辐射三种基本过程。

当光通过物质时,一个粒子吸收一个光子的能量  $h\nu = E_2 - E_1$  而实现由低能级  $E_1$  向高能级  $E_2$  跃迁的过程称为吸收,如图 17-1(a)所示。能引起吸收的光子称激发光子,它对粒子起激发作用,其结果是入射光子被吸收。处于高能级的粒子总是力图向低能级跃迁而趋于稳定,这种完全自发地从激发态向较低能态跃迁同时释放出光子的过程称为自发辐射,如图 17-1(b)所示,其辐射光子的能量  $h\nu_{21} = E_2 - E_1 (E_2 > E_1)$ 。对于不同粒子或同一粒子在不同时刻所发出光子的特性,即频率、相位、进行方向、偏振状态等都各不相同。显然这是一种随机过程,发出的是非相干的、向四面八方传播的自然光。这正是普通光源的发光机制。一个处于高能级  $E_2$  的粒子受到一个能量  $h\nu = E_2 - E_1$  的光子“诱发”而跃迁到低能级  $E_1$ ,同时释放一个与之特性完全相同的光子的过程称为受激辐射,如图 17-1(c)所示。其结果是出射光比入射光增加 1 倍,而且是相干光。

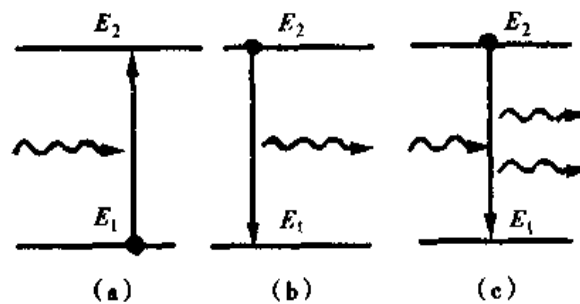


图 17-1 辐射跃迁的三种基本过程

在光与粒子系统相互作用所发生的辐射跃迁中,以上三种基本过程总是不可分割地同时存在。然而在不同的条件下它们各自发生的概率不同,因此总的宏观效果也不同。究竟哪一种跃迁占优势,由系统中的粒子数在各能级的分布情况而定。

## 二、粒子数按能级的分布

**1. 玻耳兹曼分布** 设处于高能级  $E_2$  与低能级  $E_1$  的粒子数密度分别为  $N_2$  与  $N_1$ ,而在两能级间跃迁时,各自变化  $dN_2$  与  $dN_1$ 。在温度为  $T$  的热平衡态,系统中粒子数按能级服从玻耳兹曼分布,即处在能级越高的粒子数越少,  $N_2 < N_1$ 。例如氖原子的 3s 态与基态的能量差为  $2.704 \times 10^{-19} \text{J}$ ,在常温  $T = 300 \text{K}$  时两能级原子数密度之比  $N_2/N_1 = e^{-653} \ll 1$ ,即氖气的原子此时几乎都在基态。表明当系统处于正常状态时,若有入射光,显然  $dN_2/dN_1 < 1$ ,则吸收过程占优势。宏观效果是光被减弱。而处于高能级的粒子向较低能级跃迁时,自发辐射较之受激辐射又占有极大优势。总之,在正常状态下,受激辐射总是被湮没,宏观上得不到光放大的效果。

**2. 粒子数反转分布** 为了实现光放大,必须破坏粒子数在热平衡态下的玻耳兹曼分布。为此定义粒子数在能级上能实现  $dN_2/dN_1 > 1$  的分布称为粒子数反转分布。



这种分布在辐射跃迁中将使受激辐射占优势，系统对入射光将得到光放大的效果。显然，这是一种非热平衡状态，也称“负温度”状态。

如何实现由正常分布向反转分布的转变呢？这需要两个条件：第一要求介质有适当的能级结构，即有两个以上与反转分布有关且有亚稳态的能级结构，这种能实现粒子数反转分布的介质称为激活介质。第二要求有外界能源供给能量，使正常分布下处于低能态的大量粒子尽快被激发或抽运到较高能态去。这样，在外界能源不断的激励下，激活介质中的大量粒子被抽运到高能态，从而可在亚稳态或平均寿命相对较长的激发态出现粒子积累，使其与较低能态之间形成粒子数反转分布。在满足频率条件的光子(来自外界或自发辐射)“诱发”下，导致形成反转分布的两能级间出现受激辐射，且占优势，继而实现对光的放大。

### 三、光学谐振腔

实现了粒子数反转分布的激活介质尽管能对光进行放大，但还不能得到激光。使受激辐射在有限体积的激活介质中能持续进行，光可被反复放大形成稳定振荡的装置称为光学谐振腔。经光学谐振腔输出的才是激光。

光学谐振腔由置于激活介质两端的两块互相平行，且与激活介质轴线垂直的光学反射镜(平面或球面)构成(图 17-2)。其中一端为全反射镜，反射率接近 100%；另一端为部分反射镜，反射率在 90% 以上。受激辐射中沿腔轴方向往返行进的光可被反复多次雪崩式放大，直到足以抵偿各种损耗时，可在腔内形成持续稳定的振荡而由部分反射镜一端射出来即为输出之激光。凡是不沿腔轴方向行进的光子都将很快通过腔的侧面逸出，自发辐射的光子也不能参与光振荡过程。

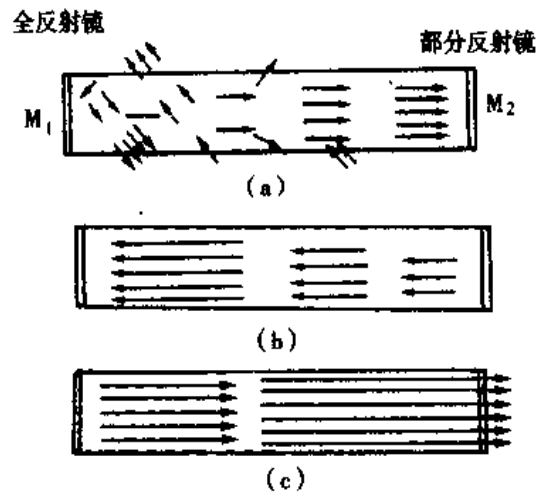


图 17-2 光学谐振腔内激光产生原理图

在激活介质产生受激辐射形成光放大的同时，谐振腔内还存在许多光能的损耗因素。第一类称为内损耗，是由于介质对光的折射、散射、吸收等造成的。第二类称为镜损耗，是由于反射镜产生的吸收、散射、衍射、透射(包括输出的激光)等造成的。因此，欲产生激光，光学谐振腔还必须满足阈值条件，即光的放大(或增益)超过或至少等于上述光损耗。

为描述谐振腔的质量，引入品质因数  $Q$

$$Q = 2\pi\nu \text{ 谐振腔内储存的能量/每秒钟损耗的能量} \quad (17-1)$$

腔内损耗低则  $Q$  值高，反之则  $Q$  值低。由于损耗中包括输出部分， $Q$  值也不是越高越好，因此在设计谐振腔时应对其合理选择。

光学谐振腔还决定激光的模式，即电磁场在腔中的振荡方式。激光的模式分为纵

向模式与横向模式两种。纵向模式，简称纵模，是指电磁场沿谐振腔轴向的振荡方式。光在腔中来回反射形成相干叠加，只有满足相位差条件的光才能形成稳定的驻波，因此腔中只能允许某些特定频率的光在其中持续振荡。不同的纵模表达光波在腔内轴向不同的驻波场分布。只有一个频率输出称为单纵模，含有几个频率称为多纵模。显然谐振腔具有选频作用，根据纵模可分辨输出激光的频率，从而也保证输出激光的单色性。

横模是指电磁场沿谐振腔径向的稳定分布，即激光束在其横截面上的光强或光斑分布。每一种分布称为一个横模。其中单横模或基模的光斑为一光强呈高斯分布的圆形亮斑，由于其光束性质良好，对于医用激光器具有特殊的意义。

至此作一小结，光学谐振腔的主要作用是：第一，使受激辐射光放大过程能在有限体积的激活介质中持续进行，且在满足阈值条件下形成光振荡，输出激光。第二，对输出激光束的方向给予限定。第三，有选频作用。第四，调整激光的模式。第五，通过调Q、锁模等技术以改善激光的输出波形。

#### 四、激光器与激光

实现激活介质的粒子数反转分布是产生激光的必要条件，具备光学谐振腔是产生激光的充分条件。产生激光的装置称为激光器，对于任何激光器，都必须满足上述两个条件。由此可以看出激光器一般应由三部分组成，即工作物质、激励装置与光学谐振腔(图 17-3)。

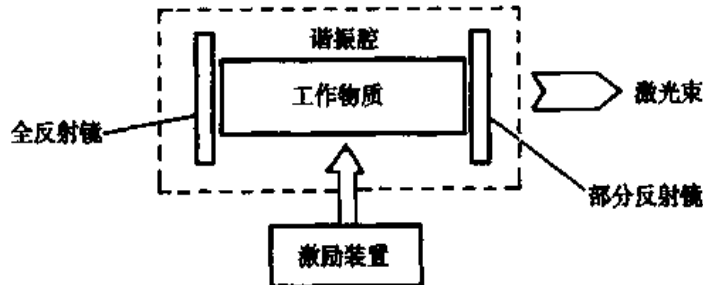


图 17-3 激光器结构原理图

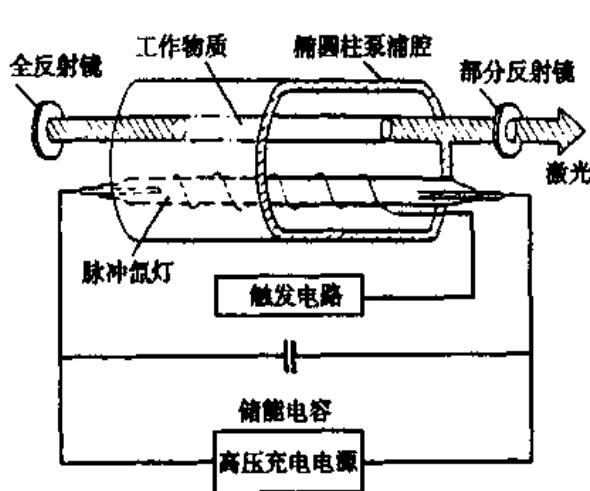


图 17-4 红宝石激光器示意图

1. 工作物质 工作物质包括激活介质与一些辅助物质。激活介质内激活粒子的能级中参与受激辐射，即与出现反转分布有关的能级称为工作能级。一般依工作能级的多少将激活介质分为“三能级”与“四能级”系统。

现以红宝石激光器(图 17-4)为例说明三能级系统的工作过程。作为工作物质的红宝石棒两端的反射镜，平行度极高。一端镀银为全反射镜，另一端为部分反射镜，激光由此端输出。

红宝石是一种  $\text{Al}_2\text{O}_3$  中掺入少量 (0.05% ~ 1%)  $\text{Cr}_2\text{O}_3$  的晶体, 在光照下呈淡红色。  $\text{Cr}^{3+}$  均匀分布在晶体中, 图 17-5 是  $\text{Cr}^{3+}$  的能级图。  $\text{Cr}^{3+}$  在激励光源氙灯的照射下吸收合适的光子从基态  $^4A_2$  跃迁到高能态  $^4F_1$  与  $^4F_2$ , 而后经无辐射跃迁至亚稳态  $^2E$  (包括两个子能级  $2\bar{A}$  与  $\bar{E}$ ), 其自发辐射概率很小, 于是在此出现粒子的积累, 在氙灯强大的抽运下  $^2E$  与基态间可形成粒子数反转分布, 出现受激辐射而发出 694.3nm 与 692.9nm 两条谱线  $R_1$  与  $R_2$ 。 其中  $R_1$  线跃迁概率大, 实际上只有此线形成振荡, 故红宝石激光器输出波长为 694.3nm 的红光。 由于受激辐射下能级是基级, 实现反转分布很难, 为此激励能源必须很强, 转换效率也很低。 这是三能级系统的显著缺点, 不宜作连续输出。

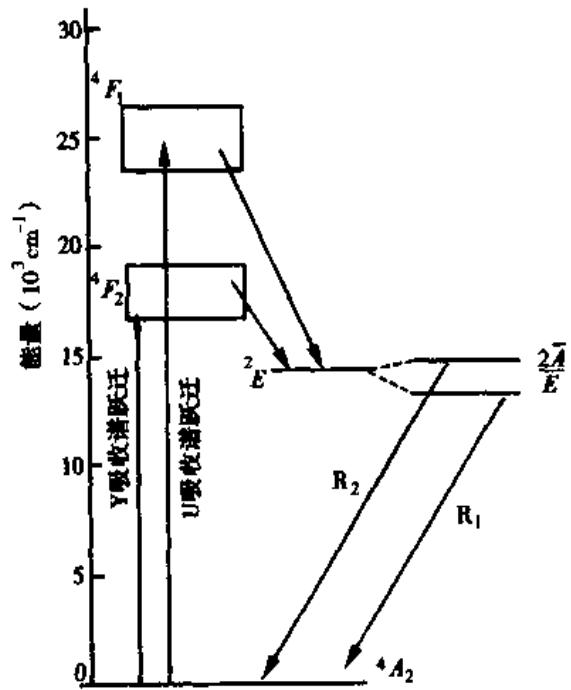


图 17-5  $\text{Cr}^{3+}$  的能级图

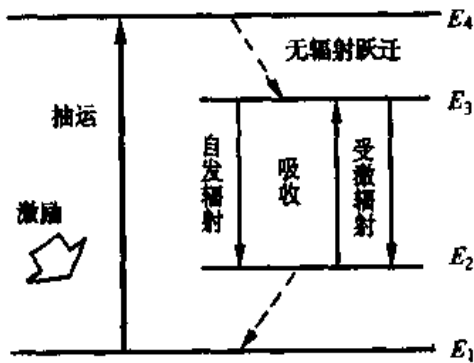


图 17-6 四能级系统实现粒子数反转图

激光器去泵浦另一种激光器等等之分。

### 3. 光学谐振腔 前面已述, 不再重复。

值得指出的是近年出现的自由电子激光是一种非受激辐射, 其产生机制不同于前述激光, 它无需粒子数反转分布, 具有一系列优于普通激光器的特点。中国科学院高能物理研究所已于 1993 年制成我国第一台红外自由电子激光装置。

## 第二节 激光的特性

激光与普通光源发出的光就其本质而言都是电磁辐射, 但它除具有普通光的一切性质外, 还具有一些普通光没有的特性, 使得在光的发射与传播时形成的激光束中大

量光子的整体行为有别于普通光束，因而使它具有特殊应用。

### 一、方向性好

发散角是衡量光束方向性好坏的标志，方向性表明光能量在空间分布上的集中性。普通光源发出的自然光射向四面八方，常常使用聚光装置来改善它的方向性。激光由于受激辐射的光子行进方向相同以及谐振腔对腔内离轴光子的淘汰作用，使得只有沿轴向的光波才能形成振荡并输出，因而有很好的方向性。激光束的发散角一般在  $10^{-4} \sim 10^{-2} \text{rad}$ ，与普通光束比相差  $10 \sim 10^4$  倍。这一特性被用作精密长度测量。例如曾利用月球上的反射镜对激光的反射来测量地球与月球之间的距离，其精度可达几个厘米。激光束是理想的平行光束，还被广泛用于准直、目标照射、通讯和雷达等方面。

由于激光器输出端造成光的衍射，使激光束的发散角以其衍射角为极限而不能无限减小。

### 二、亮度高、强度大

亮度是衡量光源发光强弱程度的标志，表明光源发射的光能量对时间与空间方向的分布特性。激光器由于其输出端发光面积小、光束发散角小、输出功率大，而使其亮度高，尤其是超短脉冲激光的亮度可比普通光源高出  $10^{12} \sim 10^{19}$  倍。因此，激光器是目前世界上最亮的光源。例如将长 1m、端面输出孔径为 4mm、发散角为 3mrad 的 40W 二氧化碳激光管与一支长 1m、直径为 40mm、发散角为  $\pi \text{rad}$  的 40W 日光灯管输出光的亮度进行比较，前者是后者的 100 亿倍。

对同一光束，强度与亮度成正比。激光极高的亮度加之方向性好而能被聚焦成很小的光斑，故激光的强度比普通光也大得惊人。目前激光的输出功率可达  $10^{13} \text{W}$ ，可聚焦到  $10^{-3} \sim 10^{-2} \text{mm}$  之内，强度可达  $10^{17} \text{W} \cdot \text{cm}^{-2}$ ，而氧炔焰的强度不过  $10^3 \text{W} \cdot \text{cm}^{-2}$ 。故可用于制造激光武器以及工业上的打孔、切割、焊接等。利用高强脉冲激光加热氘和氚的混合物可使其温度达到 0.5 亿 ~ 2 亿度，有望用于实现受控热核聚变。在临床治疗中，激光这一特性被用作手术刀与用于体内碎石。

### 三、单色性好

谱线宽度是衡量单色性好坏的标志，谱线宽度越窄，颜色越纯，则单色性越好。单色性表明光能量在频谱分布上的集中性。普通光源发出自然光的光子频率各异，含有各种颜色。激光则由于受激辐射的光子频率(或波长)相同与谐振腔的选频作用而使其具有很好的单色性。例如普通光源中单色性最好的氪( $\text{Kr}^{86}$ )灯(605.7nm)谱线宽度为  $4.7 \times 10^{-4} \text{nm}$ ，而 He-Ne 激光器发出的红光(632.8nm)谱线宽度则小于  $10^{-8} \text{nm}$ ，两者相差数万倍。故激光器是目前世界上最好的单色光源。

由于光的生物效应强烈地依赖于光的波长，使得激光良好的单色性在临床治疗上获得重要应用。激光的单色特性在光谱技术、全息技术及光学测量中得到广泛应用，已成为基础医学研究与临床诊断的重要手段。

## 四、相干性好

由自发辐射产生的普通光是非相干光，而受激辐射光子的特性使激光具有良好的相干性。

同一地点、不同时刻发出的光相干，即空间同一位置在相同时间间隔  $\tau_c$  的相位关系不随时间而变化，称为光的时间相干。 $\tau_c$  称为相干时间，而  $L_c = c\tau_c$  则称相干长度。 $\tau_c$  或  $L_c$  越长则光的时间相干性越好。时间相干性起因于粒子发光的间断性，由物理光学可知相干时间就是粒子发光的持续时间，而粒子在受激辐射上能级的平均寿命  $\tau$  即是粒子相应发光的持续时间，故有

$$\tau_c = \tau \propto 1/\Delta\nu \quad (17-2)$$

受激辐射上能级的平均寿命很长，其谱线宽度 ( $\Delta\nu$ ) 很窄，因此激光的时间相干性很好。例如氪 ( $Kr^{86}$ ) 灯的相干长度只有几十厘米，而单模稳频 He - Ne 激光器的相干长度达几十公里，两者相差十万倍。

同一时刻、不同地点发出的光相干，即空间不同位置在同一时刻的相位关系不随时间而变化，称为光的空间相干。满足此相干的空间发光范围称相干面积，相干面积越大则光的空间相干性越好。空间相干性起因于粒子发光之间的联系，尤其是相位关系。受激辐射的光子在相位、频率、偏振状态上都相同，再加之谐振腔的选模作用，使激光束横截面上各点间有固定的相位关系，所以激光的空间相干性也很好。

激光器的问世，为我们提供了最好的相干光源，促使相干技术获得飞跃发展，全息摄影才得以实现。

## 五、偏振性好

受激辐射的特点表明激光束中各个光子的偏振状态相同。利用谐振腔输出端的布儒斯特窗在临界角时只允许与人射面平行的光振动通过，可输出偏振光，并可对其调整。因此，激光具有良好的偏振性。

上述激光在五个方面的特性彼此是相互关联的，可以概括为两大方面。第一，与普通光源相比，激光器所输出的光能量的特别之处不在于其大小而在于分布特性，即光能量在空间、时间以及频谱分布上的高度集中，使激光成为极强的光。第二，激光是单色的相干光，而普通光是非相干光。显然，这些特性的产生都是源于激光特殊的发射机制与光学谐振腔的作用。这些特性正在不断地获得应用。例如激光通信是利用信号对激光载波进行调制而传递信息，其最大优点是传输的信息量大，理论上红外激光可同时传送上千亿个电话。利用激光技术获得低温的方法叫激光冷却，现已可使中性气体分子达到  $10^{-10}K$  的极低温状态。朱棣文 (S. Chu)、达诺基 (C. C. Tannoudji) 和菲利浦斯 (W. D. Phillips) 因在激光冷却和捕陷原子研究中的出色贡献而获得 1997 年诺贝尔物理学奖，其中朱棣文是第五位获得诺贝尔奖的华人科学家。

### 第三节 激光的医学应用

医学是激光的首批应用领域。1961 年世界上第一台医用激光器——红宝石视网

膜凝固机在美国问世,至80年代末已建立较为系统、完整的理论体系。于是,一门新的交叉学科——激光医学便逐渐形成了。目前它包括激光医学基础、临床检测诊断与治疗、医学生物学用激光器械与技术、激光的安全与防护等四部分内容。

## 一、激光的生物作用

激光对生物组织所施加的作用,并存在于由此引发的一系列理化过程中,称之为激光的生物作用。生物组织因受激光照射而出现的各种应答性反应、效果或变化称之为激光的生物效应。反之被作用的生物组织也将引起激光参量的变化。前者是因,后者是果,且后两者又分别是激光临床治疗与诊断的依据或基础。这就是目前研究的三方面内容及其重要意义。在医学领域,激光对被照射之生物组织,若能直接造成不可逆性损伤者称其为强激光;若不能直接造成不可逆性损伤者称其为弱激光。

关于激光的生物作用一般认为有五种,现简要分述如下。

**1. 热作用** 生物组织在激光照射下吸收光能转化为热能,温度升高,这即是热作用。低能量光子(红外激光)可使组织直接生热,高能量光子(可见与紫外激光)则多需经过一些中间过程而使用组织生热。

随着温度的升高,在皮肤与软组织上将由热致温热(38~42℃)开始,相继出现红斑、水疱、凝固、沸腾、炭化,燃烧直至5730℃以上的热致气化等反应。在临床上,热致温热与红斑被用于理疗;沸腾、炭化、燃烧统称为“汽化”,被用于手术治疗,热致气化用于直接破坏肿瘤细胞与检测微量元素等等。

温升将引起生物组织内的热化反应及生物分子变性,对代谢率、血液循环以及神经细胞带来影响,造成热损伤。对于不同的照射时间,生物组织损伤的阈值温度不同。照射时间越短,生物组织能耐受的温度越高。

**2. 机械作用** 生物系统吸收激光能量时会产生蒸发和机械波,前者一定伴有后者,而后者不一定伴有前者发生。机械波是由一系列压强因素造成的。激光照射生物组织,可直接或间接产生对组织的压强称为激光的机械作用,也称为激光的压强作用。

光压是激光本身辐射压力所形成的压强,是光子将其动量传递给被照射组织的结果。气流反冲压是当组织吸收聚焦的激光能量急剧升温,直至沸腾,从受照处喷出气流并夹有组织碎片,同时对组织形成与气流方向相反的反冲压力。此项对致密组织明显。内部汽化压是发生在组织内部或封闭腔(眼球、脑室)内部的汽化所形成的类似冲击压的瞬变压强。可使其内部“爆炸”,造成的损伤是定域的。体膨胀超声压是由于被强激光照射的生物组织迅速升温形成汽化和体膨胀,从而在其边区产生的超声振动发出在生物体内传播的超声波所产生的压强,可造成体内远距离的损伤。强脉冲激光照射生物组织形成的等离子体强烈吸收光能引起体膨胀,产生冲击波,破坏局部组织,此压强称为等离子体膨胀压。电致伸缩压是在强激光的强电场作用下生物体被极化而出现形变,即电致伸缩所产生的压强。它将在体内激起冲击波、超声波。这种压强显然与能量吸收无直接关系,透明越好的组织此项压强越显著。光压形成一次压强,其他压强因素形成二次压强。前者一般可忽略,只有超短波激光的光压才予考

虑；后者显著，尤其体膨胀超声压是形成机械波最重要的因素，它大约比光压大6~7个数量级。激光在生物组织中产生的机械波由于频率高还具有空化作用，从而引起组织发生化学变化，结果使机械能直接转化为化学能。

激光的机械作用对临床治疗有利也有弊。例如在眼科利用二次压强打孔，可降低眼压，治疗青光眼、白内障。在外科手术中用于切开组织等。而在眼球与颅内由于二次压强剧升形成“爆炸”性损伤，甚至死亡。二次压强也可使被照射的肿瘤组织被压向深部或反向飞溅而造成转移等。

**3. 光化作用** 生物大分子吸收激光光子的能量受激活而引起生物组织内一系列的化学反应称之为光化反应。激光照射直接引起机体发生光化反应的作用称为光化作用。光化反应与热化反应不同(在产生原因、产物、对光频的选择、受温度影响等方面)。光化反应分为两个过程，初级过程有光参与，产物不稳定，可进一步触发化学反应，即次级过程，生成最终的稳定产物。次级过程一般不需光参与。

光化作用的基本规律由两个定律表达。光化学第一定律(吸收定律)内容是：只有被分子吸收了的光子才能引起光化反应。由此推知光化反应具有波长选择性。光化学第二定律(量子定律)内容是：在光化反应中，每个分子只吸收一个单色光的光子而成为光化激活分子。因此，光化反应的程度，即最终产物的多少应与被吸收的光子总数，亦即激光的总剂量成正比。应指出第二定律不适用于强激光，因为生物组织对强激光可发生一个分子吸收多个光子，即多光子(或非线性)吸收的现象。即使是红外激光，只要光强足够也能引起光化反应。

光化反应有光致分解、光致氧化、光致聚合、光致异构以及光致敏化等类型。其中光致敏化是指生物系统所特有的由光引起的，在敏化剂参与下发生的化学反应。这种反应因有无氧分子参加而分为两类，前者称光动力学作用，常用的敏化剂有血卟啉衍生物(HpD)等；后者即无需氧分子参加的光致敏化反应，常用的敏化剂有咪喃香豆素等。敏化剂能有选择地长时间集中于体内病变组织，并在适当波长激光照射下发生光致敏化反应。因而，光致敏化对肿瘤的治疗具有重要的意义，并已作出贡献。光化作用还可引起红斑效应、色素沉着、维生素D合成等生物效应。

由于激光有高度的单色性和足够的光强，使得它的光化作用被应用于杀菌、同位素分离、物质提纯、分子剪裁等方面。

**4. 电磁场作用** 激光是电磁波，激光对生物组织的作用就是电磁场对生物组织的作用。一般认为这一作用主要是电场所致。强激光可在组织内形成 $10^6 \sim 10^9 \text{V} \cdot \text{cm}^{-1}$ 的高强电场，从而使组织中产生光学谐波、电致伸缩、受激拉曼散射、受激布里渊散射、倒转致辐射、等离子体等，并能导致生物组织电系统的重新分布，即可使无序的生物分子发生电离、极化，趋于有序。这又将进一步在组织内引起高温、高压，从而使组织受到破坏或损伤。

关于激光的电磁场作用，目前详细的研究报道还较少。

**5. 生物刺激作用** 生物刺激作用主要是弱激光的作用。弱激光对生物过程(例如血红蛋白的合成，糜蛋白酶的活性，细菌的生长，白细胞的噬菌作用，肠绒毛的运动，毛发的生长，皮肤、粘膜的再生，创伤、溃疡的愈合，烧伤皮片的长合，骨折再生，消炎等)、

对神经、通过体液或神经-体液反射而对全身、对机体免疫功能等都有刺激作用。

目前观察、研究较多的是弱 He - Ne 激光的刺激作用,发现它对生物分子、细胞、细菌与微生物都有作用,并总结出定量的规律:一是能量密度小时起兴奋作用,能量密度大时起抑制作用。这是相对受照射的生物过程而言的;二是刺激作用有累积效应,最终效果取决于总剂量;三是刺激作用强弱与刺激次数(等间隔、等剂量)的关系呈现出抛物线特征。应指出以上规律对于其他波长的激光是否成立尚待研究。对于 He-Ne 激光刺激作用的机制研究目前也尚不成熟。为此,在前苏联与东欧提出了生物电场、色素调节、细胞膜受体、偏振刺激、受体蛋白质等五种设想。这些设想都是根据各自的实验结果提出来的,都有不完善之处,并有持不同意见者。尽管如此,弱激光的生物刺激作用却已被广泛应用于临床,效果是肯定的。

对于以上激光的五种生物作用,在临床应用上,强激光主要表现为机械作用、电磁场作用与光化作用,弱激光主要表现为生物刺激作用与光化作用,而热作用则在各类激光中普遍被利用。目前研究较成熟的是热作用和机械作用,而生物刺激作用则只在前苏联、东欧和我国较受重视。

影响激光与生物组织相互作用的因素有两方面。

一方面是激光的性能参量,其中有:波长(由于不同波长光子的能量不同,将直接影响与生物组织的相互作用及其过程);作用于靶组织的激光能量( $E$ )与能量密度( $D$ ,也称物理剂量,即垂直作用于靶组织单位面积的能量);激光功率( $P$ )与功率密度( $I$ ,即强度);作用时间( $t$ )及其间隔。 $D = I \cdot t$ ,但对于生物组织若  $I$  小于某种临界值,则  $t$  无论多长都无效果。故在临床上必须考虑构成  $D$  的四个要素: $P$ 、 $t$ 、 $S$ (组织受照面积)与  $\theta$ (激光入射角),还有激光输出方式(例如连续、脉冲、调  $Q$ 、锁模等不同方式对生物组织作用过程、效果不同)、光强分布、光束发散角、相干、偏振等因素。

另一方面是生物组织的性质,其中有:生物组织的物理性质,例如光学性质(反射率、吸收率、透射率、散射系数等)、热学性质(热导率、热扩散率、热传递方式等)、机械性质(密度、弹性等)、电学性质(电阻抗、电极化率等)、声学性质(声阻抗、声的反射率、吸收率等)等等。组织的生物特性,例如色素、含水量、血流量、供氧、代谢等状态以及组织的性质、结构与不均匀性等。生物剂量,即直接将生物组织对激光辐照的反应强弱程度按照一定标准进行分级。

把握以上诸因素及其影响。对于激光医学基础研究与临床应用都是十分重要的。

## 二、激光在基础医学研究中的应用

### 1. 激光对生物分子、细胞、组织的作用与效应

对生物分子:激光作为刺激源可在分子水平上调整蛋白质与核酸的合成与活性;影响 DNA 的复制、各种酶的活性与功能、氨基酸的变化等。温升将加快酶的催化作用,但当温升超过损伤阈值时,可引发热化反应以及蛋白质的凝固、变性。生物大分子吸收光子能量受激活产生受激原子、分子和自由基,引起一系列光化反应,使生物分子在组成、性质、构型等方面出现不可逆的改变。高强度激光照射生物组织产生的



光学谱波中有的波长正处于蛋白质、核酸的吸收峰，从而引起对这些谱波的吸收而导致变性。

对细胞：激光问世以来，一方面为细胞生物学的研究提供了全新的手段与技术；另一方面就各类激光的照射对细胞器、细胞质、细胞核、线粒体等及细胞性质与功能等的影响作了广泛研究，在此基础上已逐渐形成一门新的学科—激光细胞生物学。其研究方法大体分为两类，一类是利用激光原光束或扩束照射群体细胞；另一类是利用激光微光束照射单个细胞或细胞内某一特定部分。

激光通过对细胞的作用而影响细胞的增殖、分化、遗传、发育、凋亡、代谢以及免疫等过程或功能，而且这种影响往往还有双向作用。其含义有两层，一层是照射剂量小则兴奋，大则抑制；另一层是可使细胞功能从不同方向的偏离恢复正常。对于肿瘤细胞，激光有三种作用：一是热凝，即利用在 41 ~ 45℃ 癌细胞比正常细胞对热更敏感来达到热杀癌细胞而保留正常细胞的目的。二是气化，即利用强激光照射，使温度剧升至 5700℃ 直接气化癌细胞。三是光致敏化作用，尤其是光动力学作用。以上作用为临床治疗癌症提供了三种激光疗法。

对组织：激光照射组织，当剂量足够大时将造成对组织的损伤直至完全破坏。这种损伤分为热损伤与非热损伤两大类。一般多为热损伤，是由于热作用导致组织的凝固、汽化(包括炭化、燃烧)、气化所造成的。另一类非热损伤，包括机械作用导致的冲击波对组织的损伤，甚至远距离损伤；强电场作用导致的光击穿或产生等离子体；光化作用导致的光化激活组织，发生光化反应造成对组织的损伤等。实际过程中往往是一种作用为主并伴有其他作用或多种的协同作用造成对组织的损伤。激光照射靶组织一般有两种情况：一种是激光束焦斑落于组织表层造成开放性损伤。另一种是激光束聚焦于组织内部造成封闭性损伤，损伤中心被正常组织所包围。激光停止照射后在靶区还会出现充血及水肿现象。

激光除对组织有损伤作用外，还有修复作用。由于激光的生物刺激作用加之温热、光化、机械等作用对细胞的影响以及对修复机制的调动，使得受损伤的组织在一定剂量范围内的激光照射下能加快修复与再生的过程。

上述激光对组织的损伤与修复作用，正好分别是强、弱激光用于临床治疗的依据与基础。

**2. 用于医学基础研究的激光技术** 激光的问世为医学基础研究提供了新的技术手段，简述如下。

激光微光束技术：激光经透镜或显微镜光学系统聚焦后可形成强度很高而光斑直径在微米量级的微光束。利用此微光束可进行细胞水平的研究，形成激光的光镊术、显微照射术、细胞打孔术、细胞融合术等以实现对细胞进行俘获、转移、穿孔、移植、融合及切断等微操作。激光微光束的另一种应用是激光微探针分析术，即标本的微区在激光微光束照射下被汽化，同时用摄谱仪或质谱仪记录进行微量和痕量元素的定性或定量分析。此项技术被用于测定各种生理离子及痕量元素在软组织中的分布、生物矿化结构中痕量元素的分析及矿化过程的研究、生物组织中有毒痕量元素的检测、体液中各种元素含量的分析及生物样品中有机化合物的定量测定等。

**激光流式细胞计：**这是激光、电子检测与计算机等多种技术与流式计数方法结合而形成的一种新型生物医学仪器。其原理是让染色细胞在稳定的液体流动中排队成行，逐个依次且恒速通过激光束的焦斑区。用探测器检测细胞被激光照射后所发出的荧光与散射光并经计算机处理而自动显示结果。它可对细胞逐个进行定量分析与分选，其特点是分析速度快、灵敏度高、分选纯度高，可对一个细胞同时定量测定多种参数(例如 DNA、RNA 含量、细胞体积等)等。这一新技术在细胞生物学、免疫学、遗传学、肿瘤学以及药学等方面有广泛的应用前景。

**激光拉曼光谱技术：**当光子与物质分子相互作用时，除有与入射光频率相同的瑞利散射外，还有由于非弹性碰撞而在其谱线两侧对称分布的散射光，称之为拉曼散射。它较之瑞利散射的频移，即拉曼频移与物质分子的振动、转动能量级结构有关，而与入射光频率无关，故可用拉曼光谱对生物分子进行结构分析。由于拉曼散射的强度只有瑞利散射的万分之一，一般不易观测到。只有用高强度、高单色性以及谱线范围宽广的激光作激发光源，才使激光拉曼光谱具有实用意义。加之它对样品几乎无损害，可让样品处于与生物活性物质相同的条件下进行分析等优点，此项技术已在核酸与蛋白质的高级结构、生物膜的结构和功能、酶的催化动力学、药理学(特别是抗癌药物与癌细胞的作用机制)等的研究中得到应用。

**激光多普勒技术：**这是利用激光照射运动物体所发生的光的多普勒效应进行检测的技术。激光多普勒血流计可用于对人体甲皱、口唇、舌尖微循环与视网膜微血管等的血流速度进行检测。激光多普勒电泳是应用激光多普勒效应与电泳技术结合的一种分析、检测新技术，可快速自动准确地测量生物细胞及大分子的电泳迁移率、表面电荷、扩散系数等重要参量。此外，激光多普勒技术还用于对巨细胞质流、精子活力、眼球运动、耳听力等的测定。由于此项技术具有极高空间分辨率、快速、灵敏、连续、非侵入性等特点，被应用于微循环、血液流变学、病理生理学、免疫学等方面的研究。

**激光全息显微技术：**全息术是利用光的干涉在底片上记录被摄物体反射光的频率、强弱与相位信息，再利用光的衍射重现被摄物体的三维空间图像。正是激光具有高度的时间与空间相干性，以它作光源才使全息术得以实现。激光全息显微技术是激光全息术与光学显微系统结合的产物。它具有分辨率高、像差小、景深大、能对活标本进行动态观察等优点，被用于对细胞的观测分析。

**激光扫描共聚焦显微镜：**这是激光与显微镜、光度技术及计算机图像分析技术结合的产物。是形态学、分子与细胞生物学、神经科学、遗传学、药理学等领域研究的有力工具。

除上述外，还有激光荧光显微技术、激光漂白荧光恢复测量技术、激光扫描细胞计等激光技术用于医学基础研究。

### 三、激光的临床应用

**1. 激光诊断方法** 由于激光具有极好的单色性、相干性与方向性，而为临床诊断提供了方法和手段。以光学分析分类，激光诊断一般可有如下方法：激光光谱分析

法(荧光光谱、微区光谱、拉曼光谱等)、激光干涉分析法(全息术、干涉条纹视力测定、视觉对比敏感度测量、散斑技术等)、激光散射分析法(多普勒技术、静态和动态散射技术、闪烁细胞计等)、激光衍射分析法(用于测红细胞变形能力)、激光透射分析法(用于检查软组织肿物)、激光偏振法(用于鉴别肿瘤细胞)以及其他激光分析法(流式细胞计、扫描检眼镜等)。激光诊断技术为诊断学向非侵入性、微量化、自动化及实时快速方向发展开辟了新途径。

**2. 激光治疗方法** 激光作为一种手段应用于临床已遍及到内科、外科、妇科等各科近 300 种疾病的治疗,且兼有中、西医的疗法。其基本方法有四大类。①激光手术治疗:这是以激光束代替金属的常规手术器械对组织进行分离、切割、切除、凝固、焊接、打孔、截骨等以祛除病灶以及吻合组织、血管、淋巴管、神经等。手术用激光治疗机统称光刀,按其作用机制分为热光刀(利用可见与红外激光对组织的热作用与二次压强作用进行手术,刀头焦点附近不同区域接触组织有不同效果)与冷光刀(利用紫外激光的光致化学分解作用进行手术,术中切口两侧无热损伤)两大类。激光手术有多功能、止血效果好、感染少、质量高、可选择性破坏特定组织等优点,还可用于进行各种精细的显微手术。②弱激光治疗:弱激光以其特有的生物作用被用于治疗几十种疾病,其方法又分为三种:激光理疗(以弱激光为物理因子进行原光束、扩束、光纤与腔内照射的物理疗法)、激光针灸(以弱激光光束直接照射穴位,兼有针与灸的作用)与弱激光血管内照射疗法(ILLIT,以弱激光光针插入静脉照射循环血液的疗法)。③激光光动力学疗法(激光 PDT):是利用光动力学作用主要治疗恶性肿瘤的方法,有体表、组织间、腔内照射及综合治疗四种方式。④激光内镜术治疗:是通过内镜对内腔疾病进行激光治疗的方法,可用于腔内手术、理疗与光动力学治疗,具有很大的发展优势。

#### 四、医用激光器

应用于医学领域的激光器一般可按工作物质形态(固体、气体、液体、半导体等)、发光粒子(原子、分子、离子、准分子等)、输出方式(连续、脉冲等)以及波段、功率等进行分类。常见的医用激光器如表 17-1 所列。

激光治疗机通常由激光器、与之耦接的导光系统以及支架、排烟装置等辅助设备构成。导光系统有光导纤维与机械关节臂两类,前者利用全反射原理使光在芯体中无损传输,后者利用反射定律使光路能较灵活地改变,以到达输出端。

表 17-1 常用的医用激光器

| 类别 | 名称          | 输出方式  | 波长(nm) | 主要应用                       |
|----|-------------|-------|--------|----------------------------|
| 固体 | Ruby        | 脉冲    | 694.3  | 眼科,皮肤科,基础研究                |
| 固体 | Nd: YAG     | 连续、脉冲 | 1064   | 各科手术,内镜手术                  |
| 固体 | KTP/Nd: YAG | 脉冲、连续 | 532    | 眼科,皮肤科,肿瘤科,显微外科,内镜手术,微光束技术 |
| 固体 | Ho: YAG     | 脉冲    | 2120   | 胸外科,耳科,内镜手术,口腔科            |

续表

| 类别  | 名称              | 输出方式  | 波长(nm)      | 主要应用                                    |
|-----|-----------------|-------|-------------|---|
| 固体  | Er: YAG         | 脉冲    | 2080; 2940  | 耳科: 皮肤科, 眼科, 口腔科                        |
| 气体  | He-Ne           | 连续    | 632.8       | 各科弱激光治疗, PDT, 全息照相, 基础研究                |
| 气体  | CO <sub>2</sub> | 连续、脉冲 | 10600       | 体表与浅表体腔各科手术, 理疗                         |
| 气体  | Ar <sup>+</sup> | 连续    | 488; 514.5  | 眼科, 皮肤科, 内镜手术, 针灸, 全息照相, 微光束技术, 扫描共焦显微镜 |
| 气体  | N <sub>2</sub>  | 脉冲    | 337.1       | 肿瘤科, 理疗, 基础研究                           |
| 气体  | He-Cd           | 连续    | 441.6       | 肿瘤荧光诊断, 针灸, 理疗                          |
| 气体  | ArF             | 脉冲    | 193         | 眼科 PRK                                  |
| 气体  | XeCl            | 脉冲    | 308         | 血管成形术                                   |
| 气体  | Cu              | 脉冲    | 510.5; 578  | PDT, 皮肤科                                |
| 液体  | Dye             | 连续、脉冲 | 300 ~ 1300  | 眼科, PDT, 皮肤科, 内镜治疗, 细胞融合术               |
| 半导体 | 半导体             | 连续、脉冲 | 330 ~ 34000 | 各科手术, 内镜治疗, 基础研究, 弱激光治疗                 |

## 五、激光的安全防护

激光对人体可能造成的危害有两类。一类是直接危害, 即超阈值的激光照射将对眼睛、皮肤、神经系统以及内脏造成损伤。另一类是与激光器有关的危害, 即电损伤、污染物、噪声、软 X 射线以及泵或管的爆裂等。

为此应采取的安全措施也有两方面。一是对激光系统及工作环境的监控管理。激光器因其辐射危害而分为四类, 对其应有明显的专用标志, 应有自动显示、报警、停车装置。室内充分通风, 光线充足, 有吸、排烟装置以消除有害物质等。另一方面是个人防护。工作人员要培训, 严格按规章操作。避免直接或间接(反射或漫反射)的激光照射, 佩戴与激光输出波长相匹配的防护眼镜以及尽量减少身体暴露部位, 使人体接触的激光剂量在国家安全标准之内。严格实行医学监督, 定期对工作人员进行体检十分必要。

### 思考题与习题十七

- 17-1 何谓自发辐射与受激辐射? 各有何特点?
- 17-2 何谓粒子数反转分布? 实现粒子数反转分布的条件是什么?
- 17-3 激光器有哪些基本组成部分? 它们各有何作用? 怎样才能获得激光的输出?
- 17-4 激光有何特性? 它们是如何形成的?

17-5 由谐振腔品质因数  $Q$  的定义求证  $Q = 2\pi \frac{\omega L}{\lambda \delta}$ , 式中  $L$  为谐振腔长度,  $\delta$  为腔内能量的单程损耗率。

- 17-6 激光有何生物作用与效应? 影响因素有哪些?
- 17-7 何谓激光的物理剂量? 它由哪些要素构成? 何谓激光的生物剂量?
- 17-8 激光在医学领域有哪些主要应用? 如何采取对激光的防护措施?

(刘筑闻)

# 第十八章 磁共振成像

## 学习本章后，你应：

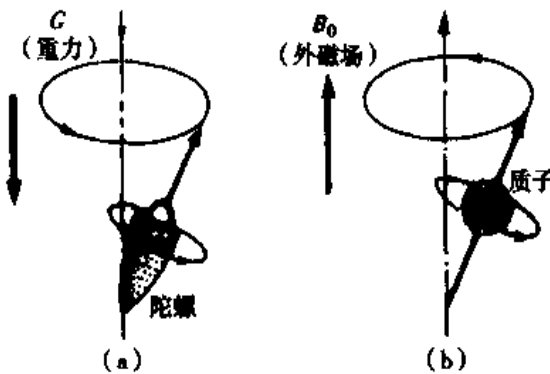
1. 了解磁共振的基本概念和磁共振成像原理。
2. 理解磁共振成像临床诊断的物理学依据。
3. 了解磁共振成像的现状及其发展前景。

磁共振成像是一种多参数、多核种的成像技术。目前主要是氢核密度  $\rho$ 、弛豫时间  $T_1$ 、 $T_2$  和组织流动的成像。其基本原理是利用一定频率的电磁波，向处于磁场中的人体照射，人体中各种不同组织的氢核，在电磁波作用下会发生核磁共振，吸收电磁波的能量，随后又发射电磁波。MRI 系统探测到这些来自人体中的氢核发射出来的电磁波信号之后，经计算机处理和图像重建，得到人体的断层图像。由于氢核吸收和发射电磁波时，受周围化学环境的影响，所以由磁共振信号得到的人体断层图像，不仅可以反映形态学的信息，还可以从图像中得到与生化、病理有关的信息。因此被认为是一种研究活体组织、诊断早期病变的医学影像技术。

## 第一节 磁共振的基本概念

### 一、原子核的磁矩

人体和其他物体一样，也是由分子、原子组成。组成人体的元素有 C、H、O、



Ca、P 及其他微量元素。每个原子都有一个原子核，很像一个作自旋运动的小陀螺，见图 18-1。原子核具有一定的电荷，因为作自旋运动而具有磁矩，称为核磁矩，用  $\mu$  表示，是一个矢量。核磁矩就像一块小磁体，具有磁性，有 N 极和 S 极。在通常情况下，组成物体的原子核系统的  $\mu$  是杂乱无章分布的，每个磁矩的方向都是随意的，磁矩间的磁性相互抵消，对外不表现磁性，其总磁矩为

图 18-1

(a) 陀螺在重力场中旋进 (b) 核磁矩在外磁场中旋进

$$M = \sum_{i=1}^n \mu_i = 0 \quad (18-1)$$

氢原子核是一个质子，有一定的质量，带一个正电荷，有自旋和磁矩，其自旋量子数等于1/2。氢核磁矩又称质子磁矩  $\mu$ ，在外磁场方向的分量取两种平衡状态：即平行或反平行于外磁场，如图 18-2 (a) 所示，图上为稳定平衡，势能低；图下为不稳定平衡，势能高。它们的能量差  $\Delta E = 2\mu B_0$ ， $\mu$  是氢核磁矩， $B_0$  是外加磁感应强度，这种现象叫塞曼效应，如图 18-2 (b)。从宏观上看，若氢核系统处于外磁场中，由于平行于  $B_0$  的分量多于反平行于磁场的分量，使得氢核磁矩不能完全互相抵消，于是在外磁场方向便出现一个磁矩，即

$$M \sum_{i=1}^n = \mu_i \neq 0 \quad (18-2)$$

这是氢核磁矩从无序排列变成有序排列的结果。磁场愈强，氢核磁矩取向一致的倾向愈强烈，物体表现出磁性愈明显，这个磁矩叫磁化矢量或宏观磁矩，用符号  $M$  和箭头表示，见图 18-3。这个宏观磁矩的磁性随磁场的增强而增大。

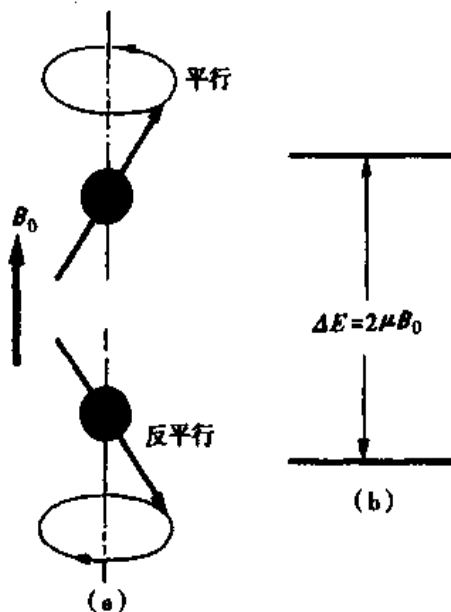


图 18-2

- (a) 氢核磁矩取平行或反平行于外磁场  $B_0$ 。  
 (b) 氢核磁矩的能级产生塞曼分裂

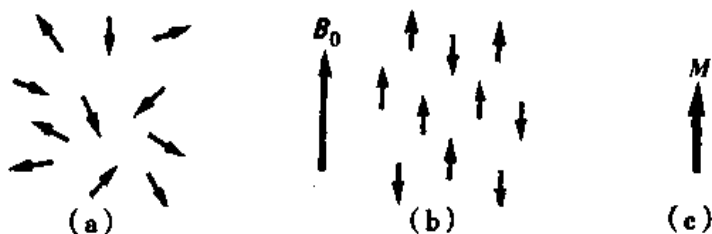


图 18-3

- (a) 无外磁场 (b) 加外磁场  $B_0$  (c) 样品在外磁场中的宏观磁矩

## 二、磁矩在磁场中的运动

在外磁场中氢核磁矩受到外磁场的作用，在自旋转的同时又以  $B_0$  为轴旋进，又称为进动，如同陀螺在旋转的时候一样，当其转轴偏离垂直方向时，就会一边自旋，一边又绕自身垂直方向转动。陀螺旋进是受地球重力  $G$  的作用，而磁矩的旋进是受外磁场  $B_0$  的作用，见图 18-1。其旋进角频率  $\omega$ ，称为拉莫尔频率，该频率的大小与外磁感应强度成正比，并由著名的拉莫尔方程决定。

$$\omega = \gamma B_0 \quad (18-3)$$

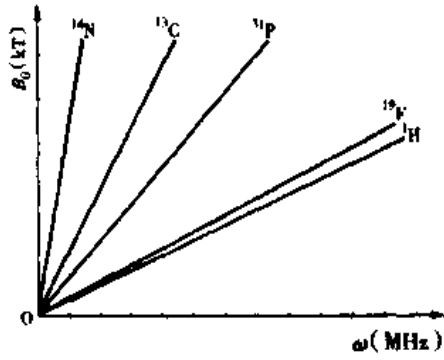


图 18-4 几种原子核的  $\omega$  与  $B_0$  的关系

式中  $\gamma$  是一个与原子核性质有关的常数,称为旋磁比,不同种类的原子核,  $\gamma$  大小不同。例如  $^1\text{H}$  的  $\gamma$  为  $42.58\text{MHz}\cdot\text{T}^{-1}$ ,  $^{31}\text{P}$  的  $\gamma$  为  $17.24\text{MHz}\cdot\text{T}^{-1}$ ,  $^{23}\text{Na}$  的  $\gamma$  为  $11.26\text{MHz}\cdot\text{T}^{-1}$ ,图 18-4 是几种原子核的旋进频率  $\omega$  与磁感应强度  $B_0$  的关系。从拉莫尔公式可知,对同一种原子核,因  $\gamma$  相同,磁场愈强,原子核的旋进频率就愈高。对不同种类的原子核,在相同的磁感应强度作用下,因  $\gamma$  不同,其旋进频率也不相同。

### 三、磁共振现象

处于磁场中的氢核磁矩,若在垂直于  $B_0$  方向上再施加一个交变磁场,称电磁辐射或射频(RF),当电磁辐射的圆频率等于拉莫尔频率  $\omega$  时,氢核磁矩将有可能吸收电磁波的能量,使部分氢核被激发,称为共振吸收。宏观磁矩与电磁辐射之间发生共振吸收,宏观磁矩  $M$  与  $B_0$  方向的夹角将发生变化。如在瞬间用拉莫尔频率的电磁辐射,使宏观磁矩  $M$  与  $B_0$  方向的夹角变化  $\alpha$  角,即这个电磁辐射是一个  $\alpha$  角的 RF 脉冲。当  $\alpha$  为  $90^\circ$  和  $180^\circ$  时,分别称为  $90^\circ$  和  $180^\circ$  RF 脉冲,如图 18-5 所示。去掉电磁辐射场后,氢核磁矩又会把吸收能量中的一部分以电磁辐射的形式发射出来,称为共振发射。大量氢核磁矩吸收和发射能量,都会在环绕氢核系统的接收线圈上产生感生电动势,这就是磁共振信号,缩写为 MR 信号。其强度与参与共振的氢核数目和射频脉冲过后提取信号的时刻有关,图 18-6 是检测 MR 信号框图。

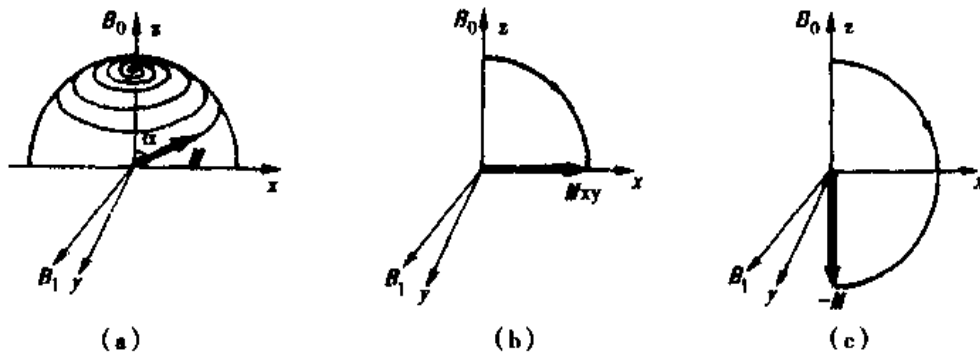


图 18-5

(a)  $\alpha$  角射频脉冲使  $M$  偏离  $z$  轴  $\alpha$  角 (b)  $90^\circ$  射频脉冲使  $M$  偏离  $z$  轴  $90^\circ$   
(c)  $180^\circ$  射频脉冲使  $M$  偏离  $z$  轴  $180^\circ$

观察 MR 信号有两种方法,一种是 MR 信号强度随时间的变化,叫自由感应衰减信号(free induction decay, FID),另一种是由 FID 信号经傅里叶变换后得到的 MR 信号随频率变化的波形,图 18-7 给出氢核 MR 信号的两种波形。

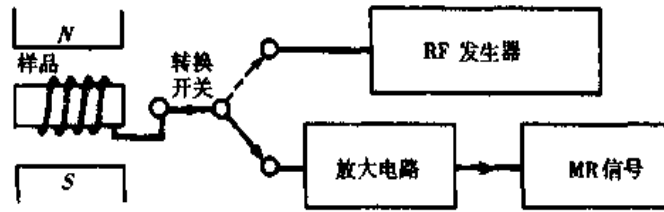


图 18-6 检测 MR 信号框图

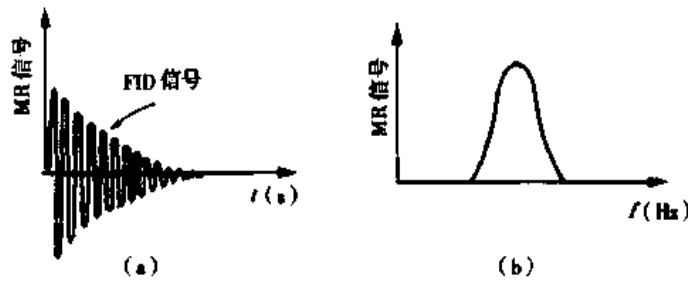


图 18-7

(a) FID 信号 (b) FID 信号经 FT 的 MR 信号

#### 四、弛豫过程和弛豫时间

大量氢核磁矩顺着磁场方向排列的状态，并不随时间变化，称为稳定平衡状态。若受到电磁辐射的激发， $M$  的方向就要偏离平衡状态，这时氢核磁矩就不能长久保持这种状态，而是要逐渐恢复到平衡状态。这个恢复过程称为弛豫过程，它反映了氢核之间和氢核与周围环境之间相互作用的过程。完成弛豫过程分两步进行，为了叙述方便，把顺磁场方向称为纵向，垂直于磁场方向称为横向。第一步是氢核之间先达到平衡，即氢核磁矩首先在水平方向趋于平衡状态，各磁矩旋进的相位完全错乱。这一过程如同在环形跑道上赛跑，开始时大家都在同一条起跑线上，以后由于各人的速度不同而被拉开距离，当跑的圈数足够多时，赛跑者则随机分散在跑道上。氢核磁矩从不平衡状态到平衡的变化过程中，也要经历这种分散的过程，此时各磁矩在水平方向的磁性将互相抵消，从宏观上看磁矩水平分量趋于零，所以称为横向弛豫过程。从物理学的观点看这个过程是同种核相互交换能量的过程，故又称为自旋-自旋弛豫过程。第二步是整个氢核磁矩系统与周围环境之间恢复到平衡状态，这个过程是氢核系统吸收能量，偏离磁场方向，其宏观磁矩在纵向分量由小到大，最后达到未偏离磁场方向以前宏观磁矩的大小，所以这个过程称为纵向弛豫。由于这个过程是氢核与周围物质进行热交换，最后达到热平衡，故又称为自旋-晶格弛豫过程。图 18-8 形象地反映这两种过程最终使宏观磁矩恢复到平衡状态的情况。从图中可以看出偏离开平衡位置是由于吸收了外界的能量，而它的恢复过程必然伴随着能量的释放，所以  $M_z$  的恢复与



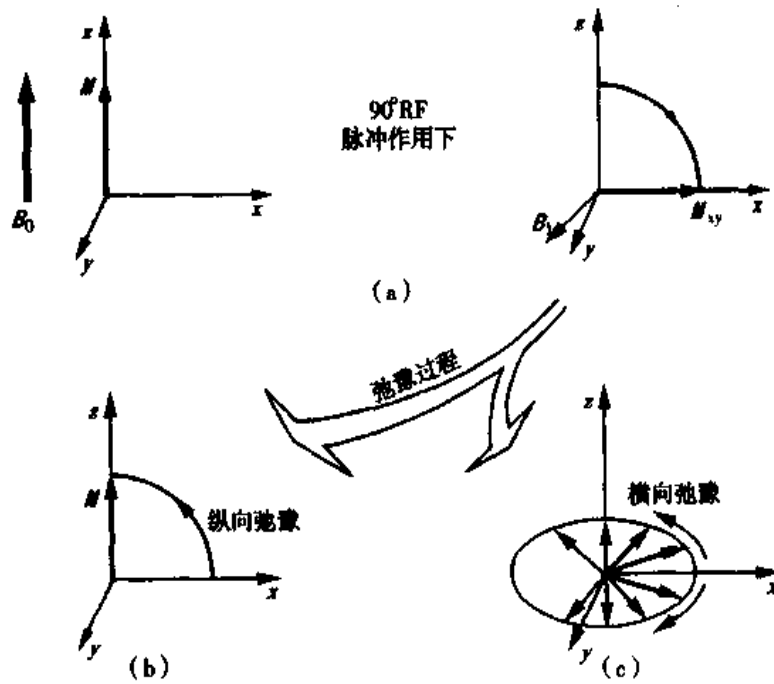


图 18-8 两种弛豫使  $M$  恢复到平衡态过程

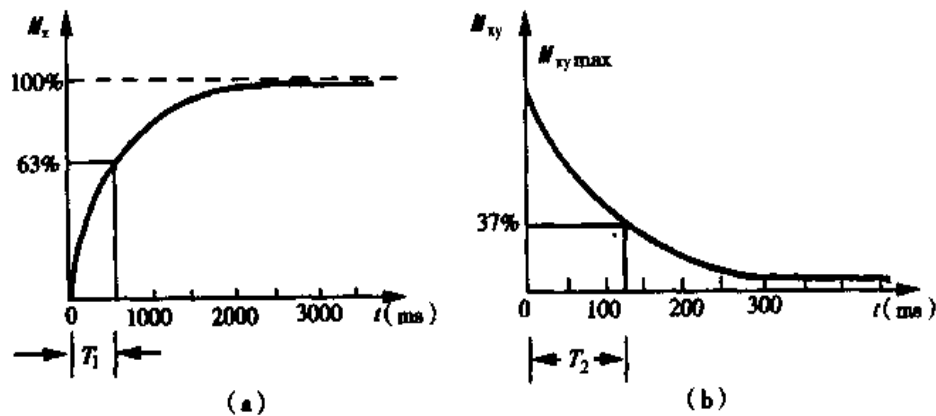


图 18-9

(a)  $M_z$  恢复过程与  $T_1$  值 (b)  $M_{xy}$  衰减过程与  $T_2$  值

$$M_z = M_0 (1 - e^{-t/T_1}) \quad (18-4)$$

式中  $M_0$  是  $90^\circ$  RF 脉冲作用前氢核系统的宏观磁矩,  $T_1$  称为纵向弛豫时间, 习惯上用  $M_z$  达到最大值  $M_0$  的 63% 时所需的时间来确定其大小, 不同组织的  $T_1$  值有很大差异。横向宏观磁矩  $M_{xy}$  的衰减也不是以恒定的速率减弱的, 而是按指数衰减的, 用图 18-9 (b) 表示  $M_{xy}$  衰减过程, 并按下式随时间变化

$$M_{xy} = M_{xy\max} e^{-t/T_2} \quad (18-5)$$

式中  $M_{xy\max}$  是  $90^\circ$  脉冲过后, 宏观磁矩在水平方向的最大值, 在数值上它应等于  $M_0$ ,  $T_2$  称为横向弛豫时间, 它是  $M_{xy\max}$  损失 63% 时所需的时间, 所以经过一个  $T_2$  时间,  $M_{xy}$  还存在 37%。不同组织的  $T_2$  值也不相同。从图 18-9 中可知, 恢复到平衡状态时,  $M_z$  与  $M_{xy}$  是同时进行的两个过程, 开始时变化非常快, 以后逐渐减慢。对  $T_1$ 、 $T_2$  小的组织, 说明弛豫进行得快, 而  $T_1$ 、 $T_2$  大的组织, 弛豫进行得慢。

## 第二节 磁共振成像原理

### 一、磁共振成像的基本方法

MRI的方法很多,但不论哪一种成像方法都是基于这样一种指导思想,即怎样用磁场值来标定受检体共振核的空间位置。为了实现这一目的,人们在均匀的强磁场中叠加一个随位置坐标而变化的磁场,称为线性梯度场<sup>①</sup>。由拉莫尔公式可知,沿梯度场方向的位置不同,共振频率不同。于是可以通过梯度场来建立起共振信号与空间位置之间的关系。为了重建一幅断层图像,即建立起不同点的共振信号与位置坐标一一对应关系,首先就要对观测的对象进行空间编码,把研究对象简化为由若干个体素(体素)所组成,然后依次测量每个体素,或将体素排列成线条或面的信息量,再根据各体素的编码与空间位置一一对应关系实现图像的重建。下面介绍其成像过程。

1. 层面的选择 置成像物体于一 $z$ 轴方向的均匀磁场 $B_0$ 中,设磁场方向是 $z$ 轴方向,在均匀磁场的基础上,叠加一个同方向的线性梯度场 $G_z$ ,磁感应强度沿 $z$ 轴方向由小到大均匀改变,如图18-10所示。由图可知,垂直于 $z$ 轴方向同一层面上的磁感应强度相同,不同层面(图中的1、2、3层面)梯度场的强度不同(层面箭头的长短不同),方向是箭头所指方向。按拉莫尔公式,可设计RF脉冲的频率,使2层面的氢核发生共振,1、3层面的氢核因不满足拉莫尔公式而不发生共振。若把RF脉冲的频率设计为其他层面的拉莫尔频率时,也可以使其他层面的氢核分别发生共振,这一过程称为层面的选择,也称为选片,所以 $G_z$ 称为选片梯度场。

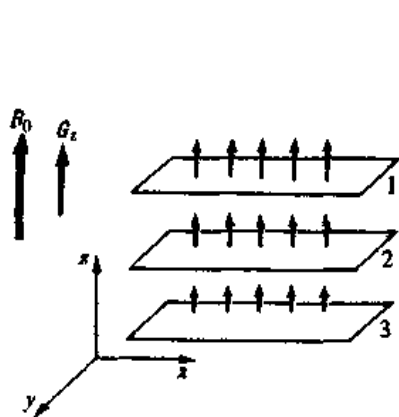


图 18-10 层面的选择

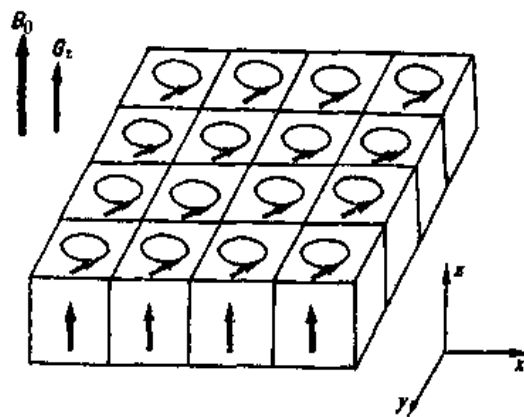
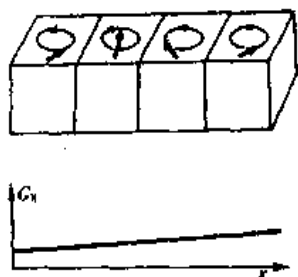


图 18-11 选片后层面的若干个体素

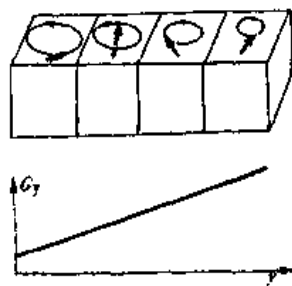
2. 编码 所谓编码就是把研究的物体断层分为若干个体素,把每个体素标定一个记号,就像一张电影票,上面标有几楼几排几号的记号,有了这个编号,观众可以对号入座。设 $z$ 表示楼层, $y$ 表示排数, $x$ 表示号码,常用 $n_z n_y n_x$ 来标定层面每个体素的标号。图18-11是经过选片后取出层面的若干个体素,由于整个层面处于相同

<sup>①</sup> 由一对同轴直流线圈,每个线圈通以方向相反的电流,使其在轴线上产生线性梯度磁场,单位 $T \cdot m^{-1}$

的磁场中，故每个体素中的磁矩在磁场中旋进的频率和相位相同。此时沿  $x$  轴施加一个梯度很小的线性梯度场  $G_x$ ，磁场沿  $x$  轴由小逐渐变大，显然层面中垂直于  $x$  轴方向的同一条直线的磁场均相同，而不同直线磁场略有差异，磁矩旋进的速度也不一样，这就使各体素中磁矩旋进的相位发生变化，用这种相位差作为一种标记，可识别沿  $x$  轴方向的每一条直线各体素的 MR 信号，这一过程称为相位编码，图 18-12 只取  $x$  轴方向一条直线的若干体素。在一定的时间去掉  $G_x$ ，此时各体素的磁矩仍保持原来的相位差，继续以相同的频率在磁场中旋进。若在接收信号时，再沿  $y$  轴方向施加一个梯度较大的线性梯度场。这时，层面上垂直于  $y$  轴方向的同一条直线的磁感应强度相同，而不同直线上的磁场则不同，磁矩旋进也有差异，图 18-13 只取沿  $y$  轴方向一条直线的若干体素，把磁矩旋进频率的差异作为一种标记，以识别垂直于  $y$  轴的各条直线，这一过程称为频率编码。由于每个体素具有一定大小，故体素中各处的磁场也略有差异，但当体素取得很小时，从宏观上看这种差异在理解成像过程时可以不作考虑。

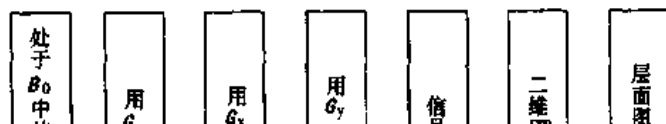


18-12 磁矩旋进相位的差异



18-13 磁矩旋进频率的差异

**3. 图像重建** 经过选片、相位编码和频率编码，把整个层面的体素一一进行标定。由于观测层面中的磁矩是在 RF 脉冲激励下旋进，停止 RF 脉冲照射时，各体素的磁矩在回到平衡态的过程中，磁矩的方向发生变化，在接收线圈中可感应出这种由于磁矩取向变化而产生的感应信号。这个信号是各体素带有相位和频率特征的 MR 信号的总和。为取得层面各体素 MR 信号的大小，需要利用信号所携带的相位编码和频率编码的特征，把各体素的信号分离出来，该过程称为解码。这一工作完全由计算机来完成，即计算机对探测到的 FID 信号进行二维 FT 处理，得到具有相位和频率特征的 MR 信号的大小，最后根据与层面各体素编码的对应关系，把体素的信号大小依次显示在荧光屏上，信号大小用灰度等级表示，信号大，亮度大；信号小，亮度小。这



就可以得到一幅反映层面各体素 MR 信号大小的图像。图 18-14 是成像过程框图。

## 二、人体的磁共振成像

1. 氢核是人体成像的首选核种 人体各种组织含有大量的水和碳氢化合物, 所以氢核的磁共振灵敏度高、信号强, 这是人们首选氢核作为人体成像元素的原因。表 18-1 列出人体组织中氢核与其他元素的磁共振信号相对灵敏度, 并以氢的相对值为 1。从表中可知其他元素的 MR 信号都比较弱, 而且相差在 1000 倍以上。

表 18-1 人体组织中氢核与其他元素的 MR 信号相对灵敏度(规定氢的相对值为 1)

| 元 素             | 相对灵敏度                | 元 素 | 相对灵敏度                |
|-----------------|----------------------|-----|----------------------|
| $^1\text{H}$    | 1, 000               | Na  | $1 \times 10^{-3}$   |
| C               | $2.5 \times 10^{-4}$ | P   | $1.4 \times 10^{-3}$ |
| $^{14}\text{N}$ | $3.1 \times 10^{-4}$ | K   | $1.1 \times 10^{-4}$ |
| O               | $4.9 \times 10^{-4}$ | Ga  | $9.1 \times 10^{-6}$ |
| F               | $6.3 \times 10^{-5}$ | Fe  | $5.2 \times 10^{-9}$ |

2. 人体各种组织含水比例不同 表 18-2 列出人体几种组织和脏器的含水比例。MR 信号强度与样品中氢核密度有关, 人体中各种组织和脏器含水比例不同, 即含氢核数的多少不同, 则 MR 信号强度有差异, 利用这种差异作为特征量, 把各种组织区分开, 这就是氢核密度的 MR 图像。

表 18-2 几种人体组织、脏器含水比例

| 组织名称 | 含水比例(%) | 组织名称 | 含水比例(%) |
|------|---------|------|---------|
| 皮肤   | 69      | 肾    | 81      |
| 肌肉   | 79      | 心    | 80      |
| 脑灰质  | 83      | 脾    | 79      |
| 脑白质  | 72      | 肝    | 71      |
| 脂肪   | 80      | 骨    | 13      |

3. 人体不同组织的  $T_1$ 、 $T_2$  值 表 18-3 和表 18-4 列出人体几种正常组织和病变组织的  $T_1$ 、 $T_2$  值。从表中可以看出人体各种组织的  $T_1$ 、 $T_2$  值是不相同的, 这就提供了用  $T_1$ 、 $T_2$  值来建立人体组织分布图像的可能性。这种图像还与氢核的密度有关, 所以称为  $T_1$ 、 $T_2$  加权或  $T_1$ 、 $T_2$  权重图像。人体正常组织与病变组织的含水量和  $T_1$ 、 $T_2$  值均有所不同, 所以可从图像中把病变组织识别出来, 从中还可以判断病变的不同发展阶段, 为临床诊断提供依据。

人体组织的 MR 信号强度决定于这些组织中氢核密度和氢核周围的环境。这里所说的环境是指人体组织结构和生化病理状态。磁共振原理告诉我们,  $T_1$ 、 $T_2$  反映了氢核周围环境的信息。换句话说, 人体不同组织之间、正常组织与该组织中的病变组织之间氢核密度  $\rho$  和  $T_1$ 、 $T_2$  三个参数的差异, 是 MRI 用于临床诊断最主要的物理学基础。

表 18-3 几种正常组织在 0.5T 情况下的  $T_1$ 、 $T_2$  值范围

| 组织名称   | $T_1$ (ms) | $T_2$ (ms) |
|--------|------------|------------|
| 脂肪     | 240 ± 20   | 60 ± 10    |
| 肌肉     | 400 ± 40   | 50 ± 20    |
| 肝      | 380 ± 20   | 40 ± 20    |
| 胰      | 398 ± 20   | 60 ± 40    |
| 肾      | 670 ± 60   | 80 ± 10    |
| 主动脉    | 860 ± 510  | 90 ± 50    |
| 骨髓(脊柱) | 380 ± 50   | 70 ± 20    |
| 胆道     | 890 ± 140  | 80 ± 20    |
| 尿      | 2200 ± 610 | 570 ± 230  |

表 18-4 几种病变组织在 0.5T 情况下的  $T_1$ 、 $T_2$  值范围

| 组织名称 | $T_1$ (ms) | $T_2$ (ms) |
|------|------------|------------|
| 肝癌   | 570 ± 190  | 40 ± 10    |
| 胰腺癌  | 840 ± 130  | 40 ± 10    |
| 肾上腺癌 | 570 ± 160  | 110 ± 40   |
| 肺癌   | 940 ± 460  | 20 ± 10    |
| 前列腺癌 | 610 ± 60   | 140 ± 90   |
| 膀胱癌  | 600 ± 280  | 140 ± 110  |
| 骨髓炎  | 770 ± 20   | 220 ± 40   |

### 三、如何产生氢核密度 $\rho$ 和 $T_1$ 、 $T_2$ 加权图像

在 MRI 系统中把成像过程编成程序，即从选片到信号采集，这段程序在 MRI 过程中称为序列，最常使用的是自旋-回波(SE)序列和反转恢复(IR)序列。

1. SE 序列 图 18-15 给出了 RF 脉冲序列和用该序列得到的 MR 信号。图中第一个 RF 脉冲为  $90^\circ$ ，在该脉冲作用下，宏观磁矩倒向  $xy$  平面，接着绕  $z$  轴旋进。从微观上看氢核磁矩的水平分量  $M_{xy}$  在  $xy$  平面内逐渐散开，最后达到彼此的相位完全错乱的状态。 $90^\circ$  脉冲过后经  $\tau$  时间，再施加一个  $180^\circ$  脉冲，这时其旋进的速度大小和方向不变，故原来散开的氢核磁矩又重新聚集起来，于是  $M_{xy}$  由零开始增大，但达到最大后又散开，后又变为零，这段时间称为自旋——回波时间，用  $T_E$  表示，这个信号称为自旋-回波信号。每施加一个  $180^\circ$  脉冲后，使得在  $xy$  平面相位错乱的氢核磁矩又重新聚集，并发出新的自旋-回波信号。这个信号的幅度与施加的  $180^\circ$  脉冲的时刻有关，并随时间  $t$  的变化以  $T_2$  时间常数按指数规律衰减。在  $T_R$  时间(称重复时间)内，磁矩  $M$  同时完成纵向弛豫过程，即以  $T_1$  为时间常数按指数规律宏观磁矩由零恢

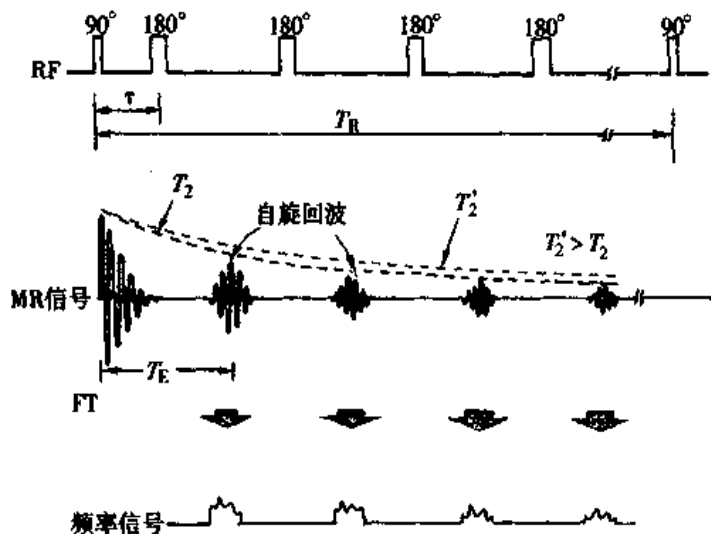


图 18-15 自旋-回波序列

复到  $M_0$  的过程。由磁共振的原理可以证明，在自旋-回波脉冲序列作用下，MR 信号的幅度满足下式

$$A = A_0 \rho (1 - e^{-T_R/T_1}) (e^{-T_E/T_2}) \quad (18-6)$$

式中  $A_0$  为常数， $\rho$  是氢核密度。下面讨论三种情况：

(1) 当  $T_R \gg T_1$ 、 $T_E \ll T_2$ ，此时式(18-6)可写成

$$A = A_0 \rho \quad (18-7)$$

信号幅度仅取决于氢核密度，用这种信号重建的图像称为氢核密度像。在实际操作中，获得密度图像的典型数据是  $T_E \leq 30\text{ms}$ ， $T_R \geq 1500\text{ms}$ 。

(2) 当  $T_R \leq T_1$ 、 $T_R \ll T_2$  时，式(18-6)可写成

$$A = A_0 \rho (1 - e^{-T_R/T_1}) \quad (18-8)$$

信号幅度由氢核密度和  $T_1$  决定，用这种信号重建图像称为  $T_1$  加权图像。当  $T_R$  取得愈短， $A$  受  $T_1$  的影响愈大，则称  $T_1$  加权愈重。当然  $T_R$  不能取得太短，否则若  $T_R$  接近  $T_2$ ， $A$  便与  $T_2$  有关了。在实际操作中，获得  $T_1$  加权图像的典型数据是  $T_R \leq 300\text{ms}$ ， $T_E \geq 30\text{ms}$ 。

(3) 当  $T_R \gg T_1$ 、 $T_E \geq T_2$  时，公式(18-6)可写成

$$A = A_0 \rho (e^{-T_E/T_2}) \quad (18-9)$$

信号幅度决定于氢核密度  $\rho$  和  $T_2$ ，用这种信号重建图像，称为  $T_2$  加权图像。 $T_E$  取得愈长，幅度受  $T_2$  的影响愈大，则称  $T_2$  加权愈重。同样， $T_E$  也不能取得太长，否则信号减弱太大，影响图像质量。在实际操作中，获得  $T_2$  加权图像的典型数据是  $T_E \geq 60\text{ms}$ ， $T_R \geq 1500\text{ms}$ 。

用 SE 序列的优点是选用适当的  $T_E$  和  $T_R$ ，可以用一个脉冲序列获得密度图像和  $T_1$ 、 $T_2$  加权图像，或者获得不同  $T_1$ 、 $T_2$  加权程度的图像和  $T_1$ 、 $T_2$  同时加权的图像。

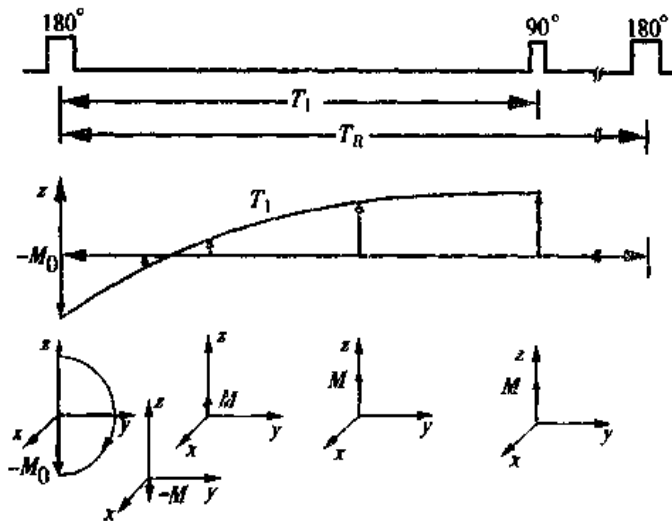


图 18-16 反转恢复序列

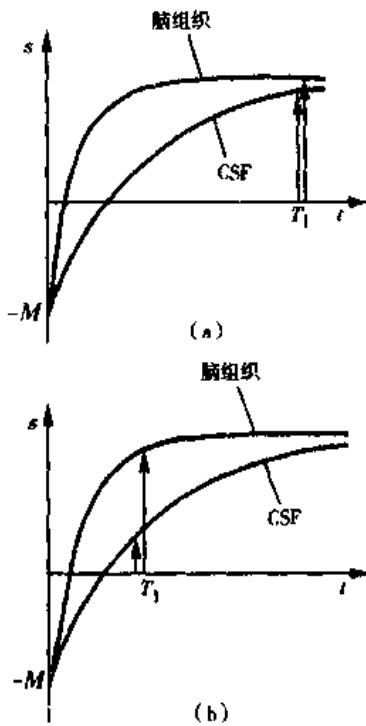


图 18-17 用 IR 序列选择不同的  $T_1$  对对比度的影响  
(a)  $T_1 > \text{脑 } T_1$  (b)  $T_1 \leq \text{脑 } T_1$

2. 反转恢复序列 (IR) IR 是用来产生  $T_1$  权重的磁共振图像, 见图 18-16。图中  $180^\circ$  脉冲是使系统的  $M_0$  从  $z$  倒向  $-z$  方向, 然后在纵向宏观磁矩由  $-M_0$  向  $+M_0$  恢复过程中施加一个  $90^\circ$  脉冲, 目的是将这个时刻的纵向宏观磁矩变为横向宏观磁矩, 以便使这个横向分量在吸收线圈中产生 FID 信号。这个序列的反转恢复时间  $T_1$  是指  $180^\circ$  脉冲和  $90^\circ$  脉冲之间的时间。在  $T_1$  时间内不同  $T_1$  的组织其  $M_0$  的恢复程度不同,  $T_1$  短的组织恢复快, FID 信号强;  $T_1$  长的组织恢复慢, FID 信号弱, 因此不同组织其在图像中的对比度有明显差别。图 18-17 说明脑组织和脑脊髓液 (CSF) 纵向弛豫过程和  $T_1$  的关系, 图中脑  $T_1 < \text{CSF } T_1$ 。当采集信号时间  $T_1$  与它们的  $T_1$  相比足够大时, 图像的对比度由质子密度  $\rho$  决定, 因为它们的  $\rho$  相差无几, 图像的对比度相差不大, 见图 18-17 (a)。但若  $T_1$  与脑  $T_1$  相差无几, 见图 18-17 (b), 这时  $T_1$  对信号的权重加大, 所以  $\rho$  相近,  $T_1$  不同的组织, 用 IR 序列可以提高图像的对比度, 鉴别  $T_1$  不同组织的能力。

### 第三节 磁共振成像临床诊断的物理学依据

#### 一、氢核密度 $\rho$ 、 $T_1$ 和 $T_2$ 的对比度

MR 信号的强度决定于参与共振的氢核数目和  $T_1$ 、 $T_2$  值, 所以组织中  $\rho$  的差异可以用来产生图像的对比度, 如图 18-18。设具有相同  $T_1$  值而氢核密度不同的两种不同组织, 由图可见除了开始时, 在其他任一时刻去采集信号, 由于氢核密度不同, 造

成宏观磁矩大小的差别，这是产生氢核密度对比度的信号源。

图 18-19 (a) 是脂肪、白质、灰质和脊髓的纵向宏观磁矩恢复曲线，由于它们的  $T_1$  值不同，故在采集信号时，各种组织的信号强度不同。脂肪的  $T_1$  最短，信号最强，脊髓的  $T_2$  长，信号最弱。因此，图像中像素的灰度等级，脂肪最亮，脊髓最暗。白质和灰质介于两者之间。图 18-19 (b) 是大脑和脊髓在相同的 RF 脉冲功率作用下，

由于它们的氢核相对含量和  $T_2$  值不同(大脑的  $T_2$  短, 脊髓的  $T_2$  长), 在不同时刻采集信号, 其相对强度是不一样的。如在  $t_1$  时, 出现在大脑的信号比脊髓强; 在  $t_2$  时出现等强度的信号; 而  $t_3$  时脊髓的信号比大脑强。反映在图像中的灰度为:  $t_1$  时是大脑比脊髓亮, 在  $t_2$  时其灰度相同, 在  $t_3$  时脊髓比大脑亮。所以在同一层面的 MR 图像, 相同部位的组织, 在不同时刻采集信号组建的图像, 其相对亮度可以截然不同。

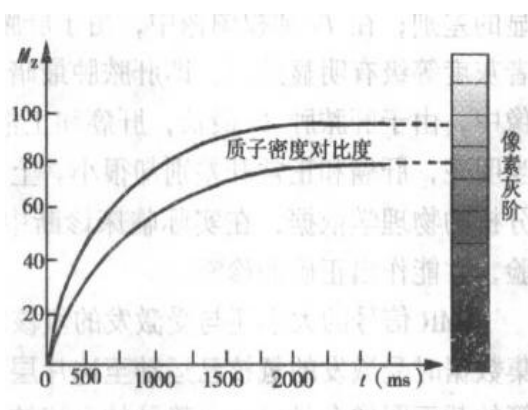


图 18-18 氢核密度不同形成的对比度

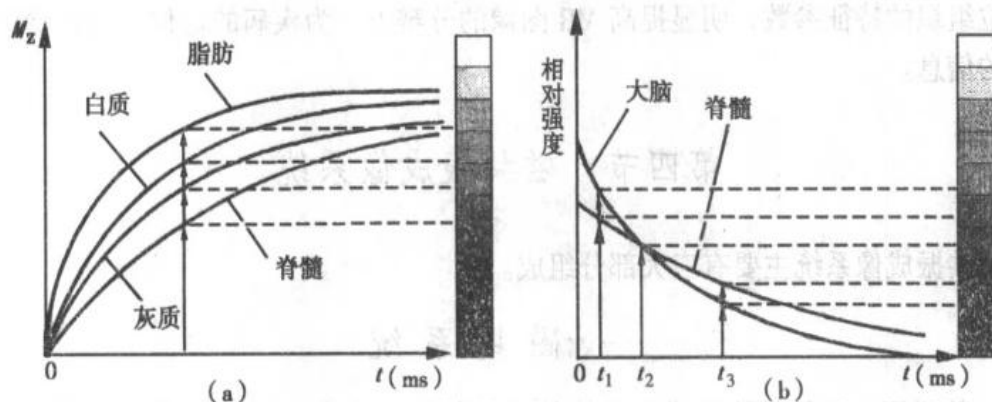


图 18-19

(a)  $T_1$  值不同的组织形成的对比度 (b)  $T_2$  值不同的组织形成的对比度

## 二、氢核密度 $\rho$ 、 $T_1$ 、 $T_2$ 三种图像进行诊断的物理学依据

因为密度图像所用的 MR 信号最强、最清晰，分辨率也最高。但是由于人体组织含水比例差别很小(见表 18-2)，所以图像反差不大，而更主要的是氢核周围的生化、病理信息在图像中反映甚少，其功能与 X-CT 图像相近，未能突出 MRI 的特点。从表 18-3、18-4 可看出人体不同组织的  $T_1$ 、 $T_2$  值差别远大于含水比例的差别，这就是  $T_1$ 、 $T_2$  加权图像的反差比密度图像好的主要原因。同时  $T_1$ 、 $T_2$  加权图像还能反映氢核周围分子结构、生化特征的信息。下面对用 SE 脉冲序列得到的三种图像加以说明：脂肪的氢核密度较高，在密度图像中比较明亮；脂肪的  $T_1$  值比其他组织短，所以在  $T_1$  加权图像中非常明亮；脂肪的  $T_2$  值与其他组织相差不大，所以在  $T_2$  图像中相对变暗。正常的肝组织与肝癌、肝脓肿由于氢核密度相差无几，所以在密度图像中没有明



显的差别；在  $T_1$  加权图像中，由于肝脓肿  $T_1$  很长，肝癌次之，正常肝较短，所以三者灰度等级有明显差别，即肝脓肿最暗，肝癌次之，正常肝较为明亮；在  $T_2$  加权图像中，由于肝脓肿  $T_2$  最长，肝癌和正常肝的  $T_2$  值相近，所以肝脓肿在图像中变得相当明亮，肝癌和正常肝差别却很小。上面的两个例子告诉我们，用三种图像进行诊断分析的物理学依据，在实际临床诊断中，情况要复杂得多，还要凭借长期的识图经验，才能作出正确的诊断。

MR 信号的大小还与受激发的氢核宏观运动有关，如氢核运动很快，激发后在采集数据时受激发的氢核已运动至选片层面之外，MR 信号必然为零。所以活体动脉血管的截面图像全是黑的，静脉的血流较慢，故其截面图像还不全黑。

关于 MRI 选用造影剂问题，通常 MRI 不需要使用反差增强剂便可以得到相当满意的图像。但在少数情况下，特别是在  $T_2$  加权图像中，医生仍觉得由于反差不够，难以作出诊断，这时可以给病人注射反差增强剂。MRI 中使用的反差增强剂含有顺磁性物质，如钆二乙烯三胺五醋酸(Gd-DTPA)等，这种造影剂本身并不显影，它的作用在于可以改变组织内部氢核系统的弛豫时间，从而和周围组织成像对比。如在顺磁性物质存在的条件下，氢核自旋-自旋相互作用增强，横向弛豫时间  $T_2$  大大减小，这样在  $T_2$  加权图像中含有顺磁性物质的部分与其他部位的反差便大大增强，有效改变病变部位组织的特征参数，明显提高 MR 图像的分辨力，为疾病的定位、定性诊断提供更多的信息。

## 第四节 磁共振成像系统

磁共振成像系统主要有三大部分组成。

### 一、磁场系统

**1. 静磁场** 这是磁共振成像系统的关键部件，成像中对它的指标、工艺都有很高的要求。对整体成像其腔孔直径在 1m 左右；磁感应强度一般为 0.15 ~ 2.0T；腔孔成像范围内磁场的均匀度要求在  $10^{-6} \sim 10^{-5}$ ，即要求在成像体积范围内达到几个百万分之一(ppm)的均匀度。目前有三种类型的磁体：常导电磁体，磁感应强度可达到 0.2T，均匀度可满足 MRI 的基本要求，但耗电耗水量大；永磁体，磁感应强度可达到 0.3T，在磁体极面严格加工要求的情况下，其均匀度可以满足要求，且使用这种磁体没有昂贵和复杂的附加设备，操作维护比较简单、方便；超导磁体，磁场有 0.5、1.0、1.5、1.8、2.0T 等，有很高的均匀度，但造价较高，维护比较复杂。

**2. 梯度场** 用来产生并控制磁场中的梯度，以实现磁共振信号的空间编码，这个系统有三组线圈，产生  $x$ 、 $y$ 、 $z$  三个方向的梯度场，线圈组的磁场叠加起来，可以形成任意方向的线性梯度场。

### 二、射频系统

这个系统由射频发生和控制、MR 信号接收和控制等部分组成。

1. 射频发生器 这部分是用来产生短而强的射频场，以脉冲方式施加到成像的物体中，使其氢核磁矩产生磁共振现象。主要包括：①射频振荡器，这是一种能产生非常稳定的频率的振荡器，为发生器提供稳定的射频源，为脉冲程序器提供时钟；②发射门，可对射频振荡进行调节，它受脉冲程序器控制；③脉冲功率放大器，为得到所需频谱范围和幅度的射频脉冲，需要功率放大器把射频脉冲放大到所需的功率；④脉冲程序器，能精确地给出所需的各种单脉冲和脉冲序列，以控制发射门，使其按一定的时序发送所需要的射频脉冲。最后通过发射线圈向成像物体发射这种射频脉冲。

2. 射频接收器 当射频发生器发射的射频满足磁共振条件时，射频场与成像物体中的氢核磁矩发生相互作用，进行能量交换，使宏观磁矩  $M$  偏离平衡态。射频脉冲过后， $M$  将回到其平衡位置，在接收线圈中感应出 MR 信号，这个信号很弱，经放大后进入图像重建系统。

### 三、图像重建系统

这部分的作用是进行图像处理，给出所激发层面的组织分布图像。工作过程如下：由射频接收器送来的信号经 A/D 转换器，把模拟信号转变为数字信号，便于贮存和用计算机进行累加运算，经过累加的 MR 信号，在目前的 MRI 中都采用傅里叶变换或快速傅里叶变换，得到具有相位和频率特征的 MR 信号大小，然后根据与观测层面体素的对应关系，经计算机运算和处理，得到层面图像数据，再经过 D/A 转换，加到图像显示器，按信号的大小用不同的灰度等级显示出所欲观测的层面图像。

## 第五节 磁共振成像的现状与发展前景

MRI 技术的突出优势是能提供和 X-CT 相媲美的解剖学图像，同时还能提供与生化、病理有关的信息。如今这项技术可提供氢核密度  $\rho$ 、 $T_1$ 、 $T_2$  和组织流动等四个参数的图像。可分别成像，也可将其中两者加权成像。 $\rho$  的成像主要提供观测层面组织脏器的形态和位置； $T_1$ 、 $T_2$  因含有丰富的生化代谢信息，通过与  $\rho$  结合成像，可得到形态学图像和体内组织细胞代谢的生化蓝图，监测诸如炎症、良性和恶性病变的性质；组织流动参数的成像，可反映体内血流状况，对循环系统疾病诊断有特殊意义。这项技术具有许多独到之处，如脊柱成像能得到其他成像技术不能接近和难以接近的图像。而心电图门控心脏 MRI 是用 MRI 技术来获得心动周期任意相位的心脏图像，它是基于心脏搏动和瓣膜振动的规律性，用心电图的 R 波触发典型的反转恢复序列，可以清晰显示整个心脏搏动过程任意时刻的心内结构，既能反映心脏功能的形态变化，还能提供心肌代谢的信息，是一种比较理想的心脏成像技术。

目前 MRI 技术正集中在对肺和脑功能成像的研究。其中肺脏的 MRI 一直是个盲区，而肺部的疾病是人类的一种常见病。为解决这个问题，研究人员提出参照核医学的方法，从外界引入一个信息载体——激光预极化惰性气体  $^{129}\text{Xe}$ ，采用大功率阵列式激光二极管可连续产生的惰性气体浓度，在磁场中形成足够大的宏观磁化矢量用于肺部成像。而惰性气体的 MRI 在磁共振领域里属气体成像，解决了肺部的 MRI 问题，

弥补 MRI 的缺陷, 提高 MRI 的竞争能力, 进一步完善和扩大 MRI 的应用范围。这项研究已取得质量相当不错的人体肺部图像, 但尚无法和 X-CT 相比, 所以人们预测它在本世纪初仍然是医学影像技术的研究热点。

从理论上讲 MRI 是一种多核种的成像技术, 除<sup>1</sup>H 核外,<sup>31</sup>P、<sup>23</sup>Na、<sup>19</sup>F 等的 MRI 已在实验室获得图像。而 MR 显微技术更是诱人的研究方向, 目前其分辨率已达 6 $\mu$ m, 已能实现单细胞的 MRI, 可直接观察活细胞中细胞核的变化。化学位移的 MRI 能提供更精细的组织结构和生化代谢信息。活体定域组织谱分析的 MRI 技术已进入临床, 但要从波谱中得到诊断信息, 需要有一个临床实践过程。目前 MRI 的分辨率已达到 1.0mm 左右, 配有各种表面线圈其空间分辨率已达到先进的 X-CT。由于这种成像技术所使用的稳定磁场、梯度磁场和射频场都是非电离性的, 因而不存在对人体造成伤害。缺点是成像时间比较长, 对装有心脏起搏器、人工关节、假牙等患者不宜作这种检查。

### 思考题与习题十八

18-1 解释下列名词: 核磁矩; 旋进; 宏观磁矩; 拉莫尔频率; 旋磁比; 自由感应衰减信号; 共振吸收和共振发射。

18-2 说明纵向弛豫、横向弛豫和  $T_1$ 、 $T_2$  的物理概念。

18-3 什么叫选片、相位编码和频率编码?

18-4 什么叫  $T_1$ 、 $T_2$  加权图像?

18-5 简述用自旋-回波序列得到氢核密度  $\rho$ 、 $T_1$ 、 $T_2$  加权图像的物理原理。

18-6 MR 图像的对比度由哪些因素决定? 为什么同一层面的组织, 有时其相对亮度会截然不同? 试说明其原因。

18-7 MRI 系统主要有哪几部分组成? 并说明各部分的作用。

18-8 设在 MRI 系统中主磁场和梯度场之和的磁感应强度是在 1.500 ~ 1.501 T 范围内, 试估算氢核成像应施加的射频脉冲所包含的频谱范围。 (10.170 ~ 10.177MHz)

(曾仁端)

## 第十九章 生物非线性动力学简介

---

学习本章后，你应：

1. 掌握非线性动力学的主要基本概念，如运动参量、相空间、吸引子等。
  2. 理解非线性动力学理论中的某些基础知识，如混沌运动、分形、分数维、分叉等。
  3. 了解非线性动力学在实际应用中的某些重要方法，如延迟嵌入法。
  4. 初步具备在以后实际工作中发现非线性现象的观察与辨别能力，以及与非线性科学家进行工作交流的基础理论知识。
- 

从 20 世纪中叶以后，人们在科学实践的过程中，开始注意到一种非常奇特的运动行为，它貌似随机，是非周期的运动，但又来自确定的演化规律；它能够放大任何微小的扰动，具有对扰动的极端敏感性，但又可以在短期内加以预报，因此处于这种运动状态的系统能够实现控制。这种运动被称为 chaos，美籍华裔科学家李天岩将其翻译为“混沌”。混沌产生的原因归根结底是由于事物间的相互影响、相互制约、相互依存关系。而这种关系反映在系统的演化规律上，则表现为非线性的规律。自从 1963 年洛伦兹在数学模型上发现混沌后，非线性动力学理论对自然界现象(如湍流、气候、地震、生命、经济、生长现象等)的研究起着极大的影响。

非线性动力学的研究对象是具有非线性演化规律的系统。从一般意义上来说，自然界的普遍联系性使得在实际中的运动演化更普遍地表现为非线性现象。自组织现象、分叉现象、孤波传播、模式形成的过程、随机共振等等，这些现象都无法用线性系统理论加以解释。至今，人们已经建立了系统的非线性动力学理论，并在研究中不断得到迅速发展。同时，由于生命系统是高度非线性的系统，因此非线性理论在生命科学的研究中得到了日益广泛的应用，生命科学家在这个理论的帮助下，对生物系统规律的认识将达到一个新的高度。

本章将介绍一些非线性动力学理论的基本概念和基本知识。非线性动力学理论建立在现代几何学和代数学的基础之上，其中相空间描述法是基本的研究方法。混沌运动是非线性系统普遍的运动形式，在生命系统中发现了大量的混沌，混沌理论对现代医学研究正起到越来越重要的推动作用。因此对其基本现象和基本规律有一定认识是非常重要的。分形学是非线性动力学研究的重要手段和符号语言，它是在传统几何学基础上发展起来的新兴学科。在包括生物科学在内的自然科学研究中得到了非常广泛的应用。了解这些基本理论知识是运用非线性理论研究成果认识生命现象的基础。同

时,本章还介绍了一些非线性动力学理论在生物学研究中的应用,包括心律变异性、神经动力学、生物混沌控制、生物分形等。学习这些内容,对开拓知识面、将理论知识转化为实际中的观察和分析能力是非常必要的。

学习本章内容重点是应理解基本概念,理解基本现象的特征,只有这样才能真正从实质上理解一些看似抽象的概念。比如:相空间方法不同于传统空间运动描述法,它注重研究经过长时间演化后系统运动所达到的稳态行为,因此要求我们把学习的重点放在吸引子概念的建立和运动的定性分类上;混沌运动不同于简单运动的最大特点是它的貌似随机性、服从确定性演化规律,因此就要求我们重点掌握它的状态参量变化的特征、它与其他运动的区别等;学习分形的主要目的是理解分数维的概念、分形不同于传统几何体形态的特点等,要从维数的普遍定义结合具体例子来打破传统经验维数对我们思维的限制。

## 第一节 运动及其相空间描述

宇宙万物处于永不停息的运动变化之中。以牛顿为代表的经典力学理论在三维空间中建立了描述机械运动的完整理论,爱因斯坦的相对论发展了经典的确定性理论,将描写运动的空间扩展到时间轴。同时,在描述物质系统运动的空间方法中还有相空间理论。

### 一、相空间

**1. 质点直线运动的相空间描述** 现在来考虑如何描述一个质点沿一条直线的运动过程。一般情况下,质点相对于参考系的位置,速度和加速度每时每刻都在发生变化。在每一时刻,其运动状态都可以用这三个物理量的值来表征。从长时间来看,这三个物理量的变化规律也能够表征运动过程的演化趋势。把能够表征运动状态及其演化规律的物理量称为状态参量。

以匀加速直线运动为例,在此种运动过程中,质点位置、速度和加速度随时间的变化规律可以用三个数学表达式来描述

$$x = x_0 + \frac{1}{2}at^2 \quad (19-1)$$

$$v = v_0 + at \quad (19-2)$$

$$a = \text{常数} \quad (19-3)$$

其中  $x-t$  曲线是抛物线,  $v-t$  曲线为直线。另外还可以用三个状态参量作为独立变量,构成一个三维的坐标空间,将质点在每一时刻的位置、速度和加速度值作为一个此空间中的坐标点。从长时间来看,质点的运动状态的演化,对应于一条有一定延伸趋势的轨道。如图 19-1,在  $t=0\text{ s}$  时,质点的运动状态在相空间中的坐标为  $(1.0, 0.0, 2.0)$ ,对应于 A 点。在  $t=9.0\text{ s}$  时,其状态坐标为  $(82, 18, 2)$ ,对应于 B 点。从 A 到 B 经历了一系列的状态改变。这些中间状态点构成了从 A 到 B 的一条轨道。这条轨道不仅包含了质点的实际空间位置的变化规律,而且反映了整个运动状态的演化趋势。

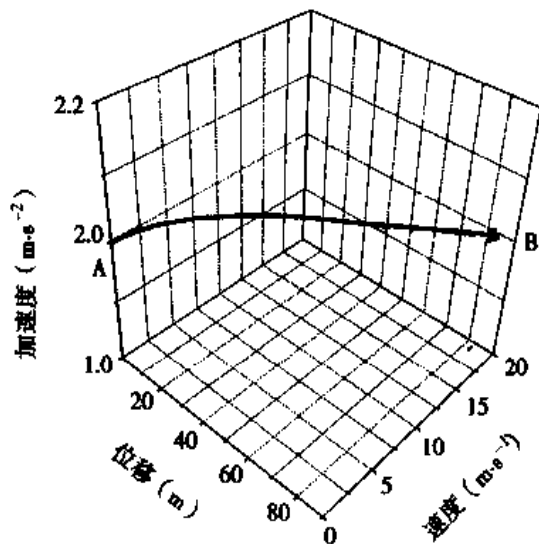


图 19-1 一维质点运动相空间

所有状态参量联合构成的抽象的空间称为相空间。质点每一时刻的运动状态都与相空间中的一个点相对应，而且在某时段内运动状态的变化过程与相空间中的一段轨道对应，运动的演化趋势与相空间中的轨道延伸趋势对应。

**2. 弹簧振子振动的相空间描述** 描写弹簧振子每时每刻的运动状态，一般选它偏离平衡位置的距离和速度为状态参量，由于运动发生在一维直线上，因此状态参量为 2 个一维的物理量，这时的相空间是由位移和速度联合构成的平面直角坐标空间。由振动知识可知，弹性振子在不受阻尼力作用，仅受到弹性力作用时，它将以初始时刻的位移及速度，作周期运动，如图 19-2 (a)、(b)。每时每刻的位移和速度坐标会对应于上述相空间中的一个点。而从长时间来看，各个不同时刻的运动状态点构成了

一条轨道。从分析可知，这条轨道是一个以坐标原点为中心的椭圆或圆。如图 19-2

(c)。振子初始状态坐标位于这个椭圆轨道上，由于轨道是封闭的，因此运动会表现出周而复始的周期性。不仅是简谐振动的相空间轨道是封闭的，所有形式的周期运动的相空间轨道必然是封闭的。

现实世界中，振子除了受到弹簧的弹性力外，还受到阻尼力的作用。在初始时刻，给振子初始的位移及速度，则在后续的运动中，由于阻尼力会消耗掉振子的运动能量，使得振子的位移和速度不断减小，最终恢复到静止状态，如图 19-3 (a)、(b)。图中位移和速度都表现出了衰减的振荡过程，并最终达到静止状态。如果从相空间来看，运动轨道为一条趋向原点的螺旋线，这条螺旋线起始于初始状态坐标，终止于原点，如图 19-3 (c)。无论初始状态如何，振子的长时间演化最终都会趋向原点。因此原点是系统演化的极限状态。轨道趋向原点的曲线是螺旋线，这种方式对应于衰减的振荡，把具有这种运动变化趋势的极限位置称为稳定焦点。除了焦点外，非线性系统的极限稳态还有稳定节点、中心、鞍点等。

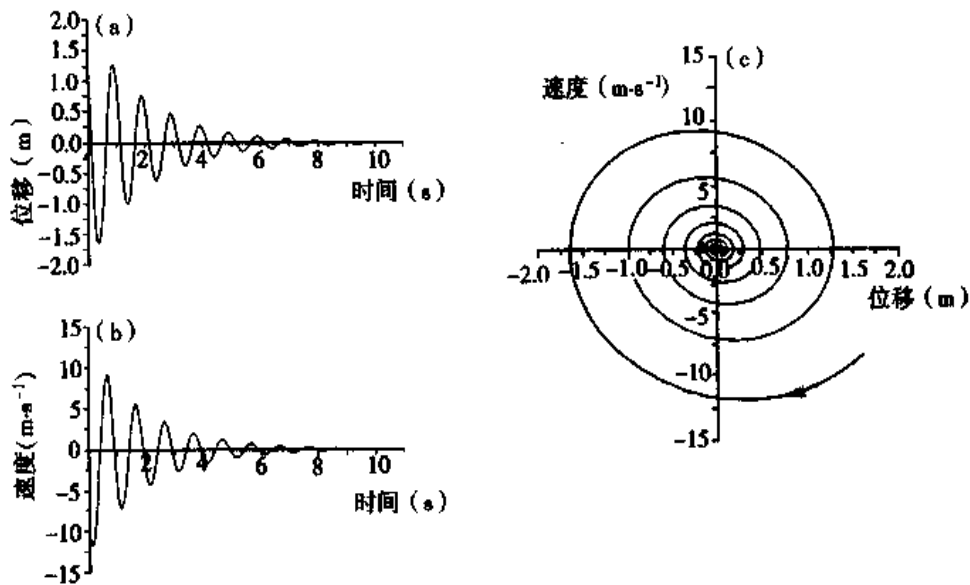


图 19-3 阻尼振动运动状态变化

把始终保持运动状态不变的运动称为定态运动，静止状态就是一种特殊的定态运动。如果要使得振子保持周期运动，就要施加一个周期的外加驱动力。振子在外加驱动力作用下，保持与驱动力周期相同的周期运动。虽然在初始时刻，振子有初始的位移和速度，但在阻尼力和周期驱动力的作用下，振子的运动状态会最终趋向于一个周期与外加驱动力相同的周期振荡，且这个振荡与振子初始状态无关。如图 19-4 (a)、(b)，振子的位移和速度变化都会趋向于一个周期振荡。图 19-4 (c) 表示了相空间中运动状态的变化过程，图中实线的椭圆是最终稳定下来的周期振荡，它的周期与外加驱动周期相同，螺旋线表示振子状态趋向于稳定周期运动的过程。

从上面的分析，我们发现：定态运动对应于相空间中的一个点，周期运动对应于相空间中一条封闭的轨道，运用相空间表示法可以将运动的动态变化过程形象地表达出来。同时，运动的演化趋势也与相空间中运动最终达到的状态有关。

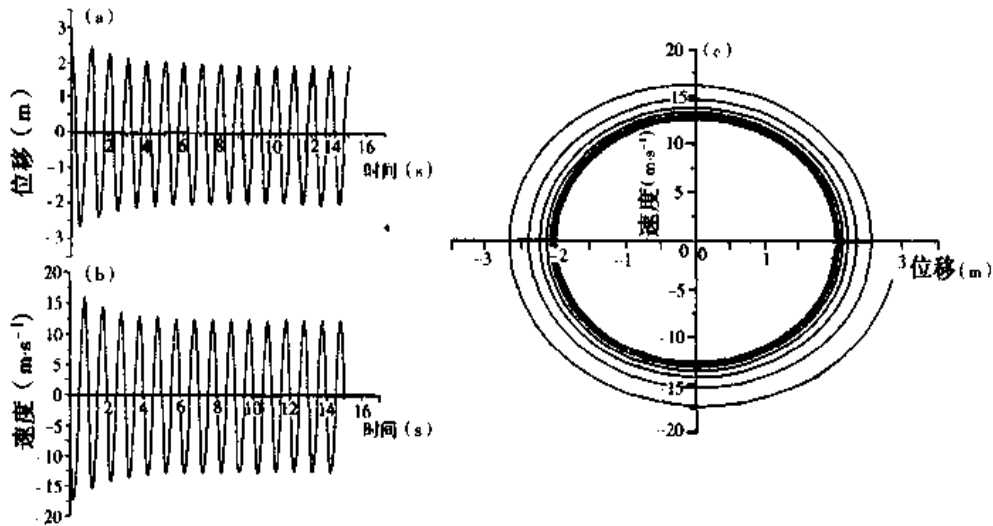


图 19-4 周期驱动的阻尼振动运动状态变化

## 二、吸引子

从上面的分析可发现，如果弹簧振子最终趋向于定态，则在相空间中的轨道会趋向于一个特殊的点，即原点，即使振子有不同的初值，轨道都会最终趋于该点。该点周围的相轨道都会趋向于它，这个点称为不动点。当振子处于静止时，即使偶尔受到外界的扰动，使得运动状态偏离不动点，但一旦把扰动撤掉，运动状态又会趋近于不动点，并最终恢复静止。就好像是在相空间中存在一个吸引点，它会把周围的轨道都吸引到该点处，我们称这个特殊的位置为吸引子。

除了存在不动点类型的吸引子外，还存在周期的吸引子，从图 19-4 (c) 中可见，受阻尼力和周期驱动力的弹性振子的运动状态也被吸引到相空间中的一个封闭的轨道上。这种周期吸引子称为稳定极限环。任何稳定的周期运动都对应于其相空间中的稳定极限环。

吸引子是物质系统运动的稳态运动行为在相空间中的反映。稳态运动是系统从初始状态出发，经历了长时间演化后，最终达到的运动状态。对于无外力驱动的阻尼振子来说，其长时间演化将趋向静止，即趋向不动点吸引子。而在外周期驱动作用下，其运动状态将趋向一个周期运动，即极限环吸引子。除了上述两类吸引子外，还存在准周期吸引子和奇异吸引子，其中奇异吸引子对应于一种称为混沌运动的演化状态。如图 19-5，是一种称为 Rossler 吸引子的奇异吸引子，它是一种混沌运动的稳态。

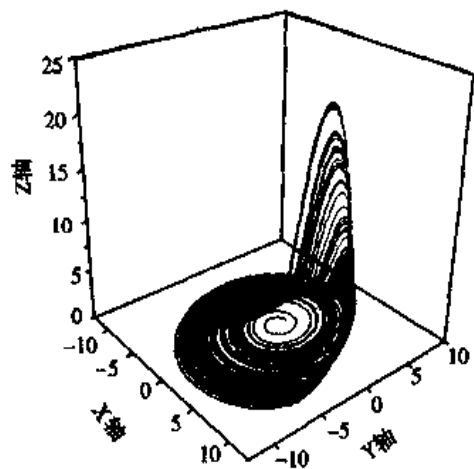


图 19-5 Rossler 奇异吸引子



从上面的例子可知：运动的相空间表示法可以表达出运动的演化趋势。对于不同性质的运动，其相空间中所对应的吸引子也不同。运动是指物质系统的存在状态不断随时间演化的过程，尽管不同的物质系统的存在形式有差别，但现今的研究表明各种空间尺度的系统的演化趋势存在跨越尺度的普遍规律，按运动的性质划分，一般认为存在定态、周期、准周期、混沌和湍流运动。除湍流外，在物理运动、化学运动、生物运动和社会运动中均可发现上述四种运动规律。

## 第二节 混沌运动

自然界中存在大量的可以用周期运动来近似描述的演化过程，如宇宙中星体的运动、地球上节气的周而复始的变化、生物体内生物钟的调节作用等。这种运动的最大特点是：满足近似的周期性，可以在较高的误差精度内预报未来的演化趋势。牛顿力学的建立，以及从它发展出来的确定性理论乐观地预言：只要能够得到演化规律的方程，就一定能够从现在的运动状态预言出未来的演化情况。

量子力学的确立及其在微观世界研究中所取得的成果，揭示了经典确定论观点在认识微观世界的规律中所表现出的局限性。早在 20 世纪初，庞加莱(Poincare)在研究 3 个星体相互作用下的运动规律后提出：复杂的相互作用有可能产生一种不可预报的运动行为。20 世纪 60 年代，美国气象物理学家洛伦兹发现：在描写大气热对流运动的非线性方程中，出现了一种不规则的运动，这种运动可以用确定的方程描述，但不可能对其长期的运动加以预报。生态学简单的非线性模型中也出现了这类服从确定性规律，但又表现为类似随机性变化的运动过程。这些发现以及非线性运动规律在自然界中的普遍存在，促使人们对服从非线性规律的运动进行了大量的研究，开始认识到：自然界中还存在着另一类貌似随机的确定性运动，即混沌运动。在生物界也普遍存在混沌运动，如正常人心率的变异性、神经系统电信息活动的普遍混沌性、内分泌调节的不规则、流行病发展的混沌变化、DNA 分子的混沌态、生化反应的混沌等。混沌理论被誉为 20 世纪继相对论、量子力学之后的第三次科学革命，它不仅适用于宏观物体，而且也适用于微观粒子，使得人们对以往被忽视、但又普遍存在的一类运动有了新的认识。

### 一、混沌运动

混沌运动的最突出特点是：确定性系统中出现的貌似无规则的、类似随机的现象，这里给出两个混沌运动的例子。

**1. 虫口模型** 假定有某种昆虫，每年夏季成虫产卵后全部死亡，第二年春天每个虫卵孵化成一只虫子。设第  $n$  年的虫口数目为  $x_n$ ，每只成虫平均产卵  $a$  个，考虑到生存条件对虫口的限制作用，虫口的方程是：

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n) \quad (19-4)$$

设某第一年虫口为  $x_1$ ，则第二年为  $x_2 = ax_1(1 - x_1)$ ，依次类推，就可以计算出每年的虫口数量。这个函数关系反映的种群变化机制是：当虫口出生率较小时，生存

环境相对宽松，因此虫口数量增长较快；当出生率较大时，由于有限的生存环境使得虫口数量反而下降，如图 19-6 所示。为了研究方便将虫口数量归一化为 0~1 之间的量。图 19-7 为取不同  $a$  值时虫口逐年的变化情况，(a) 为定态， $a = 2.0$ ；(b) 为周期变化，每 2 年虫口数量重复 1 次， $a = 3.2$ ；(c) 为另一种周期变化，虫口每 4 年重复 1 次， $a = 3.5$ ；(d) 为混沌变化，呈现完全的不规则性， $a = 3.8$ 。但这种貌似随机的变化是从一个确定性的演化规律中产生出来的，并非是随机扰动的结果。因为，如果把第  $n$  年虫口数量作为横轴，把第  $n + 1$  年虫口数量作为纵轴，生成坐标点，如  $(x_1, x_2)$ 、 $(x_2, x_3)$ 、 $\dots$ 、 $(x_n, x_{n+1})$ ，则混沌状态时这些坐标点都落在如图 19-6 的抛物线上，这说明前后点之间存在确定的函数关系，即当  $a = 3.8$  时的式 (19-4)。这里显示非线性的确定性特征的方法是延迟嵌入方法，即对非线性系统的某个运动参量进行等时间间隔或非等时间间隔地采样，得到  $n$  个值  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n$ ，这个数列称为时间序列。如果要重新建立  $d$  维的相空间，则将前后测到的  $d$  个值组成一个  $d$  维的相空间点。如当  $d = 3$  时，从上述时间序列重新建立的第一个相空间点为  $(x_1, x_2, x_3)$ ，第二个为  $(x_2, x_3, x_4)$ 、 $\dots$ 、第  $i$  个点为  $(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$  等等，共可生成  $n - d + 1$  个点。这些点在新的重构的相空间的演化趋势与产生这些时间序列的原始系统的相空间中的轨道演化趋势一致。上述从一维运动参量的变化值中建立新的相空间的过程称为相空间重构。上面生成相空间的方法称为延迟嵌入。有理论证明运用相空间重构方法可以等价得到原始相空间中系统演化的某些规律。在虫口

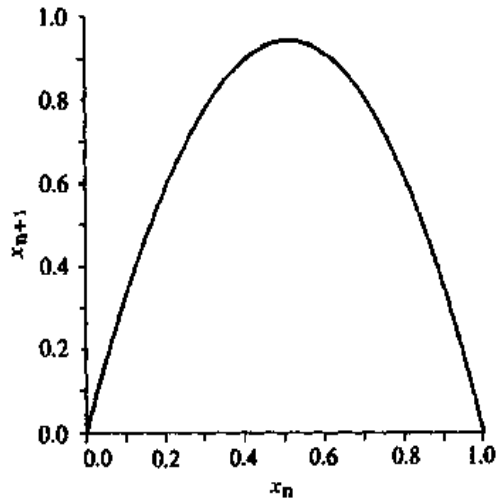


图 19-6 虫口模型

模型中，如果把第  $n$  年虫口数量作为横轴，把第  $n + 1$  年虫口数量作为纵轴，生成坐标点，如  $(x_1, x_2)$ 、 $(x_2, x_3)$ 、 $\dots$ 、 $(x_n, x_{n+1})$ ，则混沌状态时这些坐标点都落在如图 19-6 的抛物线上，这说明前后点之间存在确定的函数关系，即当  $a = 3.8$  时的式 (19-4)。这里显示非线性的确定性特征的方法是延迟嵌入方法，即对非线性系统的某个运动参量进行等时间间隔或非等时间间隔地采样，得到  $n$  个值  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n$ ，这个数列称为时间序列。如果要重新建立  $d$  维的相空间，则将前后测到的  $d$  个值组成一个  $d$  维的相空间点。如当  $d = 3$  时，从上述时间序列重新建立的第一个相空间点为  $(x_1, x_2, x_3)$ ，第二个为  $(x_2, x_3, x_4)$ 、 $\dots$ 、第  $i$  个点为  $(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$  等等，共可生成  $n - d + 1$  个点。这些点在新的重构的相空间的演化趋势与产生这些时间序列的原始系统的相空间中的轨道演化趋势一致。上述从一维运动参量的变化值中建立新的相空间的过程称为相空间重构。上面生成相空间的方法称为延迟嵌入。有理论证明运用相空间重构方法可以等价得到原始相空间中系统演化的某些规律。在虫口

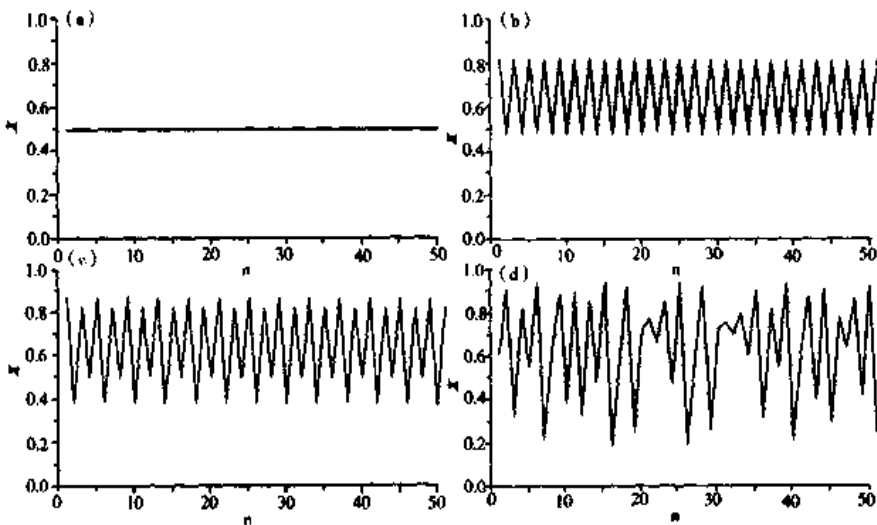


图 19-7 虫口模型的不同振荡模式

模型的讨论中运用了二维的相空间重构。

**2. 神经元放电活动的混沌** 神经系统由神经元构成, 神经系统的信息发生、传导和处理功能的实现有赖于神经元电活动。以下是神经元电活动的一个物理模型:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax^3 - bx - y - z + 1 \\ \frac{dy}{dt} &= c - dx^2 - y \\ \frac{dz}{dt} &= r[s(x - x_0) - z] \end{aligned} \quad (19-5)$$

其中  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$ 、 $r$ 、 $s$ 、 $x_0$  为常数, 当这些常数取某些值时, 神经元模型呈现出周期的放电样式, 而在某些值时却呈现混沌, 如图 19-8。

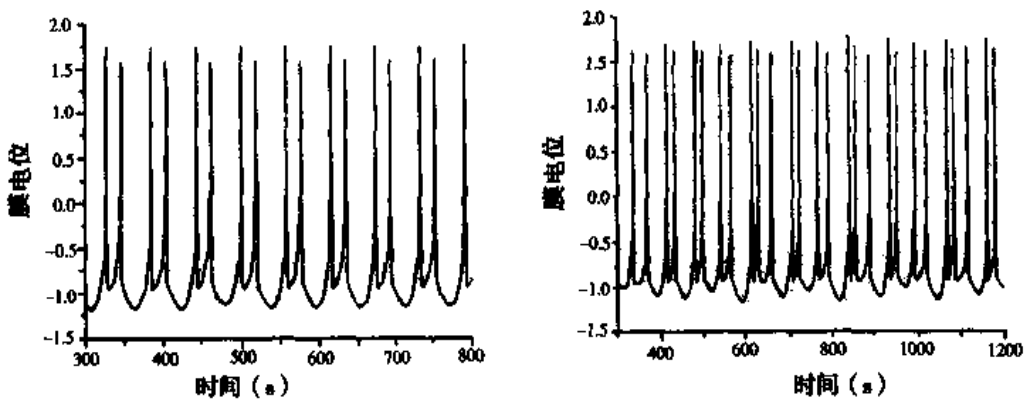


图 19-8 神经元膜电位放电振荡

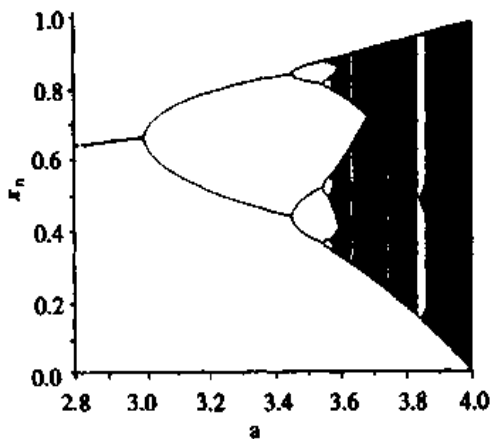


图 19-9 虫口模型的分叉图

从上述 2 个例子中我们知道, 同一非线性系统的参数取不同值时, 可能存在定态、周期和混沌运动。而且随着参数的变化, 系统的运动可以从一种定性行为转化为另一种定性行为, 如当虫口模型的  $a$  逐渐增大时, 虫口的变化从定态到周期二, 又到周期四, 直到混沌。非线性系统的参数变化引起的运动定性行为的突变现象称为分叉或分岔。图 19-9 中, 为取不同  $a$  值时虫口的变化情况。横轴是  $a$  值, 纵轴为相应  $a$  值时虫口所取的值。对于定态, 一定  $a$  值对应一个虫口值; 对于周期二,  $a$  处对应应有 2 个虫口值, 依次类推, 会随  $a$  的增大出现周期四、周期八、周期十六等等, 这种周期运动随参数变化而发生的周期倍化的定性性质的变化过程称为倍周期分叉。对于混沌, 取一定  $a$  值可以有无数多的、分布在一定值范围的虫口值。

## 二、奇异吸引子

描写混沌运动同样要借助相空间方法。混沌运动首先表现为状态参量在一定范围内的振荡过程，因此它的相轨道在相空间一定区域来回游荡。同时由于非周期性，使得轨道永不封闭。图 19-10 中为洛伦兹混沌对应的相空间吸引子。它呈现蝴蝶状，轨道被吸引在这个区域内来回游走。这种吸引子既有一定的分布形状，但又不同于不动点和极限环，称为奇异吸引子。

在奇异吸引子内部，相邻轨道间指数的发散，对轨道的任何一点小扰动都会使得后来的演化轨道偏离轨道很多，正是这一点使得对混沌运动的长时间预报成为不可能。这种对扰动的放大效应称为混沌的初值敏感性，也称蝴蝶效应。在相空间中，不动点的维数是 0，极限环的维数是 1，而混沌对应的奇异吸引子的维数是分数维。我们把具有分数维的几何对象称为分形。自然界中广泛存在具有分数维的几何体，如：白云、山脉、河流支流，神经及毛细血管网等。

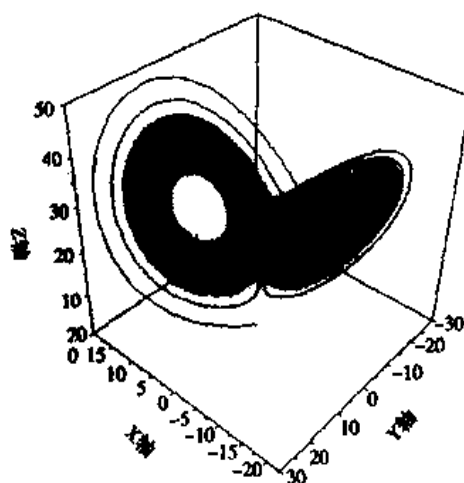


图 19-10 洛伦兹吸引子

对混沌运动的研究是人们认识自然界演化规律的过程从低级向高级、从简单到复杂的必然产物。混沌作为一个科学概念，它不等同于概率意义上的随机，其本质是确定性系统产生的不规则行为。由于混沌系统对初始状态的极端敏感性，它能够放大微小的差异，导致系统的长期行为不可预测。另一方面，混沌现象所固有的确定性表明许多貌似随机的现象比过去想象的更容易预测。过去那些过分复杂、貌似随机的信息常被束之高阁，而实际上这些信息可以用简单的法则加以揭示，并有可能建立比线性模型更好的短期预测方法。生物系统是典型的复杂系统，对它本质的认识也必然会要求我们掌握一定的混沌理论知识，从而在认识生命活动的研究中，从更高的水平来认识和把握规律性。混沌理论在医学中的应用研究成果日益向公认的某些医学原理提出挑战，为一些疾病的防治提供新的方法。

### 第三节 分形与分维

分形是近十年来发展起来的新学科，它研究的是自然界中常见的、变幻莫测的、不稳定的、非常不规则的现象。用数学的语言来说，它是研究自然界中没有特征长度而又具有自相似性的形状和现象。一般几何学研究的图形具有特征长度，是局部平滑及可微分性的。分形研究的图形是不平滑的、不可微分的复杂图形。

自然界的许多体系、现象和过程都具有分形构造，比如星云的分布、海岸线的形状、山形的起伏、地震、河网水系、湍流、聚集体、相变、人体血管系统、肺泡结

构、蛋糕中的孔穴、螺旋形的海贝壳、城市的噪音、气候的激烈变化、股票的变动、癫痫病人脑活动等，从物质世界的宏观到微观都普遍存在分形。这种几何存在状态具有自相似性特征，是介于无序与有序之间的状态，是自然界最广泛存在的状态。

## 一、自相似性

自相似性是指一个几何体的局部与其整体具有结构相似性，它是分形的最显著特征。图 19-11 是一个分形图形(龟图)，从整体来看，类似龟形。如果注意其头部，可发现其仍为一个与整体相似的龟形，图 19-11 (b)为头部放大图，与整体形似且仍可以由头部无限放大下去，其局部结构与整体具有无限的自相似性。

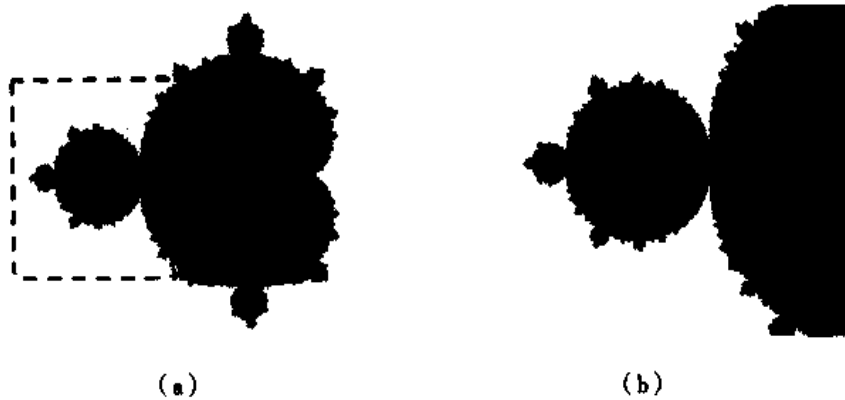


图 19-11 龟图的自相似性

(a)中为整个龟图，虚线框内被放大为(b)图，  
(b)中头部结构与龟图整体相似，这种放大过程可以无限进行下去

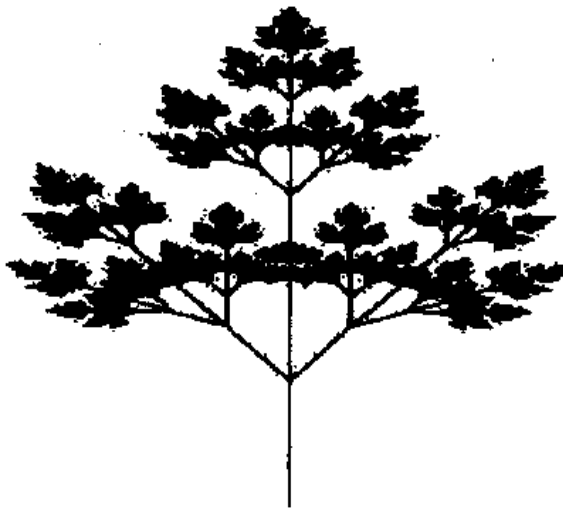


图 19-12 植物分形

图 19-12 是另一个分形的例子，其形状酷似植物。其每一个分支的几何结构都与整体相似，并具有无限的自相似性。

自相似性不仅表现在一般几何形态中，而且奇异吸引子也具有自相似性。因此混沌动力学具有分形特征。图 19-13 为虫口模型的分叉图，在图中，随着出生率参数的改变，虫口的数量的变化模式由周期一到周期二，再到周期四、周期八，最后进入混沌。在每次周期模式分叉转变为新的周期模式后，其周期数是原来的 2 倍，把这种分叉过程称为倍周期分叉。当继续增加参数值时，又会进入周期三，并

经历一系列周期模式的分叉过程后再次进入混沌。如果放大周期三窗口中的每一个分支的分叉过程，会发现其也经历了倍周期分叉过程，在此过程中同样包含了周期一、周期二、周期四混沌，周期三等，而每一个倍周期分叉过程又与总体的分叉趋势相同。这说明非线性系统的分叉过程中也会包含分形特征。

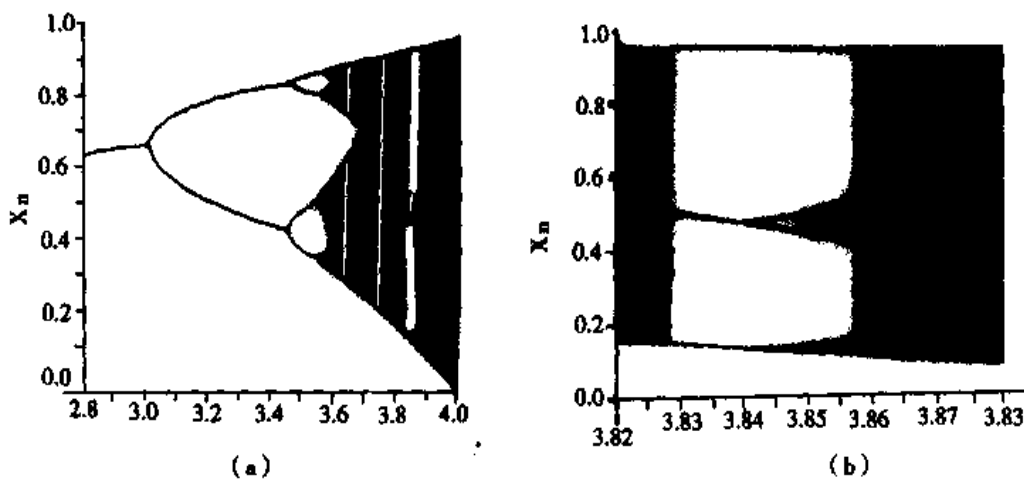


图 19-13 虫口模型分叉过程中的分形

值得注意的是，如果在生成分形的动力学过程中有随机扰动加入，就会破坏原来的自相似性，使得形态表现为某种程度的不规则。这种生成的分形称为随机分形，它虽然不具有严格的自相似性，但它来自于分形发生机制。它与具有自相似性的分形同样具有一个重要的性质，即具有非整数的维数——分数维。

## 二、分数维

分数维这一概念，是 B·曼德尔布诺特(B. Mandelbror, Benoit)于 1977 年提出的。它不仅对自然科学的各个领域，而且对社会科学也有很大影响。在经典欧几里德几何中，我们可以用直线、圆锥、球等这一类规则的形状去描述诸如墙、车轮、道路、建筑物等人造物体，然而在自然界中却存在着许许多多极其复杂的形状，如山不是圆锥、云不是球、闪电不是折线、雪花边缘也不是圆等等；再如宇宙中点点繁星所构成的集合更非经典几何所能描述的，它们不再具有我们早已熟知的数学分析中的“连续”、“光滑”这些基本性质了。这类奇形怪状长期以来被认为是“不可名状的”或“病态的”。这类几何图形不能用传统的几何语言来描述，但可以谈分形所具有的特征。

如图 19-14 所示去掉中间 1/3 的康托(Cantor)集(简称三分康托集)是一种人们最了解，同时也是最容易构造的分形，然而，它却显示出许多最典型的分形特征。它是从单位区间出发，通过一系列不断地去掉部分子区间的过程构造出来的。设  $E_0$  是闭区间  $[0,1]$ ， $E_1$  表示由此除去中间 1/3 之后得到的集，即  $E_1$  包含  $[0,1/3]$  和  $[2/3,1]$  两个区间，分别去掉这两个区间的中间 1/3 而得到  $[0,1/9]$ 、 $[2/9,1/3]$ 、 $[2/3,7/9]$ 、 $[8/9,1]$  四个区间，按此方法继续下去，则  $E^k$  是由  $2^k$  个长度各为  $3^{-k}$  的区间组成的。三分康托

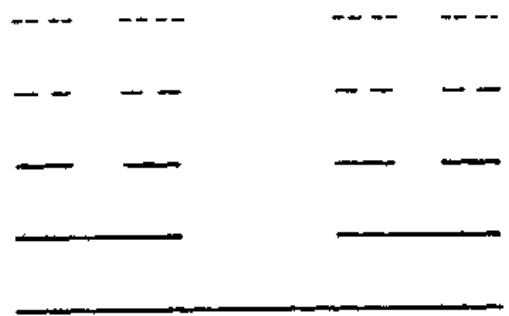


图 19-14 康托集合

集  $F$  是由属于所有  $E_k$  的数组成的, 不可能画出带有无穷小细节的  $F$  自身, 所以  $F$  的图形实际上只是一个  $k$  充分大时对  $F$  较好逼近的  $E_k$  的图形。它具有自相似性, 有“精细结构”, 即它包含有任意小比例的细节。越放大康托集的图形, 间隙就越清楚地呈现在我们面前。虽然  $F$  在某种意义上是相当大的集(是不可数的无穷集), 然而它的大小不适于用通常的长度等来度量, 用任何合理定义的长度,  $F$  总是长度为零。

表 19-1 某些分形的分数维

| 分形     | 分数维       | 分形        | 分数维       |
|--------|-----------|-----------|-----------|
| 路面凹凸   | 2.25      | 人脑沟回分形    | 2.73~2.79 |
| 河主流    | 1.10~1.30 | 树枝分支      | 1.28~1.79 |
| 亚马孙河支流 | 1.85      | 地震发生频率与震级 | 0.67      |
| 尼罗河支流  | 1.40      | 银河系星云分布   | 1.20      |
| 人肺     | 2.17      | 陨石直径分布    | 2.30      |
| 血管直径分布 | 2.30      | 云团大小与周长分布 | 1.35      |

经典的几何计算方法已经不适合用于研究分形, 需要另外的方法, 此方法就是计算它的维数。

首先我们看一长为  $L$  的线, 若用一长为  $r$  的“尺”去量, 结果为  $N$  尺, 即  $N(r) = L/r \propto r^{-1}$ 。若要测量一面积为  $A$  的物体, 就要用  $r \times r$  的小方块去量, 才能给出确定的  $N$  值, 其  $N$  值为  $N(r) = A/r^2 \propto r^{-2}$ 。如果不是用小方块去测量而还是用长度为  $r$  的尺去直接测量, 那是测不出这块面积的大小的。从数学的角度来看无异是提出“一块面积有多长”这样一个问题。由此可见, 测量任何一个物体时都必须用一个适合于它的“尺”去量度, 才能给出正确的数值。数学家们把这个事实归纳为下述结论: 对于任何一个有确定维数的几何体, 若用与它相同维数的“尺”去量度, 则可得一确定的数值  $N$ , 若用低于它维数的“尺”去量它, 其结果为无穷大, 若用高于它维数的“尺”去量它, 其结果为零。其数学表达式为

$$N(r) \propto r^{-D} \quad (19-6)$$

由此得

$$D = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln N(r)}{\ln\left(\frac{1}{r}\right)} \quad (19-7)$$

式中的  $D$  称为豪斯道夫维数, 它可以为整数, 如对于点、线、面、体的豪斯道夫维数分别是 0、1、2、3。它也可以为分数, 通常将豪斯道夫维数是分数的物体称为分形, 所以维数为分数是分形的另一个重要特征。如康托(Cantor)集的豪斯道夫维数是 0.6309。

### 思考题与习题十九

19-1 什么是状态参量?

19-2 什么是相空间? 试举例说明。

- 19-3 用相空间描述运动与经典动力学描述方法的差别在哪里?
- 19-4 试举例说明不动点与极限环分别对应于实际的哪类运动?
- 19-5 吸引子与运动的演化趋势之间的关系是什么?
- 19-6 混沌运动的特征是什么? 主要有哪些定性性质?
- 19-7 什么是分形? 它的主要特征是什么?
- 19-8 分形与混沌运动有什么关系?
- 19-9 自相似性是指什么? 具有自相似性的几何对象与点、线、面、体的本质差别是什么?
- 19-10 试说明为什么分形具有分数维?
- 19-11 试举例说明在学习了本章后, 非线性动力学认识演化规律的方法与你以前的哪些观念有较大差别。

(杨继庆)



## 参 考 文 献

- 王身立. 生物物理遗传学. 长沙: 湖南科学技术出版社, 1992.
- 王良御, 等. 液晶化学. 北京: 科学出版社, 1988.
- 王惠文. 激光与生命科学. 北京: 北京理工大学出版社, 1995.
- 王殿福, 等译. 液晶的最新技术: 物性·材料·应用. 北京: 化学工业出版社, 1991.
- 王鸿儒, 等译. 生命科学用物理学(第二版). 北京: 人民卫生出版社, 1980.
- 王鸿儒, 等. 物理学(第二版). 北京: 北京医科大学出版社, 2000.
- 邓明成, 等. 新编大学物理学. 北京: 科学出版社, 1999.
- 卢德馨. 大学物理学. 北京: 高等教育出版社, 1998.
- 华西医科大学, 等. 物理学. 成都: 四川科学技术出版社, 1988.
- 刘普和. 医学物理学. 北京: 人民卫生出版社, 1989.
- 刘 骥, 等. 医用生物物理学. 北京: 人民卫生出版社, 1998.
- 朱翠玲. 现代医学与现代医学仪器. 北京: 中国医药科技出版社, 1990.
- 朱翠玲. 现代医学影像学. 济南: 山东科学技术出版社, 2000.
- 李加纳. 数量遗传学概论. 重庆: 西南师范大学出版社, 1995.
- 陆 果. 基础物理学(上、下卷). 北京: 高等教育出版社, 1997.
- 吴熙毅, 等译. 液晶与生物结构. 北京: 科学出版社, 1983.
- 陈 力. 生物电子显微术教程. 北京: 北京师范大学出版社, 1998.
- 陈炳桓. 立体定向放射神经外科学. 北京: 北京出版社, 1994.
- 杨子彬. 生物医学工程学. 哈尔滨: 黑龙江科学技术出版社, 2000.
- 胡纪湘. 医用物理学(第四版). 北京: 人民卫生出版社, 1995.
- 胡逸民. 肿瘤放射物理学. 北京: 原子能出版社, 1999.
- 赵凯华. 新概念物理教程: 力学. 北京: 高等教育出版社, 2000.
- 徐国祥. 激光医学. 北京: 人民卫生出版社, 1998.
- 张三慧. 大学物理学(第二版). 北京: 清华大学出版社, 2000.
- 龚尔璋, 等. 医用物理学. 北京: 科学技术文献出版社, 1993.
- 黄继英, 等. 磁共振成像原理. 西安: 陕西科学技术出版社, 1997.
- 谢毓章. 液晶物理学. 北京: 科学出版社, 1988.
- 褚圣麟. 原子物理学. 北京: 人民教育出版社, 1979.
- Kane J W et al. Life Science Physics. New York: JOHN WILEY & SONS, 1978.
- Paul A. Tipler. Physics. Worth Publishers, INC, 1990.
- IAEA. Absorbed dose determination in photon and electron beams an international code of practice. Technical reports. International Atomic Energy Agency, Vienna, 1997.

# 索引

## A

|         |                     |     |
|---------|---------------------|-----|
| 艾里斑     | Airy disk           | 213 |
| 安培环路定律  | Ampere circular law | 174 |
| 阿伏伽德罗定律 | Avogadro law        | 93  |
| 阿伏伽德罗常量 | Avogadro constant   | 92  |

## B

|          |                           |     |
|----------|---------------------------|-----|
| 不可逆过程    | irreversible process      | 121 |
| 不动点      | fixed point               | 379 |
| 不确定关系    | uncertainty relation      | 266 |
| 贝可勒尔     | Becquerel                 | 307 |
| 半波带法     | half wave zone method     | 211 |
| 半波损失     | half-wavelength loss      | 206 |
| 半衰期      | half-life                 | 305 |
| 半透膜      | semipermeable membrane    | 100 |
| 布拉格定律    | Bragg law                 | 287 |
| 布儒斯特角    | Brewster angle            | 216 |
| 本构关系     | constitutive relationship | 20  |
| 毕奥-萨伐尔定律 | Biot-Savart law           | 171 |
| 伯努利方程    | Bernoulli equation        | 31  |
| 泊松比      | Poisson ratio             | 20  |
| 泊肃叶定律    | Poiseuille law            | 37  |
| 波长       | wavelength                | 55  |
| 波节       | node                      | 62  |
| 波的干涉     | interference of wave      | 59  |
| 波的强度     | intensity of wave         | 58  |
| 波腹       | loop                      | 61  |
| 表面吸附     | surface adsorption        | 107 |
| 表面张力     | surface tension           | 102 |
| 表面能      | surface energy            | 103 |

|          |                            |     |
|----------|----------------------------|-----|
| 保守力      | conservative force         | 10  |
| 标识 X 射线  | characteristic X-ray       | 284 |
| 泵        | pump                       | 165 |
| 玻耳兹曼分布定律 | Boltzmann distribution law | 98  |
| 玻耳兹曼常量   | Boltzmann constant         | 93  |
| 倍周期分叉    | doubling-bifurcation       | 382 |
| 部分偏振光    | partial polarization light | 215 |
| 薄透镜      | thin lens                  | 232 |

## C

|         |   |     |
|---------|---|-----|
| 冲量      | impulse                                     | 12  |
| 次声波     | infrasonic wave                             | 63  |
| 层子      | stratum                                     | 322 |
| 层流      | laminar flow                                | 34  |
| 场源电荷    | charge of field source                      | 130 |
| 场强叠加原理  | superposition principle of field intensity  | 130 |
| 氚       | tritium                                     | 300 |
| 超子      | hyperon                                     | 322 |
| 超声波     | supersonic wave                             | 67  |
| 超导量子干涉仪 | superconducting quantum interference device | 187 |
| 除极      | depolarization                              | 149 |
| 窗位      | window level                                | 296 |
| 窗宽      | window width                                | 296 |
| 塞曼效应    | Zeeman effect                               | 361 |
| 磁矩      | magnetic moment                             | 177 |
| 磁场      | magnetic field                              | 169 |
| 磁导率     | permeability                                | 182 |
| 磁介质     | magnetic medium                             | 183 |
| 磁通量     | magnetic flux                               | 170 |
| 磁偶极子    | magnetic dipole                             | 177 |
| 磁场强度    | magnetic field strength                     | 183 |
| 磁量子数    | magnetic quantum number                     | 274 |
| 磁感应线    | magnetic induction line                     | 120 |
| 磁感应强度   | magnetic induction                          | 169 |
| 磁共振成像   | magnetic resonance imaging, MRI             | 360 |

## D

|      |                          |     |
|------|--------------------------|-----|
| 对应原理 | correspondence principle | 262 |
|------|--------------------------|-----|

|          |                                  |     |
|----------|----------------------------------|-----|
| 对称操作     | symmetry operation               | 11  |
| 电子对产生    | electron pair production         | 310 |
| 电子对湮没    | electron pair annihilation       | 310 |
| 电子非定域化   | electron delocalization          | 327 |
| 电子俘获     | electron capture                 | 304 |
| 电子显微镜    | electron microscope              | 249 |
| 电介质      | dielectric                       | 142 |
| 电介质的极化   | dielectric polarization          | 142 |
| 电场强度     | electric field strength          | 130 |
| 电导纳      | electrical admittance            | 191 |
| 电导率      | conductivity                     | 157 |
| 电位移矢量    | electric displacement vector     | 145 |
| 电位移通量    | electric displacement flux       | 145 |
| 电极化率     | electric susceptibility          | 143 |
| 电极化强度    | electric polarization            | 143 |
| 电阻抗      | impedance                        | 191 |
| 电势       | electric potential               | 137 |
| 电势能      | electric potential energy        | 136 |
| 电势梯度     | electric potential gradient      | 139 |
| 电流密度     | electric current density         | 155 |
| 电流强度     | electric current strength        | 154 |
| 电离       | ionization                       | 309 |
| 电离比值     | specific ionization              | 309 |
| 电通量      | electric flux                    | 132 |
| 电偶层      | electric double layer            | 141 |
| 电偶极子     | electric dipole                  | 140 |
| 电偶极矩     | electric dipole moment           | 140 |
| 电磁波      | electromagnetic wave             | 198 |
| 电磁泵      | electromagnetic pump             | 180 |
| 电磁感应     | electromagnetic induction        | 188 |
| 动压       | dynamical pressure               | 32  |
| 动作电位     | action potential                 | 167 |
| 动态平衡     | dynamic equilibrium              | 90  |
| 动态空间重现技术 | dynamic spatial reconstruct, DSR | 295 |
| 动能       | kinetic energy                   | 10  |
| 动能定理     | theorem of kinetic energy        | 10  |
| 动量       | momentum                         | 7   |
| 动量守恒定律   | law of conservation of momentum  | 13  |

|               |  |     |
|---------------|--|-----|
| 动量定理          | theorem of momentum                                  | 12  |
| 多普勒效应         | Doppler effect                                       | 66  |
| 氘             | Deuterium  | 300 |
| 单光子发射型计算机断层摄影 | single photon emission computed tomography,<br>SPECT | 318 |
| 单色辐出度         | Monochromatic radiant exitance                       | 255 |
| 单轴晶体          | uniaxial crystal                                     | 217 |
| 定压过程          | constant pressure process                            | 112 |
| 定容过程          | constant volume process                              | 112 |
| 定轴转动          | fixed-axis rotation                                  | 14  |
| 第一主平面         | primary principal plane                              | 234 |
| 第一主点          | primary principal point                              | 234 |
| 第一节点          | primary nodal point                                  | 235 |
| 第一类永动机        | perpetual motion machine of the first kind           | 120 |
| 第二主平面         | secondary principal plane                            | 234 |
| 第二主点          | secondary principal point                            | 234 |
| 第二节点          | secondary nodal point                                | 235 |
| 第二类永动机        | perpetual motion machine of the second kind          | 120 |
| 短程力           | short-range -force                                   | 300 |
| 等厚干涉          | equal thickness interference                         | 207 |
| 等厚条纹          | equal thickness fringes                              | 207 |
| 等温过程          | isothermal process                                   | 144 |
| 道尔顿定律         | Dalton law   | 94  |
| 叠加原理          | superposition principle                              | 59  |
| <b>E</b>      |  |     |
| 二向色性          | dichroism  | 219 |
| <b>F</b>      |  |     |
| 分叉, 分岔        | bifurcation  | 382 |
| 分子力           | molecular force                                      | 89  |
| 分子轨道法         | molecular orbital method                             | 325 |
| 分形学           | fractal  | 375 |
| 分数维           | fractal dimension                                    | 376 |
| 分辨本领          | resolving power                                      | 243 |
| 反转恢复          | inversion recovery                                   | 370 |
| 夫琅禾费衍射        | Fraunhofer diffraction                               | 210 |
| 方均根速率         | root-mean-square speed                               | 96  |

|            |  |     |
|------------|--|-----|
| 发射型计算机断层摄影 | emission computed tomography             | 318 |
| 负晶体        | negative crystal                         | 218 |
| 放射性平衡      | radioactive equilibrium                  | 308 |
| 放射性活度      | radioactivity                            | 307 |
| 法向加速度      | normal acceleration                      | 6   |
| 法拉第电磁感应定律  | Faraday law of electromagnetic induction | 189 |
| 非线性动力学     | nonlinear dynamics                       | 375 |
| 非常光        | extraordinary light                      | 217 |
| 复极         | repolarization                           | 149 |
| 封闭系统       | closed system                            | 109 |
| 菲克第一定律     | Fick first law                           | 100 |
| 菲涅耳衍射      | Fresnel diffraction                      | 210 |
| 傅里叶变换      | Fourier transform                        | 293 |
| 辐射权重因子     | radiation weighting factor               | 312 |
| 辐射跃迁       | radiation transition                     | 347 |

## G

|        |  |         |
|--------|--|---------|
| 广义相对论  | general relativity                       | 73      |
| 戈瑞     | Gray, Gy                                 | 312     |
| 功      | work                                     | 9       |
| 归一化条件  | normalization condition                  | 95, 267 |
| 光子     | photon                                   | 258     |
| 光电子    | photo-electron                           | 257     |
| 光电效应   | photo-electric effect                    | 257     |
| 光矢量    | photo vector                             | 214     |
| 光多普勒效应 | optical Doppler effect                   | 79      |
| 光的衍射   | diffraction of light                     | 210     |
| 光程     | optical path                             | 203     |
| 光程差    | optical path difference                  | 203     |
| 光学谐振腔  | optical resonant cavity                  | 348     |
| 光弹效应   | photoelastic effect                      | 221     |
| 光速不变原理 | principle of constancy of light velocity | 75      |
| 光谱     | spectrum                                 | 276     |
| 光栅     | grating                                  | 213     |
| 光栅常量   | grating constant                         | 213     |
| 光栅方程   | grating equation                         | 214     |
| 光栅光谱   | grating spectrum                         | 214     |
| 共振     | resonance                                | 50      |

|              |   |     |
|--------------|---|-----|
| 共轴系统         | coaxial system  | 213 |
| 刚体           | rigid body  | 14  |
| 固有长度         | proper length   | 78  |
| 固有时          | proper time   | 78  |
| 国际辐射单位和测量委员会 | International Commission on Units and Measurements, IC    | 311 |
| 国际辐射防护委员会    | International Commission on Radiological Protection, ICRP | 312 |
| 高斯面          | Gauss surface   | 134 |
| 高斯定理         | Gauss theorem   | 134 |
| 惯性           | inertia   | 7   |
| 惯性力          | inertial force  | 8   |
| 惯性系          | inertial frame  | 8   |
| 概率           | probability   | 267 |
| 概率密度         | probability density                                       | 267 |
| <b>H</b>     |   |     |
| 宏观量          | macroscopic quantity                                      | 89  |
| 厚透镜          | thick lens  | 234 |
| 核力           | nuclear force   | 300 |
| 核子           | nucleon   | 300 |
| 核素           | nuclide   | 300 |
| 核素发生器        | isotope generator   | 308 |
| 核素成像         | radionuclide imaging, RI                                  | 316 |
| 核衰变          | nuclear decay   | 302 |
| 耗散结构         | dissipative structure                                     | 127 |
| 混沌           | chaos   | 273 |
| 焓            | enthalpy  | 113 |
| 惠更斯原理        | Huygens principle   | 58  |
| 滑环技术         | slipping  | 296 |
| 遏止电势         | stopping potential  | 257 |
| 黑体           | black body  | 255 |
| 黑洞           | black hole  | 87  |
| 横波           | transverse wave   | 54  |
| 霍尔效应         | Hall effect   | 178 |
| <b>J</b>     |   |     |
| 介子           | meson   | 322 |

|            |  |     |
|------------|--|-----|
| 介电常量       | dielectric constant                      | 144 |
| 加速度        | acceleration                             | 6   |
| 机械波        | mechanical wave                          | 54  |
| 机械能守恒定律    | law of conservation of mechanical energy | 11  |
| 伽利略变换      | Galilean transformation                  | 74  |
| 极化         | polarization                             | 142 |
| 极化电场       | polarization electric field              | 143 |
| 极限环        | limited circle                           | 379 |
| 角加速度       | angular acceleration                     | 15  |
| 角速度        | angular velocity                         | 15  |
| 角动量        | angular momentum                         | 16  |
| 角动量守恒定律    | law of conservation of angular momentum  | 18  |
| 角放大率       | angular magnification                    | 241 |
| 角量子数       | angular quantum number                   | 273 |
| 角频率        | angular frequency                        | 48  |
| 近点         | near point                               | 238 |
| 剂量当量       | dose equivalent                          | 312 |
| 结合能        | binding energy                           | 301 |
| 绝热过程       | adiabatic process                        | 114 |
| 基尔霍夫定律     | Kirchoff law                             | 157 |
| 基本统计假设     | fundamental statistical postulate        | 91  |
| 基本粒子       | elementary particles                     | 321 |
| 基础代谢率      | basal metabolic rate, BMR                | 116 |
| 基频         | fundamental frequency                    | 52  |
| 接触角        | contact angle                            | 105 |
| 检偏器        | analyzer                                 | 215 |
| 简谐波        | simple harmonic wave                     | 54  |
| 简谐振动       | simple harmonic vibration                | 47  |
| 截止频率       | cutoff frequency                         | 257 |
| 静电场        | electrostatic field                      | 130 |
| 静电场的环路定理   | circular theorem of electrostatic field  | 136 |
| 静压         | static pressure                          | 32  |
| 静质量        | rest mass                                | 81  |
| 静息电位       | resting potential                        | 163 |
| 静能         | rest energy                              | 82  |
| 激发         | excitation                               | 309 |
| 激光扫描共聚焦显微镜 | laser scanning confocal microscope       | 251 |
| 激活介质       | active medium                            | 349 |



## K

|          |                                  |     |
|----------|----------------------------------|-----|
| 孔径数      | numerical aperture               | 245 |
| 开尔文表述    | Kelvin statement                 | 120 |
| 开放系统     | open system                      | 109 |
| 卡诺定理     | Carnot theorem                   | 123 |
| 卡诺循环     | Carnot cycle                     | 119 |
| 可逆过程     | reversible process               | 121 |
| 夸克       | quark                            | 322 |
| 扩散       | diffusion                        | 99  |
| 扩散系数     | coefficient of diffusion         | 100 |
| 克尔效应     | Kerr effect                      | 222 |
| 克劳修斯表述   | Clausius statement               | 120 |
| 库仑定律     | Coulomb law                      | 129 |
| 抗磁性      | diamagnetism                     | 183 |
| 抗磁质      | diamagnetic substance            | 183 |
| 空化作用     | cavitation                       | 67  |
| 空间心电图向量环 | spatial electrocardiovector loop | 149 |
| 控制论      | cybernetics                      | 376 |

## L

|          |                                       |     |
|----------|---------------------------------------|-----|
| 力矩       | moment of force                       | 16  |
| 内转换      | internal conversion                   | 304 |
| 立体放射神经外科 | stereotactic radioneuro surgery, SRNS | 320 |
| 连续 X 射线  | continuous X-ray                      | 284 |
| 连续性方程    | equation of continuity                | 30  |
| 里德伯常数    | Rydberg Constant                      | 261 |
| 拉莫尔方程    | Larmor equation                       | 361 |
| 拉莫尔频率    | Larmor frequency                      | 361 |
| 拉德       | rad                                   | 312 |
| 洛伦兹力     | Lorentz force                         | 175 |
| 洛伦兹收缩    | Lorentz contraction                   | 78  |
| 洛伦兹变换    | Lorentz transformation                | 76  |
| 洛施密特常量   | Loschmidt constant                    | 93  |
| 洛埃镜      | Lloyd mirror                          | 206 |
| 流场       | field of flow                         | 29  |
| 流体       | fluid                                 | 28  |
| 流体动力学    | hydrodynamics                         | 28  |

|          |                                |     |
|----------|--------------------------------|-----|
| 流阻       | flow resistance                | 39  |
| 流线       | streamline                     | 29  |
| 流管       | tube of flow                   | 29  |
| 离子对      | ionic pair                     | 309 |
| 离子迁移率    | ionic mobility                 | 156 |
| 理想气体状态方程 | equation of state of ideal gas | 91  |
| 理想流体     | ideal fluid                    | 28  |
| 粒子数反转    | population inversion           | 347 |
| 量子       | quantum                        | 257 |
| 量子生物学    | quantum biology                | 325 |
| 量子药理学    | quantum pharmacology           | 333 |
| 量纲       | dimension                      | 7   |
| 楞次定律     | Lenz law                       | 189 |
| 雷姆       | Rem                            | 314 |
| 雷诺数      | Reynold number                 | 36  |
| 螺旋扫描     | helical scanning               | 296 |

## M

|            |                                     |     |
|------------|-------------------------------------|-----|
| 马吕斯定律      | Malus law                           | 216 |
| 毛细现象       | capillarity                         | 105 |
| 目镜         | eyepiece                            | 242 |
| 迈克耳孙干涉仪    | Michelson interferometer            | 209 |
| 迈耶公式       | Mayer formula                       | 113 |
| 迈斯纳效应      | Meissner effect                     | 184 |
| 每搏输出量      | stroke volume                       | 194 |
| 麦克斯韦速率分布函数 | Maxwell speed distribution function | 95  |
| 麦克斯韦速率分布律  | Maxwell speed distribution law      | 94  |
| 明视距离       | visual distance                     | 239 |
| 脉压         | pulse pressure                      | 45  |
| 脉搏波        | pulse wave                          | 44  |
| 莫塞莱        | Moseley                             | 299 |

## N

|     |                   |     |
|-----|-------------------|-----|
| 内力  | internal force    | 13  |
| 内能  | internal energy   | 110 |
| 内摩擦 | internal friction | 28  |
| 牛顿  | Newton            | 6   |
| 牛顿环 | Newton ring       | 208 |

|        |                                 |     |
|--------|---------------------------------|-----|
| 牛顿流体   | Newtonian fluid                 | 36  |
| 牛顿第一定律 | Newton first law                | 6   |
| 牛顿第二定律 | Newton second law               | 6   |
| 牛顿第三定律 | Newton third law                | 7   |
| 逆循环    | inverse cycle                   | 118 |
| 能级     | Energy level                    | 263 |
| 能斯特方程  | Nernst equation                 | 162 |
| 能量     | energy                          | 10  |
| 能量均分定理 | equipartition theorem of energy | 93  |
| 能量退降   | degradation of energy           | 127 |
| 能量密度   | energy density                  | 57  |
| 粘度     | viscosity                       | 35  |
| 粘弹性    | viscoelasticity                 | 40  |
| 粘滞力    | viscous force                   | 35  |

## P

|         |                                      |     |
|---------|--------------------------------------|-----|
| 平均平动动能  | average translational kinetic energy | 93  |
| 平均自由程   | mean free path                       | 97  |
| 平均速率    | mean speed                           | 96  |
| 平均碰撞频率  | mean collision frequency             | 97  |
| 平衡态     | equilibrium state                    | 90  |
| 皮托管     | Pitot tube                           | 33  |
| 泊松公式    | poisson formula                      | 115 |
| 泡利不相容原理 | pauli exclusion principle            | 274 |
| 偏光显微镜   | polarizing microscope                | 247 |
| 偏振片     | polaroid                             | 219 |
| 偏振光     | polarized light                      | 214 |
| 偏振度     | degree of polarization               | 216 |
| 偏振面     | Plane of polarization                | 215 |
| 普朗克常量   | Planck constant                      | 256 |
| 频率编码    | frequency coding                     | 366 |
| 频谱      | frequency spectrum                   | 53  |
| 频谱分析    | spectral analysis                    | 52  |

## Q

|       |                         |     |
|-------|-------------------------|-----|
| 气体栓塞  | air embolism            | 106 |
| 切向加速度 | tangential acceleration | 6   |
| 切变模量  | shear modulus           | 21  |

|       |                          |     |
|-------|--------------------------|-----|
| 切应力   | shear stress             | 19  |
| 切应变   | shear strain             | 19  |
| 纤镜    | fiber scope              | 246 |
| 取向极化  | orientation polarization | 143 |
| 奇异吸引子 | strange attractor        | 379 |
| 屈光度   | dioptr                   | 229 |
| 轻子    | Lepton                   | 321 |
| 起偏器   | polarizer                | 215 |
| 强子    | nadron                   | 322 |
| 群速度   | group velocity           | 61  |

## R

|         |                              |     |
|---------|------------------------------|-----|
| 韧致辐射    | bremstrahlung                | 284 |
| 热力学     | thermodynamics               | 109 |
| 热力学过程   | thermodynamic process        | 110 |
| 热力学系统   | thermodynamic system         | 109 |
| 热力学第一定律 | first law of thermodynamics  | 111 |
| 热力学第二定律 | second law of thermodynamics | 120 |
| 热力学概率   | thermodynamic probability    | 122 |
| 热传导     | heat conduction              | 99  |
| 热机      | heat engine                  | 117 |
| 热运动     | thermal motion               | 89  |
| 热量      | heat                         | 110 |
| 热辐射     | Thermal radiation            | 255 |

## S

|         |                                    |     |
|---------|------------------------------------|-----|
| 双折射     | birefringence                      | 217 |
| 双轴晶体    | biaxial crystal                    | 217 |
| 生物物理遗传学 | biophysical genetic                | 376 |
| 示踪原子    | tracer atom                        | 316 |
| 扫描电子显微镜 | scanning electron microscope       | 250 |
| 扫描隧穿显微镜 | scanning tunneling microscope, STM | 272 |
| 收尾速度    | terminal velocity                  | 39  |
| 收缩压     | systolic pressure                  | 45  |
| 色偏振     | chromatic polarization             | 221 |
| 色像差     | chromatic aberration               | 336 |
| 声压      | sound pressure                     | 63  |
| 声阻抗     | acoustic impedance                 | 63  |

|          |   |     |
|----------|---|-----|
| 声波       | sound wave  | 63  |
| 声强       | sound intensity   | 64  |
| 声强级      | intensity level   | 65  |
| 时间序列     | time series   | 381 |
| 时间膨胀     | time dilation   | 78  |
| 束缚电荷     | bound charge  | 142 |
| 势阱       | potential well  | 269 |
| 势垒       | potential barrier   | 270 |
| 视力       | visual acuity   | 239 |
| 视角       | visual angle  | 239 |
| 试探电荷     | test charge   | 130 |
| 受迫振动     | forced vibration  | 50  |
| 受激辐射     | stimulated radiation  | 346 |
| 受激辐射光放大  | light amplification by stimulated emission of radiation (laser) | 346 |
| 顺磁性      | paramagnetism   | 183 |
| 顺磁质      | paramagnetic substance  | 183 |
| 射频       | radio frequency   | 347 |
| 衰变常数     | decay constant  | 305 |
| 速度梯度     | velocity gradient   | 35  |
| 速率分布函数   | speed distribution function                                     | 95  |
| 斯托克司定律   | Stokes' law   | 39  |
| 塑性       | plasticity  | 20  |
| 数字减影血管造影 | digital subtraction angiography, DSA                            | 291 |
| 输运过程     | transport process   | 99  |
| 熵        | entropy   | 124 |
| 熵产生      | entropy production  | 127 |
| 熵流       | entropy flow  | 127 |
| 熵增加原理    | principle of entropy increase                                   | 126 |
| 瞬时心电向量   | twinkling electrocardiovector                                   | 149 |
| <b>T</b> |   |     |
| 同位素      | isotope   | 300 |
| 同质异能素    | isomer  | 300 |
| 同量异位素    | isobar  | 300 |
| 体素       | voxel   | 292 |
| 听觉区域     | auditory region   | 64  |
| 听阈       | threshold of hearing  | 64  |

|         |                                  |     |
|---------|----------------------------------|-----|
| 态参量     | state parameter                  | 90  |
| 退行红移    | recessional redshift             | 80  |
| 原子质量单位  | atomic mass unit, u              | 299 |
| 调节      | accommodation                    | 238 |
| 调幅波     | amplitude modulated wave         | 61  |
| 透射电子显微镜 | transmission electron microscope | 250 |
| 透镜      | lens                             | 232 |
| 铁磁性     | ferromagnetism                   | 183 |
| 铁磁质     | ferromagnetic substance          | 183 |
| 弹性      | elasticity                       | 20  |
| 弹性介质    | elastic medium                   | 54  |
| 弹性模量    | modulus of elasticity            | 20  |
| 湍流      | turbulent flow                   | 34  |
| 痛阈      | threshold of feeling             | 64  |

## W

|       |                           |     |
|-------|---------------------------|-----|
| 无极分子  | nonpolar molecule         | 142 |
| 无辐射跃迁 | radiationless transition  | 347 |
| 位矢    | position vector           | 4   |
| 位移    | displacement              | 4   |
| 位移电流  | displacement current      | 195 |
| 位移极化  | displacement polarization | 143 |
| 物镜    | objective                 | 242 |
| 微观量   | microscopic quantity      | 89  |
| 稳定流动  | steady flow               | 29  |
| 稳态    | steady state              | 379 |

## X

|              |  |     |
|--------------|--|-----|
| X 射线计算机横断层成像 | X-ray computer aid transverse tomography | 291 |
| X 射线透视       | X-ray fluoroscopy                        | 290 |
| X 射线摄影       | X-ray roentgenography                    | 290 |
| X 射线谱        | X-ray spectrum                           | 284 |
| 心电场          | cardio-electric field                    | 149 |
| 心电偶          | cardio-electric dipole                   | 149 |
| 寻常光          | ordinary light                           | 217 |
| 吸引子          | attractor                                | 379 |
| 吸收剂量         | absorbed dose                            | 312 |
| 响度级          | loudness level                           | 65  |

|          |  |     |
|----------|--|-----|
| 狭义相对论    | special relativity                     | 73  |
| 相干长度     | coherent length                        | 203 |
| 相干光      | coherent light                         | 203 |
| 相干波      | coherent wave                          | 59  |
| 相干波源     | coherent sources                       | 59  |
| 相对介电常量   | relative permittivity                  | 144 |
| 相对生物效应   | relative biological effectiveness, RBE | 312 |
| 相对性原理    | relativity principle                   | 75  |
| 相对磁导率    | relative permeability                  | 182 |
| 相位编码     | phase coding                           | 366 |
| 相空间      | states space                           | 375 |
| 相空间重构    | reconstruction of states space         | 381 |
| 相差显微镜    | phase contrast microscope              | 248 |
| 相速度      | phase velocity                         | 61  |
| 选片       | selected slice                         | 365 |
| 旋光色散     | rotatory dispersion                    | 223 |
| 旋光性      | optical activity                       | 223 |
| 旋光率      | specific rotation                      | 223 |
| 旋进       | precession                             | 18  |
| 旋磁比      | gyromagnetic ratio                     | 362 |
| 像差       | aberration                             | 236 |
| 循环过程     | cycle process                          | 117 |
| 像素       | pixel                                  | 296 |
| 薛定谔方程    | Schrödinger equation                   | 267 |
| <b>Y</b> |  |     |
| 引力红移     | gravitational redshift                 | 87  |
| 引力坍缩     | gravitational collapse                 | 87  |
| 引力波      | gravitational wave                     | 87  |
| 压电效应     | piezoelectric effect                   | 68  |
| 因果率      | causality                              | 79  |
| 延迟嵌入     | delay embedding                        | 381 |
| 有极分子     | polar molecule                         | 142 |
| 应力       | stress                                 | 19  |
| 应变       | strain                                 | 19  |
| 杨氏模量     | Young modulus                          | 21  |
| 远点       | far point                              | 238 |
| 衍射       | diffraction                            | 59  |

|               |  |     |
|---------------|--|-----|
| 圆二色性          | circular dichroism                               | 224 |
| 液晶            | liquid crystal                                   | 224 |
| <b>Z</b>      |  |     |
| 主量子数          | principal quantum number                         | 273 |
| 正电子发射型计算机断层摄影 | positron emission tomography, PET                | 319 |
| 正循环           | positive cycle                                   | 117 |
| 正晶体           | positive crystal                                 | 218 |
| 自发辐射          | spontaneous radiation                            | 347 |
| 自由度           | degree of freedom                                | 93  |
| 自由感应衰减        | free induction decay                             | 362 |
| 自组织现象         | self-organization phenomenon                     | 127 |
| 自旋-回波         | spin-echo  | 368 |
| 自旋量子数         | spin quantum number                              | 264 |
| 自然光           | natural light                                    | 214 |
| 钆二乙烯三胺五醋酸     | gadolinium-diethylene triamine penta acetic acid | 372 |
| 张力            | tension  | 24  |
| 状态参量          | states variable                                  | 376 |
| 纵波            | longitudinal wave                                | 54  |
| 阻尼振动          | damped vibration                                 | 49  |
| 阻抗图           | impedance plethysmogram                          | 193 |
| 周期            | period   | 48  |
| 质能关系          | mass-energy relation                             | 82  |
| 质量亏损          | mass defect                                      | 300 |
| 质量定压热容        | mass heat capacity at constant pressure          | 113 |
| 质量定容热容        | mass heat capacity at constant volume            | 112 |
| 质量厚度          | mass thickness                                   | 288 |
| 质量衰减系数        | mass attenuation coefficient                     | 288 |
| 质量数           | mass number                                      | 299 |
| 质谱仪           | mass spectrometer                                | 179 |
| 转动            | rotation   | 14  |
| 转动惯量          | rotational inertia                               | 16  |
| 驻波            | standing wave                                    | 61  |
| 柱面透镜          | cylindrical lens                                 | 235 |
| 重力势能          | gravitational potential energy                   | 11  |
| 重子            | baryon   | 322 |
| 准静态过程         | quasi-static process                             | 110 |



|          |   |     |
|----------|---|-----|
| 振动面      | plane of vibration                      | 215 |
| 振幅       | amplitude                               | 48  |
| 真空介电常量   | permittivity of vacuum                  | 130 |
| 真空磁导率    | permeability of vacuum                  | 171 |
| 致冷机      | refrigerator                            | 118 |
| 致冷系数     | refrigeratory coefficient               | 118 |
| 载流子      | carrier                                 | 154 |
| 造影剂      | contrast medium                         | 291 |
| 最大允许剂量   | maximum permissible dose, MPD           | 313 |
| 最低空分子轨道  | the lowest unoccupied molecular orbital | 327 |
| 最高占据分子轨道 | the highest occupied molecular orbital  | 327 |
| 最概然速率    | the most probable speed                 | 96  |
| 照射量      | exposure                                | 311 |

404