医用高等数学

孙伟民 黄大熙 主编

上海科学技术文献出版社

医用高等数学

孙伟民　黄大觃　主编

上海科学技术文献出版社

(沪)新登字 301 号

医用高等数学
孙伟民　黄大皖　主编
*
上海科学技术文献出版社出版发行
(上海市武康路 2 号　邮政编码 200031)
全国新华书店经销
上海科技文献出版社昆山联营厂印刷
*
开本 850×1168　1/32　印张 10.75　字数 288,000
1993 年 7 月第 1 版　　1993 年 7 月第 1 次印刷
印数：1—9,000
ISBN 7-5439-0133-1/O·78
定价：8.30 元
《科技新书目》 286-285

内 容 提 要

本书内容包括函数与极限，导数与微分，不定积分与定积分，微分方程，多元函数微积分，概率论初步，行列式与矩阵。

本书注意结合医学实际，便于掌握应用，可供医学院校临床医学、预防医学等各专业本科生、研究生和医学科研人员使用。

前　言

现代医学的迅速发展，使医学领域的各个学科正日益从定性描述向定量分析深化。高等医学院的学生和研究生具有一定高等数学知识已成为必需，医用高等数学是医学院校各专业的必修课程之一。

经过多年的教学实践，上海医科大学(孙伟民、赵耐青)，南京医学院(黄大既、丁勇)，上海第二医科大学(王建明)，浙江医科大学(金显)，上海第二军医大学(高慕勤)，安徽医科大学(方前胜)，扬州医学院(陈芸)，内蒙古医学院(韩明钟)决定合作编写本书，由孙伟民、黄大既任主编，浙江医科大学周怀梧教授任主审。

本书共分八章，内容包括一元函数微积分、常微分方程、多元函数微积分、概率论初步以及行列式与矩阵。

在编写过程中力求做到：基本概念清楚、正确、深入浅出，便于教学，本书适合医学院校临床医学、预防医学等各专业作为教材，也可供医学科研人员作为参考书。在目录中打有“*”号的章节，各校可根据不同专业的教学时数选用。

由于编者水平有限，书中一定存在不少缺点和错误，恳请读者批评指正。

编　者

1992年8月

目　录

第一章　函数与极限

第二章　导数与微分

第三章　不定积分

第四章 定积分及其应用

第五章　微 分 方 程

第六章　多元函数微积分

第七章　概率论初步

第八章 行列式与矩阵

* * *

第一章　函数与极限

函数是微积分学的主要研究对象．极限方法是人们从量变中认识质变，从近似中得到精确的一种数学方法，它是微积分学的基本研究方法．

第一节　函　　数

一、函数概念

在我们考察某种现象的变化过程时，常会遇到两种不同的量：一种是在过程中保持同一数值的量，称为**常量**；另一种是在过程中取不同数值的量，称为**变量**．例如，在热胀冷缩过程中，一个圆盘的半径 R 与其面积 S 都是变量，但面积与半径的平方之比 π 是常量．

正如把静止视作是运动的特例，有时也把常量视作是特殊的变量，即在所考察的变化过程中，始终只取同一数值的变量．

通常，在一个实际的变化过程中出现的各个变量并不都是独立变化的，而是相互联系，相互依赖的，函数概念就是这种变量间相互依赖关系的抽象和概括．

定义　设 x 与 y 是某个变化过程中的两个变量，如果对于变量 x 的每一个允许取的值，变量 y 依照一定的对应关系，有唯一确定的值与之对应，则称变量 y 为变量 x 的**函数**(function)，记作

$$y=f(x)\quad 或\quad f:x\to y$$

其中 x 称为**自变量**，y 称为**因变量**．

因变量与自变量之间的对应关系称为函数关系．自变量所有允许取的值的集合称为函数的**定义域**；如果 x_0 是函数 $f(x)$ 的定

义域中的一点，有时我们也说函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点有定义。与自变量的值对应的因变量的值称为**函数值**。函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 时的函数值，记作 $f(x_0)$。所有的函数值构成的集合称为函数 $f(x)$ 的**值域**。

函数关系可用解析式表示，如 $S=\pi R^2$，$y=x^2+1$；也可用图象表示，如心电图、自动记录仪记录的气温曲线；还可用表格表示，如对数表、三角函数表以及从某些实验得到的观测数据表等等.解析法、图示法和列表法是三种常用的函数表示法。

函数的定义域和值域，常用不等式、区间或集合表示。现将不等式、区间、集合三者对照，如表 1-1 所示。

表 1-1　不等式、区间与集合对照表

不等式	区间	集合
$a\leqslant x\leqslant b$	闭区间 $[a,b]$	$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$
$a<x<b$	开区间 (a,b)	$\{x\mid a<x<b\}$
$a\leqslant x<b$	半开区间 $[a,b)$	$\{x\mid a\leqslant x<b\}$
$a<x\leqslant b$	半开区间 $(a,b]$	$\{x\mid a<x\leqslant b\}$
$-\infty<x<b$	无限区间 $(-\infty,b)$	$\{x\mid x<b\}$
$-\infty<x\leqslant b$	无限区间 $(-\infty,b]$	$\{x\mid x\leqslant b\}$
$a\leqslant x<+\infty$	无限区间 $[a,+\infty)$	$\{x\mid x\geqslant a\}$
$a<x<+\infty$	无限区间 $(a,+\infty)$	$\{x\mid x>a\}$
$-\infty<x<+\infty$	无限区间 $(-\infty,+\infty)$	$\{x\mid x\in R\}$

例 1　设物体从离地面高度为 h 处自由下落，不计空气阻力，则物体下落的路程 s 与时间 t 的关系可表示为：

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

其中 t 是自变量，s 是因变量。函数的定义域为：$0\leqslant t\leqslant\sqrt{\frac{2h}{g}}$ $\left(\sqrt{\frac{2h}{g}}\text{ 是物体到达地面的时刻}\right)$；值域为：$0\leqslant s\leqslant h$。

例 2 求函数 $y=\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}+\arccos\frac{x-2}{3}$ 的定义域。

解 使该函数有定义的 x 值须满足

$$\begin{cases}9-x^2>0\\ -1\leqslant\frac{x-2}{3}\leqslant1\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}-3<x<3\\ -1\leqslant x\leqslant5\end{cases}$$

即
$$-1\leqslant x<3.$$

所以函数 y 的定义域是 $-1\leqslant x<3$.

例 3 有人在一项研究中测得的血液中胰岛素浓度 $C(t)$ (单位/毫升)随时间 t(分钟)的变化数据,建立如下经验公式:

$$C(t)=\begin{cases}t(10-t),\ 0\leqslant t\leqslant5\\ 25e^{-k(t-5)},\ t>5\end{cases}$$

其中 k 为常数.

这里,函数 $C(t)$ 的表达式与我们通常遇到的函数表达式有所不同,其函数关系是用两个解析式表示的。有时,还会遇到用两个以上解析式表示的函数。这种在函数定义域的不同部分用不同的解析式表示的函数是一个函数,而不是两个或几个函数,它称为**分段函数**。在求分段函数的函数值时,必须将自变量的值代入它所对应的解析式计算。例 3 中,$t=2$ 时,对应的浓度 $C(2)=2\times(10-2)=16$. $t=10$ 时,对应的浓度 $C(10)=25e^{-k(10-5)}=25e^{-5k}$.

二、复合函数

定义 如果变量 y 是变量 u 的函数,变量 u 又是变量 x 的函数:

$$y=f(u),\ u=\varphi(x)$$

并且 x 在函数 $\varphi(x)$ 的定义域或其一部分上取值时所对应的 u 值,函数 $y=f(u)$ 是有定义的,则称 y 是 x 的**复合函数**. 记作

$$y=f[\varphi(x)]$$

其中 u 称为**中间变量**。

例如，运动物体的动能 E 是速度 v 的函数：

$$E=\frac{1}{2}mv^2$$

而速度 v 又是时间 t 的函数，对于自由落体运动：$v=gt$，故复合函数为：

$$E=\frac{1}{2}mg^2t^2$$

又如，$y=\lg u$，$u=\operatorname{tg}v$，$v=x^2+1$，经二次复合构成 y 关于 x 的复合函数：$y=\lg\operatorname{tg}(x^2+1)$。

须注意，不是任何两个函数都可以复合成一个函数的。例如 $y=\arccos u$，$u=2+x^2$，就不能复合成 $y=\arccos(2+x^2)$，因为对于 x 所取的任何值，u 总是大于1，从而使 $y=\arccos u$ 没有意义。

我们不仅要学会把若干个函数"复合"成一个复合函数，而且要善于把一个复合函数"分解"成若干个简单的函数。

例如，$y=\sin^3(1+x^2)$ 可以看成是由 $y=u^3$，$u=\sin v$，$v=1+x^2$ 复合而成的。

三、初等函数

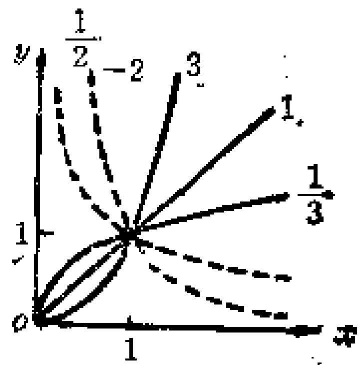
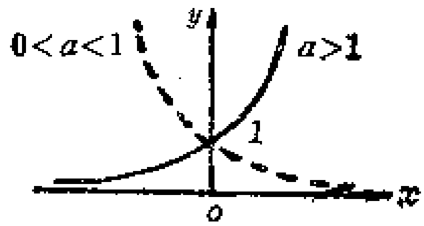
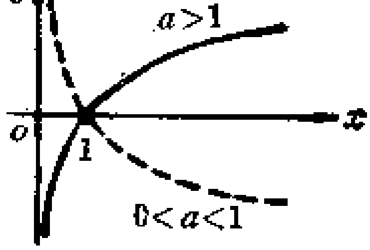
中学里学过的幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数，它们统称为基本初等函数。现将其归纳成表1-2所示。

定义 由常数和基本初等函数经过有限次四则运算（加、减、乘、除）以及有限次的函数复合构成的函数，称为**初等函数**。

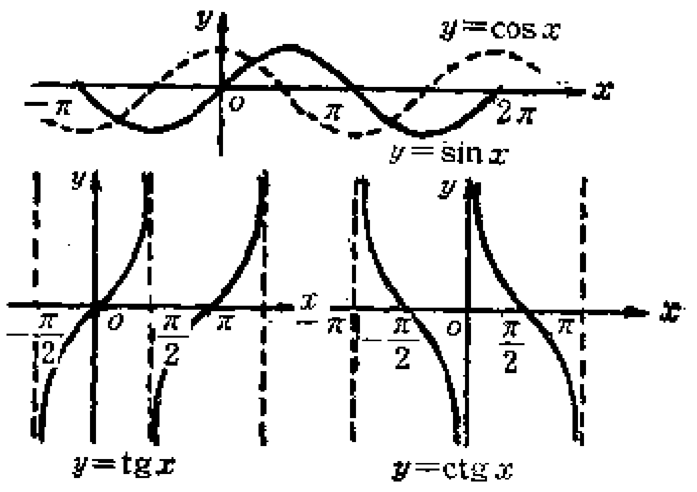
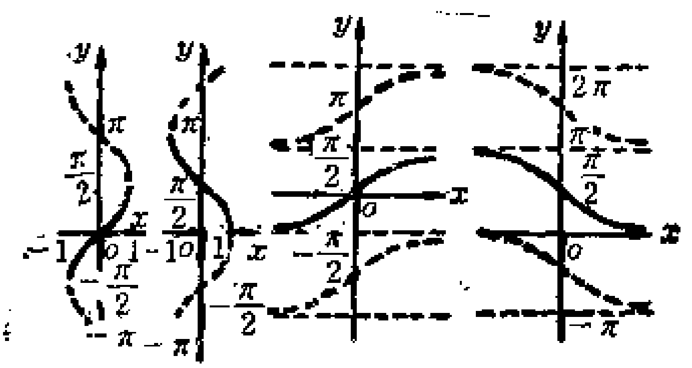
例如：多项式 $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$，$y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，$y=\operatorname{arctg}\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$，都是初等函数。

本书今后主要讨论初等函数，分段函数一般不是初等函数。

表 1-2 基本初等函数表

类别及解析式		定义域	值域	图形
幂函数 $y=x^{\mu}$	$\mu>0$ μ 次抛物线	因 μ 而异，但 $[0,+\infty)$ 是公共定义域	因 μ 而异，但 $[0,+\infty)$ 是公共值域	 (在第一象限内)
	$\mu<0$ 令 $\mu=-m(m>0)$ $y=x^{-m}=\frac{1}{x^{m}}$， m 次双曲线	公共定义域为 $(0,+\infty)$	公共值域为 $(0,+\infty)$	
指数函数 $y=a^{x}$ $(a>0, a\neq 1)$		$(-\infty,+\infty)$	$(0,+\infty)$	
对数函数 $y=\log_a x$ $(a>0, a\neq 1)$		$(0,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	

（续　表）

类别及解析式	定义域	值　域	图　　形
三角函数 正弦函数 $y=\sin x$ 余弦函数 $y=\cos x$ 正切函数 $y=\operatorname{tg} x$ 余切函数 $y=\operatorname{ctg} x$	$(-\infty,+\infty)$ $(-\infty,+\infty)$ $x\neq n\pi+\frac{\pi}{2}$ $x\neq n\pi$ $(n=0,\pm1,\cdots)$	$[-1,1]$ $[-1,1]$ $(-\infty,+\infty)$ $(-\infty,+\infty)$	
反三角函数 反正弦函数 $y=\arcsin x$ 反余弦函数 $y=\arccos x$ 反正切函数 $y=\operatorname{arctg} x$ 反余切函数 $y=\operatorname{arcctg} x$	$[-1,1]$ $[-1,1]$ $(-\infty,+\infty)$ $(-\infty,+\infty)$	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ $[0,\pi]$ $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ $(0,\pi)$	 $y=\arcsin x$　$y=\arccos x$　$y=\operatorname{arctg} x$　$y=\operatorname{arcctg} x$

习　题　1-1

1．下列各题中的两个函数是否相同？为什么？

(1) $y=x$，$y=\sqrt{x^2}$；

(2) $y=x^2+1$，$s=t^2+1$；

(3) $y=\sqrt{1-x^2}$，$x^2+y^2=1$。

2．求下列函数的定义域：

(1) $y=\frac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$；　　(2) $y=\frac{1}{|x|-x}$；

(3) $y=\frac{1}{\lg x}$；

(4) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$；

(5) $y=\sqrt{1-\operatorname{tg}(x+1)}$；

(6) $y=\arcsin\frac{x-2}{5-x}$.

3．设$f(x)$的定义域是$[0,1]$，问$f(x^2)$，$f(\sin x)$，$f(x+a)$，$(a>0)$的定义域各是什么？

4．设$f(x)=\arcsin x$，求下列函数值：

$f(0)$，$f(1)$，$f(-1)$，$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$f(x_0)$，$f(x_0+h)$.

5．设$f(x)=\ln x$，证明

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$$

6．设 $f(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 2x, & x>0\end{cases}$

求$f(-2)$，$f(0)$，$f(2)$，并作函数的图形.

7．作下列函数的图形：

(1) $y=C_0e^{-kt}$ $(C_0, k>0$ 为常数)；

(2) $y=c_0(1-e^{-kt})$ $(c_0, k>0$ 为常数).

8．设婴儿出生时的体重平均为3000g，从出生起至6个月，每月长600g，6个月后至12个月，每月长500g，试写出婴儿从出生至一岁其体重与月龄的关系式.若一婴儿刚满10个月，试估计其体重.

9．在下列各题中，求由所给函数复合而成的函数：

(1) $y=u^2$，$u=\sin x$；

(2) $y=\sin u$，$u=x^2$；

(3) $y=e^u$，$u=x^2$；

(4) $y=u^2$，$u=e^x$.

10．将下列复合函数分解成基本初等函数，或基本初等函数的和、差、积、商：

(1) $y=\sin 2x$；

(2) $y=\cos^2 x$；

(3) $y=\sin^3\frac{x}{2}$；

(4) $y=\sqrt[3]{(1+x)^2}$；

(5) $y=\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}$；

(6) $y=e^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}$；

(7) $y=\arcsin\dfrac{1-x}{1+x}$; (8) $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$;

(9) $y=\sqrt{\ln\dfrac{1-x}{1+x}}$; (10) $y=\dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$.

第二节 极　　限

一、极限概念

函数的极限是描述在自变量的某个变化过程中，对应的函数值的变化趋势的一个重要概念。自变量有各种各样的变化方式，通常研究下面两种情况：一种是自变量 x 的绝对值无限地增大，即 $|x|$ 趋向于无穷大，记作 $x\to\infty$；另一种是自变量 x 无限地趋近于某个数值 x_0，记作 $x\to x_0$。

定义 1 如果当自变量 x 的绝对值无限地增大时，函数 $f(x)$ 无限地趋近（接近）定数 A，则称 A 为**函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限**(limit)，记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A \quad (x\to\infty)$$

从几何上看，极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，表示只要 $|x|$ 无限地增大，曲线 $y=f(x)$ 上的对应点与直线 $y=A$ 的距离 $|f(x)-A|$ 便可以任意地小，即 $|f(x)-A|\to0$，如图 1-1 所示。

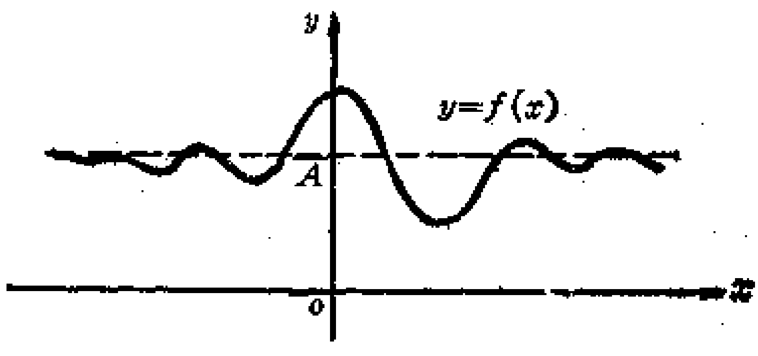


图 1-1

在定义 1 中，若只考虑 $x>0$，则记作

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A \quad (x\to+\infty)$$

若只考虑 $x<0$，则记作

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A \quad (x\to-\infty)$$

例 1 从几何意义上可知下列等式成立：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$；

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arctg} x=\frac{\pi}{2}$；

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty}2^x=0$.

定义 2 如果当自变量 x 趋向（任意地接近）数值 x_0（但始终不等于 x_0）时，函数 $f(x)$ 无限趋近定数 A，则称 A 为**函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限**．记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A \quad (x\to x_0).$$

从几何上看，极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，表示只要 x 无限接近于 x_0（但总不等于 x_0），曲线 $y=f(x)$ 上的对应点与直线 $y=A$ 的距离 $|f(x)-A|$ 便可以任意地小，即 $|f(x)-A|\to 0$，如图 1-2 所示．

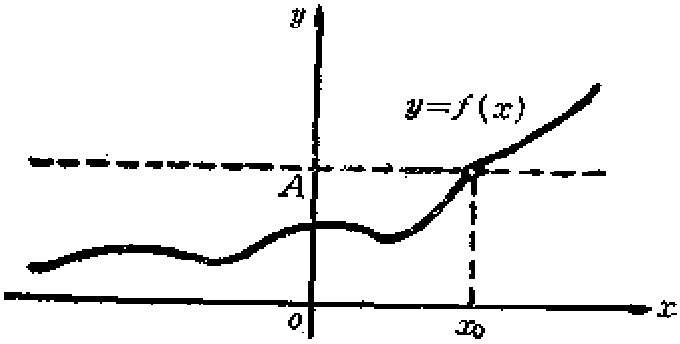


图 1-2

注意：(1) 定义 2 中限制 x 始终不等于 x_0，是因为我们关心的是函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点附近的变化趋势，而不是 $f(x)$ 在 x_0 这点的情况，所以极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 是否存在和 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点是否有定义以及函数值 $f(x_0)$ 的大小均无关．

(2) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，这要求 x 不论以什么方式接近于 x_0 时，$f(x)$ 都无限趋近于定数 A．比如 x 可以从 $x=x_0$ 点的左方（$x<$

x_0)趋近于定数 x_0，也可以从 $x=x_0$ 点的右方($x>x_0$)趋近于 x_0，还可以在 $x=x_0$ 点左右跳跃地趋近于 x_0，等等。

容易看出，常数 C 的极限就是自身，即 $\lim\limits_{x\to x_0} C=C$。

例 2 考察函数 $f(x)=2x+1$，当 $x\to1$ 时的极限.

因为 $|(2x+1)-3|=2|x-1|\to0(x\to1)$，所以

$$\lim_{x\to1}(2x+1)=3$$

这里，当 $x\to1$ 时，$f(x)$ 的极限值恰好等于函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 时的函数值，即 $\lim\limits_{x\to1} f(x)=f(1)$。

例 3 考察函数

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & x\neq1 \\ 1, & x=1 \end{cases}$$

当 $x\to1$ 时的极限。

因为 $x\neq1$ 时，$f(x)=x+1$，所以

$$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}(x+1)=2$$

这里，极限 $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ 存在，但不等于在 $x=1$ 点的函数值 $f(1)=1$，如图 1-3 所示。

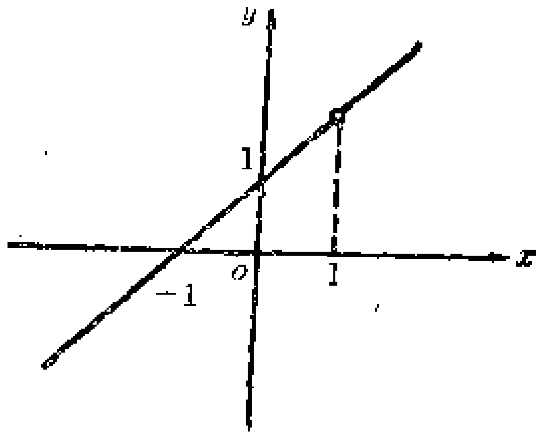


图 1-3

例 4 考察函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 在 $x\to1$ 时的极限。

因为当 $x\to1$ $(x\neq1)$时，

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}=x+1$$

故 $$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}(x+1)=2$$

这里，函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 时无定义，但 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 存在。

例 5 考察函数 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ 在 $x\to0$ 时的极限。

当 x 越来越接近于零时，对应的函数值 $\sin\frac{1}{x}$ 越来越频繁地在 -1 与 1 之间振动，并不无限地接近一个确定的数，所以 $\lim\limits_{x\to0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在（图 1-4）。

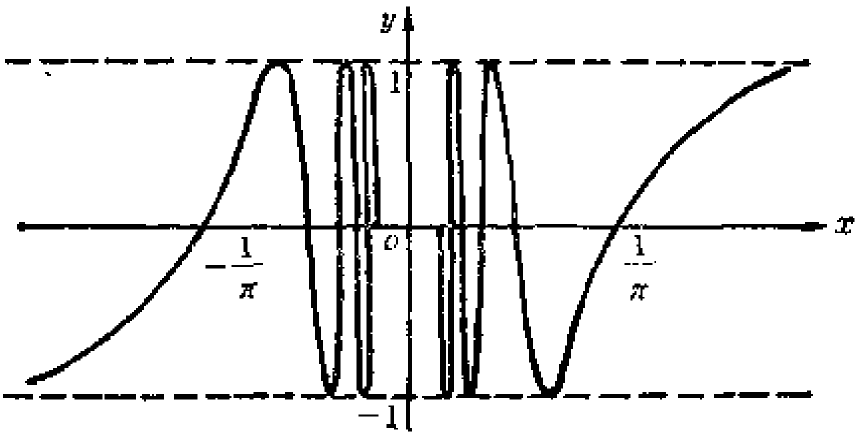


图 1-4

定义 2 中，x 趋近于 x_0 的方式是任意的，有时只考察当 x 从 x_0 的一侧趋近于 x_0 时函数 $f(x)$ 的极限，称为**单侧极限**，单侧极限有左极限和右极限两种情况。

如果当 x 从 x_0 的左侧（$x<x_0$）趋向于 x_0 时，函数 $f(x)$ 无限趋近定数 A_1，则称 A_1 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的**左极限**，记作

$$\lim_{x\to x_0-0}f(x)=A_1 \quad 或 \quad f(x)\to A_1 \quad (x\to x_0^{-0})$$

类似地可定义当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 的**右极限**：

$$\lim_{x\to x_0+0}f(x)=A_2 \quad 或 \quad f(x)\to A_2(x\to x_0^{+0})$$

可以证明：极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的充要条件是左极限 $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)$

和右极限 $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ 都存在，并且两者相等。

例 6 讨论函数 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ 当 $x\to 0$ 时的极限。

由于 $$\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0-0}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0-0}\frac{-x}{x}=-1$$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0+0}\frac{x}{x}=1$$

左、右极限虽然存在但不相等，所以 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ 当 $x\to 0$ 时，极限不存在。

二、极限的四则运算法则

下面的定理中，记号“lim”下面没有标明 $x\to x_0$ 或 $x\to\infty$，是因为定理对这两种情况都适用，为简便起见，不予标明。当然，对于同一问题，只能属于同一种情况。以后遇到此情况不再说明。

定理 如果 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$；

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=AB$

$\lim kf(x)=k\lim f(x)=kA$ （k 为常数）；

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}$，$(B\neq 0)$。

其中(1)和(2)可推广到有限个函数的情形。

证明略。

例 7 求 $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+3x)$。

解 $$\lim_{x\to 2}(x^2+3x)=\lim_{x\to 2}x^2+\lim_{x\to 2}3x$$
$$=\lim_{x\to 2}x\cdot\lim_{x\to 2}x+3\lim_{x\to 2}x$$
$$=2\times 2+3\times 2=10$$

例 8 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x+4}{x^2-1}$。

解 由于当 $x\to\infty$ 时，分式的分子和分母的极限都不存在，故不能直接用法则(3)，我们先用 x^2 去除分子和分母，然后再求极

限：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x+4}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$=\frac{2-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}+4\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}{1-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}$$

$$=\frac{2-0+4\cdot 0}{1-0}=2$$

例 9 求 $\lim\limits_{x\to a}\frac{x-a}{x^3-a^3}\quad(a\neq 0)$.

解 分式的分母极限为 0，故不能直接应用法则(3)，但 $x\to a$ 时，有 $x\neq a$，故

$$\lim_{x\to a}\frac{x-a}{x^3-a^3}=\lim_{x\to a}\frac{x-a}{(x-a)(x^2+ax+a^2)}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{1}{x^2+ax+a^2}=\frac{1}{a^2+a\cdot a+a^2}$$

$$=\frac{1}{3a^2}$$

例10 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$.

解 由于当 $x\to+\infty$ 时，$\sqrt{x^2+x}$ 和 x 的极限都不存在，不能应用法则(1)，可先变形，再取极限：

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2+x)-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{2}$$

三、两个重要极限

下面我们不加证明地给出在极限的运算中起着重要作用的两个重要极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$;

或 $\lim\limits_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=e$。

其中 $e\approx 2.71828$，是一个无理数，无论在理论上还是在实际中都会经常遇到它。以 e 为底的对数 $\log_e x$，特记为 $\ln x$，称为自然对数。

例 11 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}\alpha x}{x}\quad(\alpha\neq 0)$。

解
$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}\alpha x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}\cdot\frac{\alpha}{\cos\alpha x}\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}\cdot\alpha\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos\alpha x}$$
$$=1\cdot\alpha=\alpha$$

例 12 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$。

解
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 1$$
$$=\frac{1}{2}$$

例 13 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-x+1}$。

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{-x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}}\cdot\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{e}\cdot 1=\frac{1}{e}$$

例 14 求 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1-2x}$.

解 $\sqrt{1-2x}=\{[1+(-2x)]^{-\frac{1}{2x}}\}^{-2}$

令 $u=-2x$, 当 $x\to 0$ 时, $u\to 0$, 于是

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{1-2x}=\lim_{u\to 0}[(1+u)^{\frac{1}{u}}]^{-2}$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{u\to 0}[(1+u)^{\frac{1}{u}}]^{2}}$$

$$=\frac{1}{\left[\lim\limits_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]^{2}}$$

$$=\frac{1}{e^{2}}$$

习 题 1-2

1. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$;

(4) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$;

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{100x^2+1}{x^3-100x}$;

(7) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$;

(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)$;

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$;

(10) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)$.

2. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{x}$ $(\alpha\neq 0)$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}3x}{x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 5x}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\operatorname{ctg}x$；　　(6) $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\arcsin t}{t}$；

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$；　　(8) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$。

3. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{x-1}{x}}$；　　(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{kx}$ (k 为正整数)；

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$；　　(8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right)^{x}$。

4. 考察函数 $f(x)=\frac{\sin x}{|x|}$，当 $x\to 0$ 时的极限.

5. 求符号函数

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$$

当 $x\to 0$ 时的左、右极限，并说明当 $x\to 0$ 时，$\operatorname{sgn}(x)$ 的极限是否存在.

6. 已知 n 次静脉注射某药后，血药浓度的最高水平和最低水平分别为：

$$C_{\max}=\frac{a(1-r^{n})}{1-r}\quad 和\quad C_{\min}=\frac{ar(1-r^{n})}{1-r}$$

其中 $r=e^{-kT}$，a、k 和 T 均为正的常数。试求 $n\to+\infty$ 时，$C_{\max}$ 和 $C_{\min}$ 的极限；若临床要求血药浓度达到稳定状态（即达到极限浓度）时，最高血药浓度为 α，最低血药浓度为 β，问 a 和 T 应取什么值？

第三节　无穷小量与无穷大量

一、无穷小量

定义　如果当$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时，函数$f(x)$的极限为零，则称函数$f(x)$在$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时为**无穷小量**，简称**无穷小**。

例如，当$x\to 0$时，$\frac{\sin x}{x}-1\to 0$，故$\frac{\sin x}{x}-1$在$x\to 0$时为无穷小；当$x\to-\infty$时，$e^x\to 0$，故e^x在$x\to-\infty$时为无穷小。

必须注意，常数0是无穷小。除了零以外，无穷小都是以零为极限的变量，任何很小的常数都不是无穷小。

容易理解，函数$f(x)$以定数A为极限等价于$f(x)-A$的极限为0，即$f(x)-A$为无穷小。令$\alpha(x)=f(x)-A$，于是$f(x)=A+\alpha(x)$。由此可知下述命题成立：

函数$f(x)$以定数A为极限的充要条件是$f(x)=A+\alpha(x)$，其中$\alpha(x)$为无穷小。

无穷小有如下性质：

性质1　有限个无穷小的和、差、积仍为无穷小.

根据极限运算法则及无穷小的定义，立即可证得。

性质2　有界变量与无穷小的乘积仍为无穷小。

证　设$f(x)$是无穷小，即$\lim f(x)=0$，$g(x)$是有界变量，即$|g(x)|\leqslant M$(M为某个正的常数)，由于

$$|f(x)\cdot g(x)-0|=|f(x)|\cdot|g(x)|\leqslant M|f(x)|\to 0$$

所以$f(x)\cdot g(x)$是无穷小。

例如，$\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\sin\frac{1}{x}=0$，因为此时$x$为无穷小量，而$\sin\frac{1}{x}$是有界变量.

特别地，常数与无穷小的乘积仍为无穷小。

二、无穷小量的阶

两个无穷小之比不一定是无穷小，例如$x\to 0$时，x、$\sin x$及x^2

都是无穷小，但 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$；$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{x}=0$。这表明 $\dfrac{\sin x}{x}$ 不是无穷小，而 $\dfrac{x^2}{x}$ 仍为无穷小。这是因为当 $x\to0$ 时，$\sin x$ 和 x 趋于零的速度相当，而 x^2 比 x 趋于零的速度要快。为了比较两个无穷小趋于零的速度，提出了无穷小的阶的概念。

定义 设 α 与 β 都是 x 的函数，且 $\lim\alpha=0$；$\lim\beta=0$。

(1) 如果 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=0$，则称 α 是比 β **高阶的无穷小**，记作 $\alpha=o(\beta)$；

(2) 如果 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=c\,(c\neq0)$，则称 α 与 β 是**同阶无穷小**；

(3) 如果 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=1$，则称 α 与 β 是**等价无穷小**，记作 $\alpha\sim\beta$。

例如，因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x^3}{x^2}=0$，所以当 $x\to0$ 时，$3x^3$ 是比 x^2 高阶的无穷小；因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$，所以当 $x\to0$ 时，$1-\cos x$ 与 x^2 是同阶无穷小；因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}=1$，所以当 $x\to\infty$ 时，$\operatorname{tg}\dfrac{1}{x}$ 与 $\dfrac{1}{x}$ 是等价无穷小。

三、无穷大量

定义 如果当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，函数 $f(x)$ 的绝对值无限地增大，则称函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时为**无穷大量**，简称**无穷大**，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$（或 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$）。

如果在自变量的某个变化过程中，$f(x)$ 保持正值且无限地增大，则称 $f(x)$ 为**正无穷大**，记作 $\lim f(x)=+\infty$；如果 $f(x)$ 保持负值且绝对值无限地增大，则称 $f(x)$ 为**负无穷大**，记作 $\lim f(x)=-\infty$。

例如，在$x\to0$时$\frac{1}{x}$为无穷大，在$x\to+\infty$时$\ln x$为正无穷大，在$x\to0^{+0}$时$\ln x$为负无穷大。

同无穷小类似，无穷大是个变量，任何很大的常数都不是无穷大。

无穷大量与无穷小量成倒数关系：在一个过程中，如果函数$f(x)$为无穷大，则$\frac{1}{f(x)}$为无穷小；如果$f(x)(\neq0)$为无穷小，则$\frac{1}{f(x)}$为无穷大。

例如，$x\to+\infty$时，e^x是无穷大，$e^{-x}=\frac{1}{e^x}$是无穷小；$x\to1$时，$x-1$是无穷小，$\frac{1}{x-1}$是无穷大.

习　题　1-3

1．若要下列函数是无穷小，x应各趋向于什么值？若要下列函数是无穷大，x又应各趋向于什么值？

(1) $\frac{x-1}{x^3-1}$；　　(2) $\frac{x^3-3x+2}{x-2}$；

(3) $1-\sin x$；　　(4) e^x。

2．当$x\to1$时，与$1-x$相比，下列各函数，哪个是高阶无穷小，哪个是同阶无穷小？哪个是等价无穷小？

(1) $1-x^3$；　　(2) $\frac{1-x}{1-x}$；

(3) $2(1-\sqrt{x})$；　　(4) x^3-3x+2。

3．当$x\to0$时，与x相比，下列函数中哪些是高阶无穷小？哪些是同阶无穷小？哪些是等价无穷小？

(1) $x^4+\sin2x$；　　(2) $x^3+1000x^2$；

(3) $1-\cos2x$；　　(4) $\frac{2}{\pi}\cos\left[\frac{\pi}{2}(1-x)\right]$。

4．求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\frac{1}{x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg}x}{x}$。

5．求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x+1}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-100x+1)$。

第四节　函数的连续性

一、函数的连续性

许多自然现象，如气温的变化，生物体的生长，化学反应物浓度的增减等，都是随时间连续不断地变化，且时间变化很小时，这些量的变化也很小。例如，就气温的变化来看，当时间变动很微小时，气温的变化也很微小，这种现象在函数上的反映就是函数的连续性。

设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点及其附近有定义，自变量 x 在 x_0 点有一个改变量（亦称增量）Δx，当 x 从 x_0 变到 $x_0+\Delta x$ 时，函数 y 相应地从 $f(x_0)$ 变到 $f(x_0+\Delta x)$，那么函数 $f(x)$ 在 x_0 点对应的改变量（增量）为：

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

如图 1-5 所示。

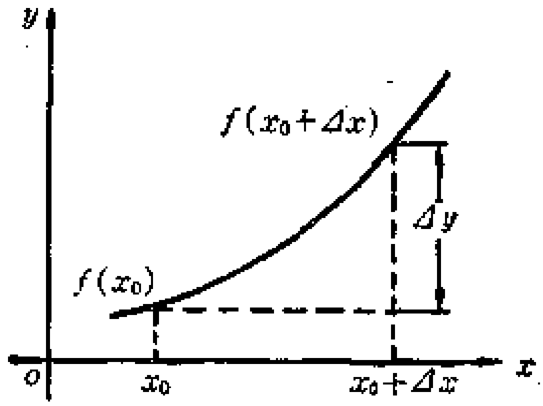


图　1-5

如果自变量的改变量 Δx 很微小时，对应的函数改变量 Δy 也很微小，则我们说函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点是连续的。

定义 1　设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点及其附近有定义，如果当自变量 x 在 x_0 点的增量 Δx 趋向于零时，对应的函数的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 也趋向于零，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$$

则称函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点连续(continuous)。

令 $x=x_0+\Delta x$，则 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(x)-f(x_0)$，即 $f(x)=f(x_0)+\Delta y$。由此可见，$\Delta x\to 0$，即 $x\to x_0$；$\Delta y\to 0$，即 $f(x)\to f(x_0)$。所以函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 点连续的定义又可叙述如下.

定义 2 设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点及其附近有定义，如果当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限存在，且等于它在 x_0 点的函数值 $f(x_0)$，即

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

则称函数 $f(x)$ 在 x_0 点**连续**.

由此可知，如果 $f(x)$ 在 x_0 点连续，则有

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f\left(\lim_{x\to x_0} x\right)=f(x_0)$$

这就是说，函数 $f(x)$ 在 x_0 点连续时，极限符号与函数符号可交换次序，并且所求的极限值就等于 x_0 点的函数值。

如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内的每一点都连续，则称函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内连续.

如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内连续，并且 $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=f(a)$，$\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=f(b)$，则称函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续.

从几何上看，连续函数的图形是一条无间隙的连续曲线。

根据函数连续的定义，函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续应同时满足三个条件：

(1) 函数 $f(x)$ 在 x_0 点有定义；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$。

如果有一个条件不满足，函数 $f(x)$ 在点 x_0 就不连续。此时点 x_0 称为函数 $f(x)$ 的**间断点**。

例 1 函数 $x\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 点没有定义，所以它在 $x=0$ 点间断，由于 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0$，如果按照下面的方式补上这一点的

定义：

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

则函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 点就变成连续的了(为什么?)。

例 2 考察函数 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0 \\ x^2+1, & x\geqslant 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 点的连续性。

因为 $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-0}(x-1)=-1$

$\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+0}(x^2-1)=+1$

所以，$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在，当然，$x=0$ 就是 $f(x)$ 的间断点(图 1-6)。

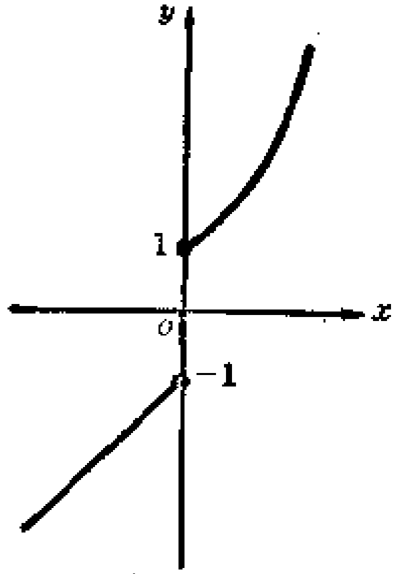


图 1-6

二、连续函数的性质

定理 1 如果函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都在 x_0 点连续，则函数

$$f(x)\pm g(x),\ f(x)\cdot g(x) \text{ 及 } \frac{f(x)}{g(x)}\,[g(x_0)\neq 0]$$

在 x_0 点连续。

根据极限的四则运算法则及函数连续的定义即可证之。

定理 2 如果函数 $u=\varphi(x)$ 在 x_0 点连续，且 $u_0=\varphi(x_0)$，又函数 $y=f(u)$ 在 u_0 点连续，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在 x_0 点连续。

证 因为函数 $u=\varphi(x)$ 在 x_0 点连续，所以当 $x\to x_0$ 时，$u\to\varphi(x_0)=u_0$；又因为函数 $y=f(u)$ 在 u_0 点连续，所以当 $u\to u_0$ 时，$f(u)\to f(u_0)$。因此

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=\lim_{u\to u_0} f(u)=f(u_0)=f[\varphi(x_0)]$$

这就证明了复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在 x_0 点连续。

可以证明，基本初等函数在其定义域内都是连续的。再根据初等函数的定义以及上述两个定理就可推出一个重要的结论：一切初等函数在其定义域内都是连续的。

根据这个结论，可以方便地求出一些初等函数的极限，例如，点 $x=0$ 是初等函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域$[-1,1]$内的一点，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1}=1$；又如点 $x=\frac{\pi}{2}$ 是初等函数 $f(x)=\ln\sin x$ 的定义域内的一点，所以

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln\sin x=\ln\sin\frac{\pi}{2}=0$$

闭区间上的连续函数有多个性质，下面介绍两个主要的：

最大值和最小值定理 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在该区间上必能取到最大值和最小值。

从几何上看，一段连续曲线必有最高点和最低点，如图 1-7 所示，图中 $f(\eta)$ 为最大值，$f(\xi)$ 为最小值。

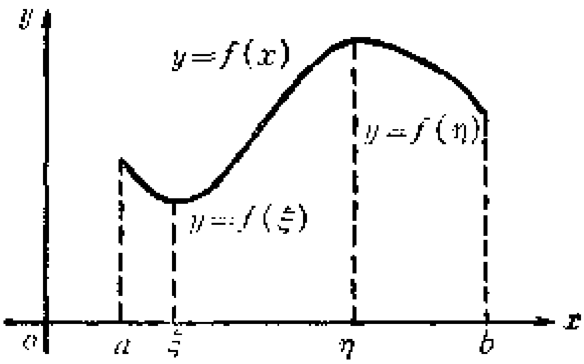


图 1-7

介值定理 如果函数 $f(x)$ 在闭区间$[a, b]$上连续，则对于介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任意一个数 c，在$[a, b]$上至少存在一点 ξ，使得

$$f(\xi)=c \qquad (a\leqslant\xi\leqslant b)$$

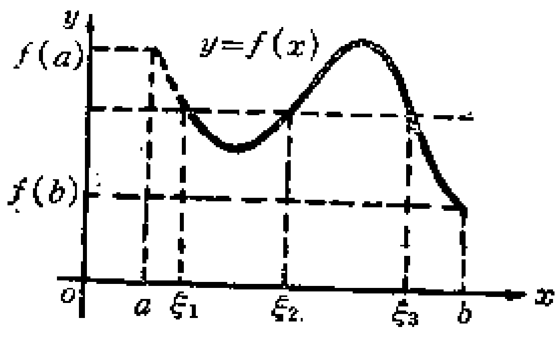


图 1-8

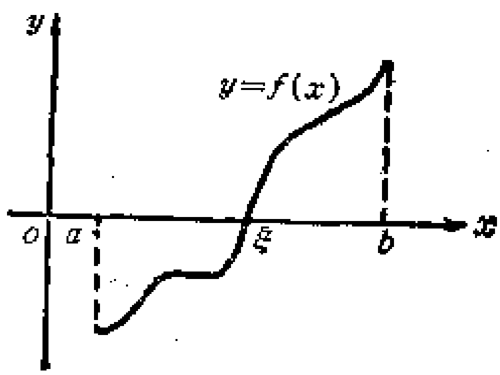


图 1-9

此定理的几何意义是很明显的，如图 1-8 所示，连续曲线 $y=f(x)$ 与水平直线 $y=c$（c 在 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间）至少交于一点，这一点的横坐标即为 ξ。特别地，如果 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，则连续曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴至少相交于一点，即在 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号时，在方程 $f(x)=0$ 闭区间 $[a, b]$ 内至少有一个实根，如图 1-9 所示。

习　题　1-4

1．函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点有定义，有极限，以及在该点连续，这三者的关系如何？

2．求下列函数的间断点及连续区间：

(1) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-x-2}$；　　(2) $f(x)=\dfrac{x}{\operatorname{tg}x}$。

3．研究下列函数的连续性并画出函数的图形：

(1) $f(x)=\begin{cases} x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ 2-x, & 1<x\leqslant 2 \end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases} x, & -1\leqslant x\leqslant 1 \\ 1, & x<-1 \text{ 或 } x>1 \end{cases}$

4．考察函数 $f(x)=\begin{cases} \operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ \dfrac{\pi}{2}, & x=0 \end{cases}$

在 $x=0$ 点的连续性．

5．a 取何值时，函数

$$f(x)=\begin{cases} x+a, & x\leqslant 0 \\ \dfrac{1-\cos x}{x^2}, & x>0 \end{cases}$$

在 $(-\infty, +\infty)$ 内为连续函数．

6．求下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x^2+2x+3}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+\cos x)$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\ln\dfrac{\sin x}{x}$；　　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$；

(7) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sin x - \sin a}{x - a}$;

(8) $\lim\limits_{x \to +\infty} x[\ln(1 + x) - \ln x]$;

(9) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + 2\sin x)^{\operatorname{ctg} x}$;

(10) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$.

第二章　导数与微分

导数和微分是微分学中两个最基本的概念，导数反映了函数相对于自变量的变化快慢程度，即函数的变化率；微分则表达了当自变量有微小变化时，函数变化的近似值。本章将阐述这两个基本概念以及它们的计算方法和实际应用。

第一节　导数概念

一、变化率问题

1．变速直线运动的瞬时速度

设有一质点作变速直线运动，s 表示质点从某个时刻开始到时刻 t 所经过的路程，则 s 是时刻 t 的函数，记作

$$s=s(t)$$

$s(t)$ 称为质点的运动规律。

我们要确定质点在某一时刻 t_0 的瞬时速度。

当时间由 t_0 改变到 $t_0+\Delta t$ 时，质点在 Δt 这一段时间内所经过的路程为：

$$\Delta s=s(t_0+\Delta t)-s(t_0)$$

质点的平均速度为：

$$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$$

由于质点是作变速运动，故 $\bar{v}$ 一般不是 t_0 时刻质点的瞬时速度，只是它的一个近似值。显然，$|\Delta t|$ 越小，近似程度就越好，$\bar{v}$ 就越接近 t_0 的瞬时速度。故可定义：当 $\Delta t\to 0$ 时，平均速度 $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 的极限，就是质点在时刻 t_0 的瞬时速度，即

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$$
$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$$

例如，自由落体的运动规律为 $s=\frac{1}{2}gt^2$，则

$$\Delta s=\frac{1}{2}g(t_0+\Delta t)^2-\frac{1}{2}gt_0^2$$

$$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{1}{2}g(2t_0+\Delta t)$$

因而质点在时刻 t_0 的瞬时速度为：

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{2}g(2t_0+\Delta t)=gt_0$$

2．化学反应的速率

设某个化学反应中，某一反应物的浓度 C 与反应时间 t 的关系为：

$$C=C(t)$$

现要确定在时刻 t_0 化学反应的速率。

当时间从 t_0 有一增量 Δt 时，反应物浓度 C 便相应地有一增量

$$\Delta C=C(t_0+\Delta t)-C(t_0)$$

我们用单位时间内反应物浓度的改变量来表示平均化学反应速度 $\bar{v}$，即

$$\bar{v}=\frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

显然，$|\Delta t|$ 越小，平均反应速度 $\bar{v}$ 就越接近时刻 t_0 的反应速率，所以，当 $\Delta t\to 0$ 时，平均反应速度 $\frac{\Delta C}{\Delta t}$ 的极限，就是时刻 t_0 的化学反应速率，即

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta C}{\Delta t}$$
$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{C(t_0+\Delta t)-C(t_0)}{\Delta t}$$

二、导数的定义及几何意义

上述两个问题实际意义虽然不同，但其研究方法却是相同的，都是求函数增量与自变量增量之比，当自变量的增量趋于零时的极限。这类极限就是导数。

定义 设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点及其附近有定义，当自变量 x 在 x_0 点有增量 Δx 时，函数 y 相应的增量为

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

如果 Δy 与 Δx 之比，当 $\Delta x\to 0$ 时的极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限值为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点的**导数** (derivative)。记作

$$f'(x_0),\ y'\Big|_{x=x_0},\ \frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}\ \text{或}\ \frac{df(x)}{dx}\Big|_{x=x_0}$$

即
$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

此时简称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处**可导**。

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $(a,\ b)$ 内的每一点 x 都可导，则称函数 $f(x)$ 在区间 $(a,\ b)$ 内可导。这时函数 $y=f(x)$ 对于 $(a,\ b)$ 内的每一个确定的 x 值，都对应着一个确定的导数，从而构成一个新的函数，它称为函数 $y=f(x)$ 的**导函数**，记作

$$y',\ f'(x),\ \frac{dy}{dx}\ \text{或}\ \frac{df(x)}{dx}$$

即
$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

下面为叙述方便起见，将导函数 $f'(x)$ 简称为**导数**，而导数 $f'(x_0)$ 就是导函数 $f'(x)$ 在点 x_0 的函数值，即 $f'(x_0)=f'(x)\big|_{x=x_0}$。

于是，变速直线运动的速度 $v(t)$ 就是路程 $s=s(t)$ 对时间 t 的导数，即

$$v(t)=\frac{ds}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$$

化学反应速率 $v(t)$ 就是反应物浓度 $C=C(t)$ 对时间 t 的导数，即

$$v(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta C}{\Delta t}$$

例 1 求函数 $y=x^2$ 在 $x=2$ 处的导数。

解 按导数定义，有

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)\\&=2x\end{aligned}$$

即 $$(x^2)'=2x$$

所以 $$f'(2)=2x|_{x=2}=4$$

下面我们考察导数的几何意义。

设 $M_0(x_0, y_0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 上的一点，在曲线上任取另一点 $M(x, y)$（如图 2-1 所示），割线 M_0M 的倾斜角为 φ，则其斜率为：

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

当 M 点沿着曲线趋近于 M_0 点时，割线 M_0M 的极限位置

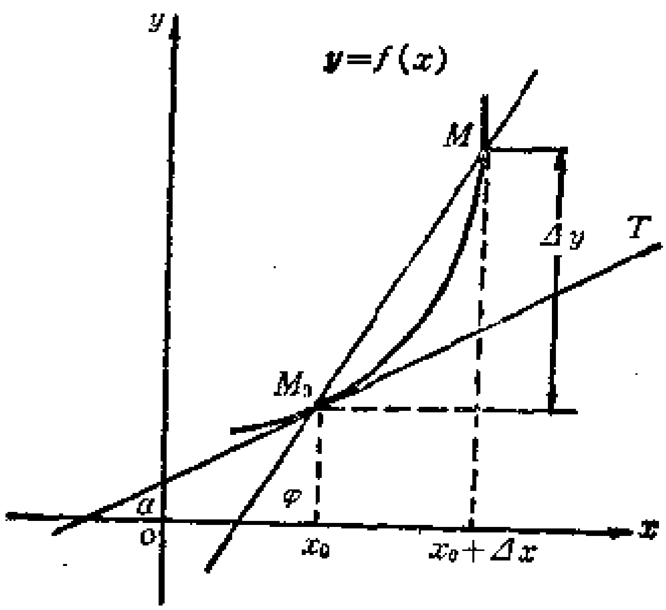


图 2-1

M_0T 称为曲线在 M_0 点的**切线**。于是割线倾斜角 φ 的极限是切线的倾斜角 α，割线斜率 $\operatorname{tg}\varphi$ 的极限就是切线的斜率 $\operatorname{tg}\alpha$，即

$$\operatorname{tg}\alpha=\lim_{\varphi\to\alpha}\operatorname{tg}\varphi$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$$

由此可见，函数 $y=f(x)$在 x_0 点的导数 $f'(x_0)$ 就是曲线 $y=f(x)$在点 $M_0(x_0,\ f(x_0))$处切线的斜率，这就是导数的几何意义。

根据导数的几何意义，不难求得已知曲线上指定点处的切线方程和法线方程。

例 2 求抛物线 $y=x^2$ 在点(2,4)处的切线方程和法线方程。

解 由例 1 可知，$y'=2x$，所以曲线在点(2, 4)处切线的斜率为：

$$k=y'\big|_{x=2}=2x\big|_{x=2}=4$$

故所求的切线方程为：

$$y-4=4(x-2)$$

即 $$4x-y-4=0$$

所求的法线方程为：

$$y-4=-\frac{1}{4}(x-2)$$

即 $$x+4y-18=0$$

三、几个基本初等函数的导数

根据导数的定义，求函数 $y=f(x)$的导数 y' 的步骤是：

(1) 求增量：$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$；

(2) 算比值：$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$；

(3) 求极限：$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$。

下面按照这三个步骤求几个基本初等函数的导数。

1. 常数 $y=c$ 的导数

因为 $\Delta y=c-c=0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{0}{\Delta x}=0$$

所以
$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}0=0$$

即
$$(c)'=0 \tag{1}$$

这就是说，常数的导数等于零。

2. 幂函数 $y=x^n$(n 为正整数)的导数

因为 $\Delta y=(x+\Delta x)^n-x^n$

$$=x^n+nx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}(\Delta x)^2$$

$$+\cdots+(\Delta x)^n-x^n$$

$$=nx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}(\Delta x)^2+\cdots+(\Delta x)^n$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}\Delta x+\cdots+(\Delta x)^{n-1}$$

所以
$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=nx^{n-1}$$

即
$$(x^n)'=nx^{n-1} \tag{2}$$

下一节里我们将看到，当 n 为任意实数时，这个公式仍然成立。由此就可以求出任意一个幂函数的导数，例如：

$$(x^3)'=3x^2$$

$$(\sqrt{x})'=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=(x^{-1})'=-x^{-2}=-\frac{1}{x^2}$$

3. 正弦函数 $y=\sin x$ 和余弦函数 $y=\cos x$ 的导数

因为 $\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x$

$$=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

所以 $$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=\cos x$$

即 $$(\sin x)'=\cos x \tag{3}$$

类似地，可以求得余弦函数 $y=\cos x$ 的导数为：

$$(\cos x)'=-\sin x \tag{4}$$

4. 对数函数 $y=\log_a x$ 的导数

因为 $\Delta y=\log_a(x+\Delta x)-\log_a x=\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

所以 $$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

$$=\frac{1}{x}\log_a e$$

即 $$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln a} \tag{5}$$

特别地，当 $a=e$ 时，有

$$(\ln x)'=\frac{1}{x} \tag{6}$$

公式(1)到(6)是导数计算中常用的基本公式，必须熟记。知道了这些公式，要计算函数在某点的导数就非常方便，因为它就是导函数在该点处的函数值．例如：

对于函数 $y=\sin x$，由于 $(\sin x)'=\cos x$，所以

$$y'\big|_{x=\frac{\pi}{6}}=\cos x\big|_{x=\frac{\pi}{6}}=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y'\big|_{x=0}=\cos x\big|_{x=0}=\cos 0=1$$

四、函数的连续性与可导性的关系

定理 如果函数 $y=f(x)$ 在点 x 可导，则函数在点 x 必连续。

证 由假设，有 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$，

故
$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\cdot\Delta x\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\\&=f'(x)\cdot 0=0\end{aligned}$$
这表明函数在点 x 连续。

然而，若函数 $f(x)$ 在点 x 连续，函数在该点却不一定可导。

例 3 考察函数 $y=\sqrt[3]{x}$ 在 $x=0$ 处的可导性。

解 显然，$y=\sqrt[3]{x}$ 在其定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，当然在 $x=0$ 点也连续，但在该点不可导。因为
$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{0+\Delta x}-\sqrt[3]{0}}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}}\end{aligned}$$
此极限不存在。图 2-2 中，曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 在原点 o 具有垂直于 x 轴的切线，其斜率为无穷大。在其它各点函数既连续又可导。

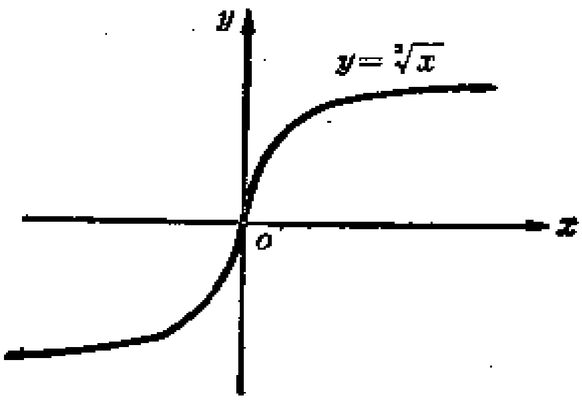


图 2-2

习 题 2-1

1. 质点沿直线运动的运动规律为

$$s=10t+5t^2,$$

t 的单位是秒，s 的单位是米。试求：

(1) 在 $20\leqslant t\leqslant 20+\Delta t$ 时间内质点运动的平均速度，并计算当 $\Delta t=1$，0.1，0.01秒时的平均速度；

(2) 当 $t=20$秒时，质点的瞬时速度。

2. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导，试求：

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$；

(2) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$；

(3) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$。

3. 按导数定义，求下列函数的导数：

(1) $f(x)=ax+b$ (a,b 是常数)；

(2) $f(x)=\sqrt{x+1}$。

4. 求下列函数的导数：

(1) $y=x^4$； (2) $y=\dfrac{1}{x^2}$；

(3) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$； (4) $y=\lg x$。

5. 设 $f(x)=\sin x$，求 $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$，$f'(0)$。

6. 在抛物线 $y=x^2$ 上取横坐标为 $x_1=1$ 和 $x_2=3$ 的两点，作过这两点的割线，问抛物线上哪一点的切线平行于这条割线？

7. 欲使直线 $y=x+a$ 与曲线 $y=\ln x$ 相切，a 应取何值？

8. 已知物体的运动规律为 $s=t^3$(m)，求物体在 $t=2$s 时的速度。

9. 若电流通过一导体的电量 Q 与时间 t 的函数关系为 $Q=Q(t)$，怎样确定该导体在时刻 t_0 的电流强度？

第二节 求导法则

一、函数四则运算的求导法则

设函数 $u=u(x)$ 与 $v=v(x)$ 都是 x 的可导函数，c 是常数。

法则1 两个函数的和(差)的导数等于这两个函数导数的和(差)，即

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

法则2 两个函数乘积的导数，等于第一个函数的导数乘以第二个函数，加上第一个函数乘以第二个函数的导数，即

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'$$

特别地，当 $v(x) = c$ 时，有

$$(cu)' = cu'$$

对于三个可导函数 u, v, w，有

$$(u \cdot v \cdot w)' = u'vw + uv'w + uvw'$$

法则3 两个函数之商的导数，等于分子的导数与分母的乘积减去分母的导数与分子的乘积，再除以分母的平方，即

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

三个法则的证明是类似的，现就法则2证明如下：

设 $y = u(x) \cdot v(x)$。当 x 有增量 Δx 时，函数 u, v 及 y 相应的增量为 $\Delta u, \Delta v$ 及 Δy，而

$$\begin{aligned}\Delta y &= u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x) \\ &= [u(x)+\Delta u][v(x)+\Delta v] - u(x)v(x) \\ &= \Delta u\, v(x) + u(x)\Delta v + \Delta u\, \Delta v\end{aligned}$$

于是
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v(x) + u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

因为函数 $u(x)$ 在 x 点可导从而连续，故当 $\Delta x \to 0$ 时，有 $\Delta u \to 0$，于是有

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v(x) + u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta u \frac{\Delta v}{\Delta x}\right) \\ &= v(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} \\ &\quad + \lim_{\Delta x\to 0}\Delta u \cdot \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} \\ &= u'v + uv'\end{aligned}$$

即
$$(uv)' = u'v + uv'$$

例 1 求 $y=2x^3+\sin x-\ln 2$ 的导数。

解 $y'=(2x^3)'+(\sin x)'-(\ln 2)'$

$$=2(x^3)'+\cos x-0$$

$$=6x^2+\cos x$$

例 2 求 $y=x\ln x-x$ 的导数。

解 $y'=(x\ln x)'-1$

$$=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}-1$$

$$=\ln x$$

例 3 求 $y=\operatorname{tg}x$ 的导数。

解 $y'=(\operatorname{tg}x)'=\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'$

$$=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$=\sec^2 x$$

即 $$(\operatorname{tg}x)'=\sec^2 x$$

类似地可得

$$(\operatorname{ctg}x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x$$

例 4 求 $y=\sec x$ 的导数。

解 $y'=(\sec x)'=\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)'$

$$=\frac{1'\cdot\cos x-1\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$=\sec x\cdot\operatorname{tg}x$$

即 $$(\sec x)'=\sec x\cdot\operatorname{tg}x$$

类似地可得

$$(\csc x)' = -\csc x \operatorname{ctg} x$$

二、复合函数的求导法则

定理(链导法) 如果函数 $u=\varphi(x)$ 在 x 点可导，而函数 $y=f(u)$ 在对应的 u 点可导，那么复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在 x 点也可导，且有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

或
$$y'_x=y'_u\cdot u'_x$$

证 设 x 有增量 Δx，则函数 $u=\varphi(x)$ 有增量 Δu，从而 $y=f(u)$ 也有相应的增量 Δy。

因为 $y=f(u)$ 在 u 点可导，$u=\varphi(x)$ 在 x 点可导，即有

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=\frac{dy}{du},\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{du}{dx}$$

由于 $u=\varphi(x)$ 可导必连续，故 $\Delta x\to 0$ 时，$\Delta u\to 0$。于是

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}&=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)^{*}\\&=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\\&=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\end{aligned}$$

即
$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\tag{7}$$

公式(7)给出的复合函数的求导法则，称为**链导法**。它可推广到有多个中间变量的情形。如：设 $y=f(u)$，$u=\varphi(v)$，$v=\psi(x)$，则复合函数 $y=f\{\varphi[\psi(x)]\}$ 的导数为：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}$$

或
$$y'_x=y'_u\cdot u'_v\cdot v'_x$$

例5 求 $y=(4x+5)^{100}$ 的导数。

解 设 $y=u^{100}$，$u=4x+5$，则

* 当 $\Delta u=0$ 时，亦有相同结论。

$$y'_x=(u^{100})'\cdot(4x+5)'$$
$$=100u^{99}\times4$$
$$=400(4x+5)^{99}$$

例 6 求 $y=\sin 2x$ 的导数。

解 设 $y=\sin u$, $u=2x$, 则

$$y'_x=(\sin u)'(2x)'$$
$$=2\cdot\cos u$$
$$=2\cos 2x$$

在运用复合函数的求导法则时，关键是善于把一个复杂的函数分解为基本初等函数或基本初等函数的和、差、积、商。求导时必须注意"谁对谁求导"。熟练以后，中间变量可以不必写出来。

例 7 求 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 的导数。

解 $y'=(\sqrt{a^2-x^2})'=\dfrac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(a^2-x^2)'$

$$=\frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x)$$

$$=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

例 8 求 $y=\ln\sin x$ 的导数。

解 $y'=(\ln\sin x)'=\dfrac{1}{\sin x}(\sin x)'=\dfrac{\cos x}{\sin x}=\operatorname{ctg} x$

例 9 求 $y=\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ 的导数。

解 $y'=\left(\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)'=\dfrac{1}{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)'$

$$=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\sec^2\frac{x}{2}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)'=\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{\sin x}=\csc x$$

例 10 求 $y=x\sin^2 x$ 的导数。

解 $y'=(x\sin^2x)'=(x)'\sin^2x+x(\sin^2x)'$

$=\sin^2x+x(2\sin x)(\sin x)'$

$=\sin^2x+2x\sin x\cos x$

$=\sin^2x+x\sin 2x$

三、隐函数的求导法

形如 $y=f(x)$ 的函数称为**显函数**，以前遇到的函数大多是显函数。如果函数 y 与自变量 x 之间的函数关系由方程 $F(x, y)=0$ 来确定，那么就说方程 $F(x, y)=0$，确定了 x 的隐函数 y。如 $2x-3y+1=0$，$x^2+y^2=a^2$ 和 $y^5+2y-x-3x^7=0$，都分别确定了 x 的隐函数 y。

有些隐函数不难表示成显函数 $y=f(x)$ 的形式，如 $2x-3y+1=0$ 可以显化为 $y=\frac{1}{3}(2x+1)$；有的隐函数很难甚至不能显化，如 $y^5+2y-x-3x^7=0$。不论隐函数能否显化，我们希望直接由方程 $F(x, y)=0$，求出它所确定的隐函数的导数。为此，将方程 $F(x, y)=0$ 的两边对 x 求导数。因为 y 是 x 的函数，而我们是对 x 求导，因此在求导时应把 y 看成是中间变量，用链导法则求导，由此得到一个含 y' 的方程，解出 y'，即得所求的导数。

例 11 求由方程 $x^3+y^3-3axy=0$ 所确定的隐函数 y 的导数。

解 将方程两端对 x 求导，有

$$3x^2+3y^2\cdot y'-3ay-3axy'=0$$

从而得
$$y'=\frac{x^2-ay}{ax-y^2}\qquad (ax-y^2\neq 0)$$

例 12 求双曲线 $x^2-y^2=7$ 在点(4, 3)处的切线方程。

解 将方程两端对 x 求导，有

$$2x-2yy'=0$$

故
$$y'=\frac{x}{y}$$

$$y'\Big|_{\substack{x=4\\y=3}}=\frac{4}{3}$$

所求切线方程为：

$$y-8=\frac{4}{3}(x-4)$$

或
$$4x-3y-7=0$$

四、幂函数、指数函数和反三角函数的导数

1. 幂函数 $y=x^\alpha$（α 为任意实数，$x>0$）的导数

对 $y=x^\alpha$ 两边取对数，有

$$\ln y=\alpha\ln x$$

两端对 x 求导，得

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\alpha\cdot\frac{1}{x}$$

所以
$$y'=y\cdot\alpha\cdot\frac{1}{x}=\alpha x^{\alpha-1}$$

即
$$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$$

等式两边取对数后再求导的方法称为**对数求导法**。在某些情况下，运用这一技巧求导比较简便。

2. 指数函数 $y=a^x$ 的导数（$a>0$, $a\neq1$）

对 $y=a^x$ 两边取对数，有

$$\ln y=x\ln a$$

两端对 x 求导，得

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\ln a$$

所以
$$y'=y\ln a=a^x\ln a$$

即
$$(a^x)'=a^x\ln a$$

特别地，当 $a=e$ 时，

$$(e^x)'=e^x$$

3. 反正弦函数 $y=\arcsin x$ 的导数

由 $y=\arcsin x$，有 $\sin y=x$，

两端对 x 求导，得

$$\cos y\cdot y'=1$$

所以 $$y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

即 $$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (-1<x<1)$$

类似地可得

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (-1<x<1)$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

五、基本初等函数的导数公式

至此，我们已经推导出所有基本初等函数的导数，现汇集如下：

1° $(c)' = 0$ （c 是常数）

2° $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ （α 是任意实数）

3° $(a^x)' = a^x \ln a$

4° $(e^x)' = e^x$

5° $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$

6° $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

7° $(\sin x)' = \cos x$

8° $(\cos x)' = -\sin x$

9° $(\operatorname{tg} x)' = \sec^2 x$

10° $(\operatorname{ctg} x)' = -\csc^2 x$

11° $(\sec x)' = \sec x \operatorname{tg} x$

12° $(\csc x)' = -\csc x \operatorname{ctg} x$

13° $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

14° $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

15° $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

16° $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

再举几个有关求导的例子。

例 13 求 $y=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2x}{1-x^2}$ 的导数。

解 $y' = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right)^2}\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right)'$

$$= \frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}\cdot\frac{2(1-x^2)-2x(-2x)}{(1-x^2)^2}$$

$$= \frac{2}{1+x^2}$$

例 14 求 $y=\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$ 的导数。

解 先两边取对数，得

$$\ln y = \frac{1}{2}[\ln(x-1)+\ln(x-2) - \ln(x-3)-\ln(x-4)]$$

上式两端对 x 求导，有

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right)$$

所以 $$y' = \frac{1}{2}y\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right)$$

例 15 求幂指函数 $y=(\operatorname{tg} x)^{\sin x}$ 的导数。

解 两边取对数，有

$$\ln y = \sin x(\ln \operatorname{tg} x)$$

两端对 x 求导，有

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \cos x(\ln \operatorname{tg} x) + \sin x\frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg} x}$$

$$y' = y[\cos(\ln \operatorname{tg} x) + \sec x]$$

$$= (\operatorname{tg} x)^{\sin x}[\cos x(\ln \operatorname{tg} x) + \sec x]$$

例 16 方 程 $xy-e^x+e^y=0$ 确 定 y 是 x 的 函 数， 求 y' 及

$y'|_{x=0}$

解 将方程两端对 x 求导，有

$$y + xy' - e^x + e^y \cdot y' = 0$$

得
$$y' = \frac{e^x - y}{x + e^y}$$

将 $x=0$ 时，代入原方程得 $y=0$，所以

$$y'\Big|_{x=0} = \frac{e^x - y}{x + e^y}\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = 1$$

六、高阶导数

函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$，一般仍然是 x 的函数．如果 $f'(x)$ 还是可导的，则把 $f'(x)$ 的导数称为 **$f(x)$ 的二阶导数**，记作

$$y'', \ f''(x) \quad 或 \quad \frac{d^2y}{dx^2}.$$

按导数的定义，函数 $f(x)$ 在点 x 的二阶导数就是

$$f''(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

类似地，二阶导数 $f''(x)$ 的导数叫做 **$f(x)$ 的三阶导数**，记作

$$y''', \ f'''(x) \quad 或 \quad \frac{d^3y}{dx^3}.$$

一般地，$(n-1)$ 阶导数 $f^{(n-1)}(x)$ 的导数叫做 **$f(x)$ 的 n 阶导数**，记作

$$y^{(n)}, \ f^{(n)}(x) \quad 或 \quad \frac{d^ny}{dx^n}.$$

二阶及二阶以上的导数统称为**高阶导数**。有时也称函数 $f(x)$ 为它本身的零阶导数，$f'(x)$ 称为一阶导数。

二阶导数有明确的物理意义。物体作变速直线运动时，如果运动方程为 $s=s(t)$，则速度 v 就是路程 s 对时间 t 的一阶导数，即 $v=\frac{ds}{dt}$。而加速度是速度 v 对时间 t 的变化率，也就是速度 v 对时间 t 的导数，即 $a=\frac{dv}{dt}$，所以运动物体的加速度就是路程 s 对时间 t 的二阶导数。即 $a=\frac{dv}{dt}=s''(t)$。例如

$$s=\frac{1}{2}gt^2,\quad v=\frac{ds}{dt}=gt,\quad a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}=g$$

求函数的 n 阶导数，只要按求导法则和求导公式逐阶进行即可。

例 17 求 $y=e^{-x^2}$ 的二阶导数。

解 $y'=-2xe^{-x^2}$

$$y''=-2(e^{-x^2}-x\cdot 2xe^{-x^2})$$

$$=-2e^{-x^2}(1-2x^2)$$

例 18 求 $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 的各阶导数。

解 $y'=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}$

$$y''=n(n-1)a_0x^{n-2}+(n-1)(n-2)a_1x^{n-3}+\cdots+2a_{n-2}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}y^{(k)}=&n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)a_0x^{n-k}\\&+(n-1)(n-2)\cdots(n-k)a_1x^{n-(k+1)}\\&+\cdots+k(k-1)\cdots2\cdot1a_{n-k},\quad (k<n)\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)}=n(n-1)\cdots2\cdot1\cdot a_0=n!a_0$$

$$y^{(n+1)}=y^{(n+2)}=\cdots=0$$

这就是说，n 次多项式的一切高于 n 阶的导数都等于零。

例 19 求 $y=\sin x$ 的 n 阶导数。

解 $y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

$$y''=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y'''=\cos\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

习 题 2-2

1．求下列函数的导数(其中 a,b,ω,φ 为常数)：

(1) $y=3x^2-\frac{2}{x}+5$;

(2) $y=x(2+\sqrt{x})$;

(3) $y=\frac{x^5+2\sqrt{x}-1}{x^3}$;

(4) $y=2\ln x+\ln 2$;

(5) $y=(x^3+1)\sin x$;

(6) $y=x\operatorname{tg}x-\sec x$;

(7) $y=(x-1)\ln x$;

(8) $y=x\cos x\ln x$;

(9) $y=\frac{ax+b}{a+b}$;

(10) $y=\frac{a+b}{ax+b}$;

(11) $y=\frac{x-1}{x+1}$;

(12) $y=\frac{\sin x}{1+\cos x}$;

(13) $y=(2x+3)^5$;

(14) $y=\ln(1-x)$;

(15) $y=\sin(\omega t+\varphi)$;

(16) $y=\ln\ln x$;

(17) $y=\cos^2\frac{x}{2}$;

(18) $y=\sin^2 x\cos 2x$;

(19) $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

(20) $y=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}$;

(21) $y=x^{10}+10^x-\ln 10$;

(22) $y=2xe^x+e^2$;

(23) $y=e^{2x}+e^{x^2}$;

(24) $y=e^{-at}\cos(\omega t+\varphi)$;

(25) $y=\arcsin x+\arccos x$;

*(26) $y=\arccos\frac{1-x}{2}$;

(27) $y=\operatorname{arctg}x^2-\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}$;

(28) $y=\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}$;

(29) $y=\arcsin(\cos x)$;

*(30) $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$.

2．求下列函数的导数：

(1) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$;

(2) $y=\ln\cos^2\frac{1}{x}$;

(3) $y=\ln\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$;

(4) $y=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$ (a 为常数)；

(5) $y=x\arcsin\frac{x}{2}+\sqrt{4-x^2}$;

(6) $y=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x$;

*(7) $y=(1+x^2)^{\sin x}$;

*(8) $y=\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$.

3．求由下列方程所确定的隐函数 y 的导数 $\frac{dy}{dx}$：

(1) $xy=e^{x+y}$；　　(2) $y=1-xe^y$；

*(3) $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$。

4．求下列函数的二阶导数：

(1) $y=xe^{x^2}$；　　(2) $y=\ln(1-x^2)$；

(3) $y=e^{-t}\sin t$。

*5．求下列函数的 n 阶导数：

(1) $y=xe^x$；　　(2) $y=\ln(1+x)$；

(3) $y=\sin^2 x$。

6．求由方程 $e^y+xy-e=0$ 所确定的隐函数 y 的导数 $\frac{dy}{dx}$ 及在 $x=0$ 处的切线方程．

7．求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上具有斜率 m 的切线方程．

8．一小球在斜面上向上滚动，在 t(秒)时球与起点的距离为 $s=3t-t^2$(米)，小球的初速度是多少？它何时开始向下滚动？

第三节　中值定理与罗必塔法则

一、拉格朗日中值定理

定理　如果函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，则在区间 (a,b) 内至少存在一点 $\xi(a<\xi<b)$，使等式

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi) \tag{1}$$

成立。

对这个定理，我们仅从几何图形上加以解释。当函数 $y=f(x)$ 满足定理的条件时，其图形是一条连续光滑的曲线。从图 2-3 可见，如果把弦 AB 平行移动，那么曲线上至少可以找到一点 C，使曲线在 C 点的切线与 AB 弦平行。记 C 点的横坐标为 ξ，则曲线在 C 点处切线的斜率为 $f'(\xi)$，而 AB 弦的斜率为 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$，

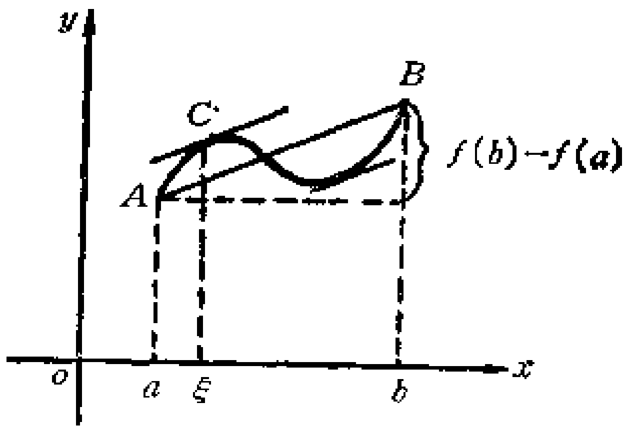


图 2-3

由于切线与 AB 弦平行，故有

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$$

这就是(1)式，它称为**拉格朗日(Lagrange)中值公式**。

设 x 为区间 (a, b) 内的一点，$x+\Delta x$ 为这区间内的另一点($\Delta x>0$ 或 $\Delta x<0$)，则拉格朗日中值公式在区间 $[x, x+\Delta x]$ $(\Delta x>0)$ 或区间 $[x+\Delta x, x]$ $(\Delta x<0)$ 上就成为：

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\cdot\Delta x)\Delta x \quad (0<\theta<1)$$

因为 θ 在0与1之间，所以 $x+\theta\cdot\Delta x$ 在 x 与 $x+\Delta x$ 之间。这是拉格朗日中值公式的另一形式。

推论 如果函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内的导数恒等于零，则 $f(x)$ 在该区间 (a, b) 内是一个常数。

证 在区间 (a, b) 内任取两点 x_1，x_2，不妨设 $x_1<x_2$，由(1)式有

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1) \quad (x_1<\xi<x_2)$$

由定理条件有 $f'(\xi)=0$，

所以 $$f(x_2)-f(x_1)=0$$

即 $$f(x_1)=f(x_2)$$

它表明在区间 (a, b) 内任意两点的函数值都相等，这就是说 $f(x)$ 在 (a, b) 内是一个常数。

例 1 验证拉格朗日定理对函数 $f(x)=\ln x$ 在区间 $[1, e]$ 上

的正确性，并求适合定理的点 ξ。

解 $f(x)=\ln x$ 在 $[1, e]$ 上连续可导，满足定理条件，而

$$\frac{\ln e-\ln 1}{e-1}=\frac{1}{e-1}$$

由于 $\quad f'(x)=\frac{1}{x}, \quad$ 所以 $\quad f'(\xi)=\frac{1}{\xi}$。

取 $\xi=e-1$，即 $f'(\xi)=\frac{1}{e-1}$ 时，有

$$\frac{\ln e-\ln 1}{e-1}=f'(\xi)$$

且 $\xi=e-1$ 在开区间 $(1, e)$ 内。这就验证了拉格朗日定理的正确性。

二、罗必塔法则

求极限 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}$ 时，如果函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 同时趋于零或趋于无穷大，这时是不能直接运用商的极限等于极限的商的法则去求极限的。而该极限可能存在，也可能不存在。通常称这类极限为**待定式**，并分别记为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$。下面介绍利用导数求这类极限的方法——罗必塔法则(L' Hospitai's rule)。

定理1 $\left(\frac{0}{0}\text{型待定式}\right)$ 如果 (1) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0, \lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$；(2) $f'(x), g'(x)$ 在 x_0 点附近都存在，且 $g'(x)\neq 0$；(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在(或为无穷大)。则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

定理2 $\left(\frac{\infty}{\infty}\text{型待定式}\right)$ 如果 (1) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$；(2) $f'(x), g'(x)$ 在 x_0 的附近都存在，且 $g'(x)\neq 0$；(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在(或为无穷大)。则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(a)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

这两个定理的证明从略。对于 $x\to\infty$ 时的待定式 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 也有相应的结论。

例 2 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}\quad(b\neq 0)$。

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\cos ax}{b\cos bx}=\dfrac{a}{b}$

例 3 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{x}\quad(a>0,\ b>0)$。

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x\ln a-b^x\ln b}{1}=\ln\dfrac{a}{b}$

例 4 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$。

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}$

仍为 $\frac{0}{0}$ 型待定式，再用一次罗必塔法则有

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}$$

故
$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}$$

由此例可知，在满足定理条件的情况下，可以多次运用罗必塔法则来求极限。

例 5 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{100}}{e^x}$。

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{100}}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{100x^{99}}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{100\cdot 99x^{98}}{e^x}=\cdots$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{100!}{e^x}=0$$

待定式除 $\frac{0}{0}$ 与 $\frac{\infty}{\infty}$ 型外，还有 $0\cdot\infty$，$\infty\cdot\infty$，0^0，1^∞，∞^0 型，它们常可化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型来计算。

例 6 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}x\right)$。

解　这是 $\infty\cdot 0$ 型待定式

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x}{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=1$$

习　题　2-3

1．下列函数在给定区间上是否满足拉格朗日中值定理的条件？如满足，则求出定理中的 ξ。

(1) $f(x)=x^2$ 在[1,2]上；

(2) $f(x)=\operatorname{arctg} x$ 在[0,1]上．

2．试证：对函数 $y=px^2+qx+r$ 应用拉格朗日中值定理时，求得的点总是位于区间的中点．

3．试证，若函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内的导数恒等于常数 k，则在该区间内

$$f(x)=kx+b.$$

4．求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{ctg} 2x$；

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$；　　(6) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}}$；

(7) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$；　　(8) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$；

(9) $\lim\limits_{x\to+0} x^a\ln x\quad(a>0)$；　　*(10) $\lim\limits_{x\to+0} x^{\sin x}$．

第四节　导数的应用

一、函数的单调性

定义　函数 $f(x)$ 对于区间 (a, b) 内的任意两点 x_1，x_2，如果当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在该区间内**单调增加**；如果当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在该区间内**单调减少**。

单调增加或单调减少的函数统称为**单调函数**。单调函数所在的区间称为**单调区间**。

从图形上看，单调增加（减少）的函数是一条沿 x 轴正向上升（下降）的曲线。这时，如图 2-4 所示，曲线上各点处的切线的斜率都是正值（负值），即 $f'(x)>0$ $(f'(x)<0)$，由此可知，函数的单调性与其导数的符号有着密切的联系。

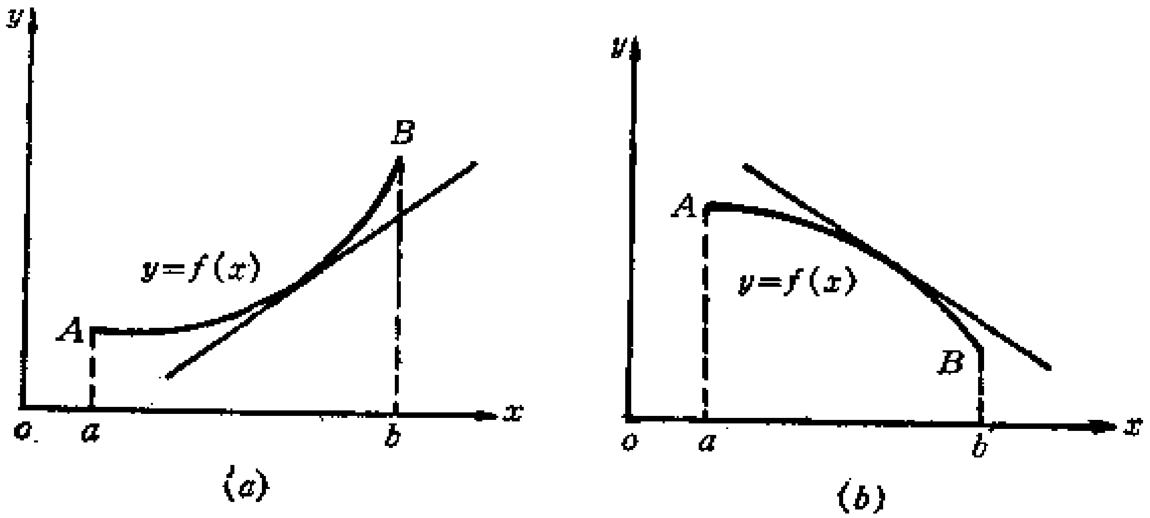


图　2-4

定理　设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导，并且

(1) 如果在 (a, b) 内恒有 $f'(x)>0$，则函数 $y=f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增加；

(2) 如果在 (a, b) 内恒有 $f'(x)<0$，则函数 $y=f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调减少。

证 证明(1)。在$[a, b]$上任意取两点x_1, x_2，设$x_1<x_2$，利用拉格朗日中值定理于区间$[x_1, x_2]$上，有

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1) \quad (x_1<\xi<x_2)$$

由于$x_2-x_1>0$，又由定理条件有$f'(\xi)>0$，所以$f(x_2)-f(x_1)>0$，

即
$$f(x_2)>f(x_1)$$

故函数$y=f(x)$在$[a, b]$上单调增加。

同理可证(2)。

例1 讨论函数$f(x)=x^3-3x+2$的单调性。

解 这函数的定义域为$(-\infty, +\infty)$。

求导
$$f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$$

解方程$f'(x)=0$，得两个根$x_1=-1$，$x_2=1$。这两个根把定义域$(-\infty, +\infty)$分成三个部分区间$(-\infty, -1)$，$(-1, 1)$，$(1, +\infty)$。($x_1=-1$，$x_2=1$，可以放入部分区间内，也可不放入。)显然，

$$\text{当} -\infty<x<-1 \text{时}, \quad f'(x)>0$$
$$\text{当} -1<x<1 \text{时}, \quad f'(x)<0$$
$$\text{当} 1<x<+\infty \text{时}, \quad f'(x)>0$$

所以，该函数在区间$(-\infty, -1)$和$(1, +\infty)$内单调增加；在区间$(-1, 1)$内单调减少。

例2 在血液循环系统中，血管内影响血液流动的阻力R是血管半径r的函数：$R(r)=\dfrac{8\eta L}{\pi r^4}$(其中$\eta$为血液粘滞系数，$L$为血管长度)。讨论当$r$在0.01 mm～1 mm范围内变化时，$R$相应的变化情况。

解 $R'(r)=-\dfrac{32\eta L}{\pi r^5}$

因为$\eta>0$，$L>0$，$r>0$，所以恒有$R'(r)<0$，这就是说，$R(r)$是一个递减函数，即较粗的血管内血液流动的阻力较小。

进一步计算：

$$|R'(0.01)|=\frac{32\eta L}{\pi}\times 10^{10}$$

$$|R'(0.1)| = \frac{32\eta L}{\pi} \times 10^5$$

$$|R'(1)| = \frac{32\eta L}{\pi}$$

这表明，对于半径 r 较小的动脉，r 的变化，将引起较大的流动阻力 R 的改变；反之，对于半径 r 较大的动脉，r 的变化，所引起的流动阻力 R 的改变较小。人体就是用神经来控制和调节微小动脉的半径，改变其流动阻力，从而达到改善或控制某局部血液流动的快慢和血液的供应。

二、函数的极值

定义 设函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内有定义，x_0 是 (a, b) 内的一个点。

如果对于 x_0 邻域的任一点 x（即有 $\delta>0$，对于区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内除了点 x_0 外的任何一点 x），均有

$$f(x_0)>f(x)$$

则称函数 $f(x)$ 在 x_0 点取得**极大值 $f(x_0)$**；如果对于 x_0 邻域的任一点 x，均有

$$f(x_0)<f(x)$$

则称函数 $f(x)$ 在 x_0 点取得**极小值 $f(x_0)$**。

函数的极大值与极小值统称为**函数的极值**，使函数取得极值的点称为**函数的极值点**。

函数极值的概念只是就极值点的函数值与其邻近的函数值的相对大小比较而言的，是函数局部性质的反映。一个函数在某一区间上可能有若干极大值和极小值，而且极大值可能小于极小值。如图 2-5 所示。

从图 2-5 中还可以观察到，在极值点处曲线的切线是水平的，因而函数的导数 $f'(x)=0$。但应注意，使得导数 $f'(x)=0$ 的点，不一定都是极值点，如 $f'(x_4)=0$，但 x_4 不是函数的极值点。

关于如何求函数的极值，有下面三个定理。

定理 1（必要条件） 如果函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点取得极值，且

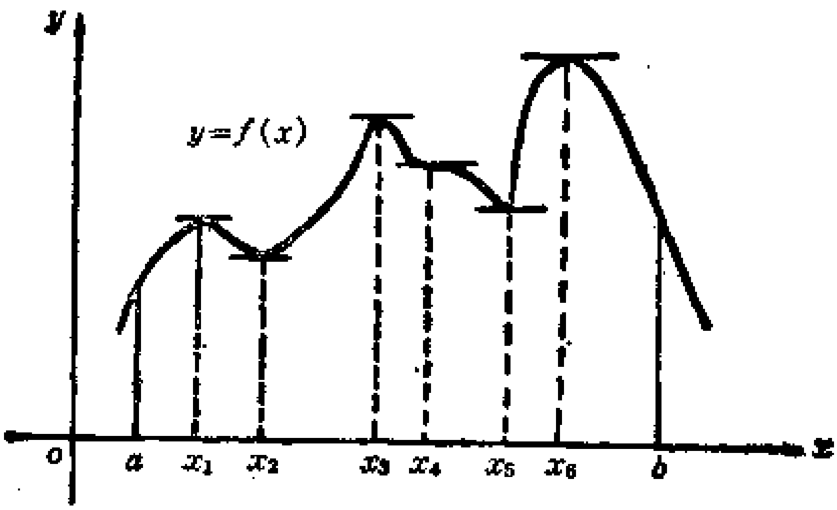


图 2-5

$f'(x_0)$存在，则 $f'(x_0)=0$。

证 设函数 $f(x)$在 x_0 点取得极大值，则当 $|\Delta x|$充分小时，有

$$f(x_0)>f(x_0+\Delta x)$$

于是，当 $\Delta x<0$ 时，有

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}>0$$

当 $\Delta x>0$ 时，有

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}<0$$

根据左、右极限的定义，有

$$\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\geqslant 0$$

$$\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\leqslant 0$$

因为 $f'(x_0)$存在，故此左、右极限存在且都等于 $f'(x_0)$，所以有 $f'(x_0)\geqslant 0$，且 $f'(x_0)\leqslant 0$，故有

$$f'(x_0)=0$$

同理可证极小值的情形。

使导数 $f'(x)$为零的点（即方程 $f'(x)=0$ 的实根），称为函数 $f(x)$的**驻点**（又称**稳定点**）。由定理 1 可知，可导函数的极值点必定是它的驻点，这给我们指出了寻求极值点的途径——可导函数

在驻点中去找。但驻点却不一定都是极值点。例如，对于函数 $f(x)=x^3$, $x=0$ 是它的驻点，但并不是它的极值点。因此求出函数的驻点后，还要判断它是否是极值点。

定理 2（第一充分条件） 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内可导，且 $f'(x_0)=0$，如果在此邻域内：

(1) 当 $x<x_0$ 时，$f'(x)>0$；$x>x_0$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x_0)$ 为极大值；

(2) 当 $x<x_0$ 时，$f'(x)<0$；$x>x_0$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x_0)$ 为极小值；

(3) x 在 x_0 的两侧，$f'(x)$ 同号，则 $f(x_0)$ 不是极值。

证 不妨证(1)。对任意的 $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$，应用拉格朗日中值定理，有

$$f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0) \quad (\xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间})$$

由定理条件知，不论 $x<x_0$，还是 $x>x_0$，均有

$$f'(\xi)(x-x_0)<0$$

从而

$$f(x)-f(x_0)<0, \quad \text{或} \quad f(x_0)>f(x)$$

这就证明了 $f(x_0)$ 为极大值。

类似地可证明(2)和(3)。

根据定理 2 和定理 3，可按下列步骤求可导函数的极值：

(1) 求导数 $f'(x)$；

(2) 令 $f'(x)=0$，求出所讨论区间内的全部驻点；

(3) 考察 $f'(x)$ 在各个驻点左、右两侧邻近的符号，按定理 3 判定驻点是否是极值点，同时确定是极大值还是极小值；

(4) 算出各个极大值和极小值。

例 3 求函数 $f(x)=x^3-3x+2$ 的极值。

解 $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

令 $f'(x)=0$，得驻点 $x=1, -1$。

由本节例 1 的讨论，如表 2-1 所示。所以 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极大值 $f(-1)=4$，在 $x=1$ 处取得极小值 $f(1)=0$。

表 2-1

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

当函数 $f(x)$ 在驻点处的二阶导数存在且不等于零时，可利用下面定理来判定 $f(x)$ 在驻点处取得极值的情况。

定理3(第二充分条件)　设函数 $f(x)$在 x_0 点具有二阶导数，且 $f'(x_0)=0$，那末

(1) 当 $f''(x_0)<0$ 时，函数 $f(x)$在 x_0 处取得极大值；

(2) 当 $f''(x_0)>0$ 时，函数 $f(x)$在 x_0 处取得极小值。

证明从略。

例如，对例3中的函数

$$f(x)=x^3-3x+2$$
$$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$$
$$f''(x)=6x$$

因为 $f'(-1)=0$，$f''(-1)=-6<0$，故 $f(-1)=4$ 为极大值；因为 $f'(1)=0$，$f''(1)=6>0$，故 $f(1)=0$ 为极小值。

注意：当 $f'(x_0)=f''(x_0)=0$ 时，定理3失效。这时可用定理2判别。

定理2和定理3是对可导函数而言的，但函数在其导数不存在的点也可能取得极值。例如 $y=|x|$，在 $x=0$ 不可导，但在 $x=0$ 处，函数却有极小值 $f(0)=0$。因此，在求连续函数的极值时，不仅要考察所讨论的区间内全部的驻点的情况，而且还必须考察导数不存在的各个点的情况。

例4　求函数 $f(x)=(x+4)\sqrt[3]{(x-1)^2}$ 的极值。

解　$f'(x)=(x-1)^{\frac{2}{3}}+\dfrac{2(x+4)}{3(x-1)^{\frac{1}{3}}}=\dfrac{5(x+1)}{3\sqrt[3]{x-1}}$

令 $f'(x)=0$，得 $x=-1$。又 $x=1$ 时，$f'(x)$ 不存在。因此 $x=-1$ 和 $x=1$ 都是极值可疑点、考察情况见表 2-2，所以 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处有极大值 $f(-1)\approx 4.76$；在 $x=1$ 处有极小值 $f(1)=0$。函数的图形如图 2-6 所示。

表 2-2

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	不存在	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

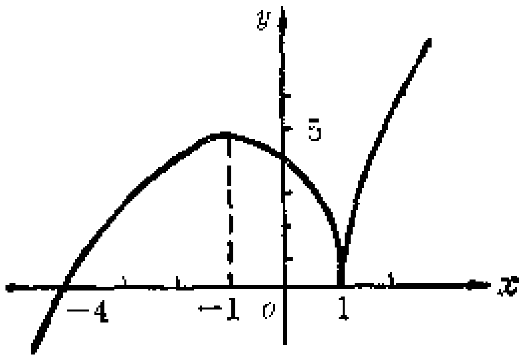


图 2-6

三、最大值、最小值问题

在实际工作中常常会遇到这样一类问题：在一定的条件下，怎样使用料最省？产量最高或成本最低？某血药浓度何时达到最大？某发病率什么年龄最高？等等。这类问题在数学上归结为求函数的最大值和最小值。

由闭区间上连续函数的性质可知，连续函数在闭区间上一定存在最大值和最小值。函数的最大值（或最小值），如果在它所讨论的区间内部取得，则此最大值（或最小值）一定是函数的极大值（或极小值）；然而，函数 $f(x)$ 的最大值（或最小值）也可能在区间的端点处取得。因此可用下述方法求可导函数在闭区间 $[a, b]$ 上的最大值和最小值。

设函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内的驻点为 x_1, x_2, x_3, 则比较

$$f(a),\ f(x_1),\ f(x_2),\ f(x_3),\ f(b)$$

的大小，其中最大的便是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值，最小的便是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最小值.

例 5 求 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$ 在区间 $[0, 3]$ 上的最大值和最小值.

解 $f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

令 $f'(x)=0$, 得驻点 $x_1=1$, $x_2=2$.

比较 $f(x)$ 在驻点和区间端点处的函数值:

$$f(0)=-3,\ f(1)=2,\ f(2)=1,\ f(3)=6.$$

所以 $f(x)$ 在区间 $[0, 3]$ 上的最大值为 $f(3)=6$, 最小值为 $f(0)=-3$.

在求函数的最大值(或最小值)时，如果可导函数 $f(x)$ 在某区间内有唯一的驻点 x_0, 并且 x_0 就是 $f(x)$ 的极值点，那么，当 $f(x_0)$ 是极大值时，它就是 $f(x)$ 在该区间上的最大值；当 $f(x_0)$ 是极小值时，它就是最小值. 如图 2-7 所示.

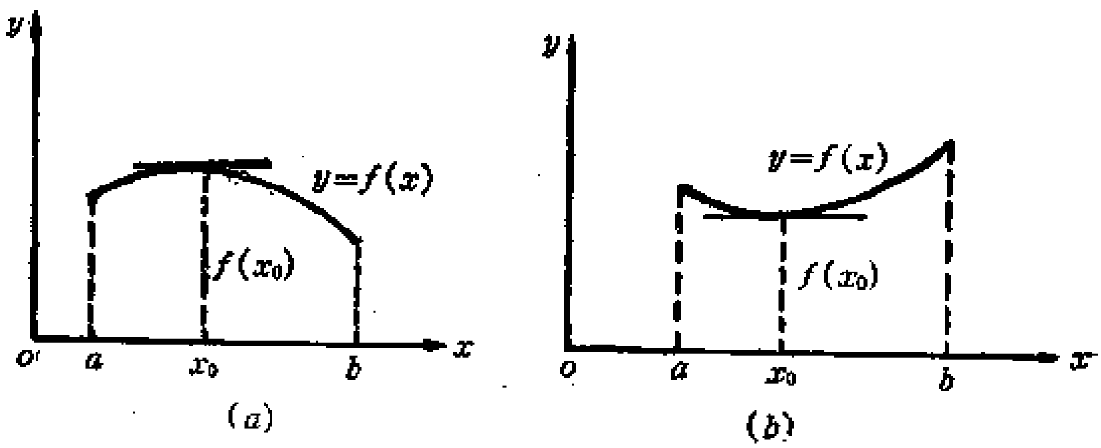


图 2-7

例 6 某地区沙眼的患病率 y 与年龄 t(岁)的函数关系为:

$$y=2.27(e^{-0.050t}-e^{-0.072t})$$

问: (1) 该地区沙眼患病率随年龄的变化趋势怎样? (2) 患病率最高的年龄是多少? 最高患病率是多少?

解 $y'=2.27(-0.050e^{-0.050t}+0.072e^{-0.072t})$

令 $y'=0$，得　$t=16.6$.

(1) 当 $t<16.6$ 时，$y'>0$；当 $t>16.6$ 时，$y'<0$. 由此可知，年龄小于 16.6 岁的少年儿童，沙眼患病率随年龄增大而上升；年龄超过 16.6 岁的青年和成人，沙眼患病率随年龄增大而下降.

(2) $t=16.6$ 时，y 为极大值. 由于它是唯一的极值，所以就是最大值. 当 $t=16.6$（岁）时，

$$y_{\max}=2.27(e^{-0.050\times16.6}-e^{-0.072\times16.6})\approx0.3028$$

即该地区沙眼患病率最高的年龄是 16.6 岁，最高患病率为 30.28%.

四、曲线的凹凸和拐点

研究了函数的增减和极值，可以知道函数图形大致的形态，但还不能比较准确地描绘函数的图形. 例如，图 2-8 表明，两条曲线都是上升的，但曲线却有"凹"、"凸"的不同，所以还得研究曲线的凹凸性及其判别法.

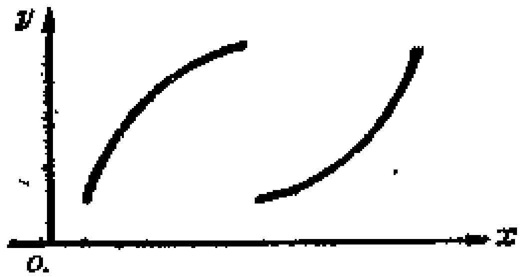


图　2-8

从图 2-9 和图 2-10 可见，曲线的凹凸性，可用曲线与其切线的相对位置来确定. 如果在某区间内曲线位于其切线的上方，则称曲线在该区间内是**凹的**（或称上凹）；如果在某区间内曲线位于其切线的下方，则称曲线在该区间内是**凸的**（或称下凹）.

进一步分析图 2-9 和图 2-10 可以知道，在曲线上凹的区间，随着 x 的增大，曲线 $y=f(x)$ 的切线的斜率在增大，即 $f'(x)$ 是单调增加的，而 $f''(x)>0$，可以保证 $f'(x)$ 单调增加. 这说明，在 $f''(x)>0$ 的区间中，曲线 $y=f(x)$ 是凹的；同理，在 $f''(x)<0$ 的区

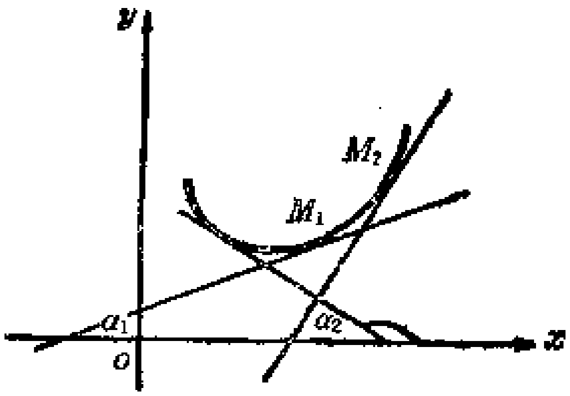


图 2-9

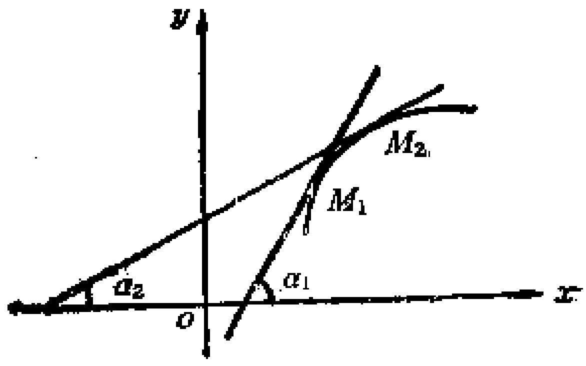


图 2-10

间中，曲线$y=f(x)$是凸（下凹）的．于是有曲线凹凸性的判别法则：

定理 设函数 $y=f(x)$在$[a, b]$上连续，在(a, b)内具有一阶和二阶导数，那么

(1) 如果在(a, b)内，$f''(x)>0$，则 $f(x)$在$[a, b]$上的图形是凹的；

(2) 如果在 (a, b) 内，$f''(x)<0$，则 $f(x)$ 在$[a, b]$上的图形是凸的。

例 7 研究曲线 $y=x^3$ 的凹凸性。

解 $y'=3x^2$，$y''=6x$。

当 $x<0$ 时，$y''<0$，所以曲线在区间$(-\infty, 0)$内是凸的；

当 $x>0$ 时，$y''>0$，所以曲线在区间$(0, +\infty)$内是凹的。

一条连续曲线，如果既有凹弧，又有凸弧，那么凹与凸两部分的分界点称为曲线的**拐点**．拐点是曲线凹凸性发生变化的转折点，由于曲线 $y=f(x)$ 的二阶导数 $f''(x)$ 的符号决定了曲线的凹凸，因此，如果 $f''(x_0)=0$，而且 $f''(x)$在 x_0 的邻近左右两侧异号，那么点$(x_0, f(x_0))$就是曲线 $y=f(x)$的拐点。

综上所述，可按下列步骤求曲线 $y=f(x)$的拐点：

(1) 求 $f''(x)$；

(2) 令 $f''(x)=0$，求出此方程在所讨论区间内的实根；

(3) 对于(2)中求出的每一个实根 x_0，考察$f''(x)$在 x_0 邻近的左、右两侧的符号，如果 $f''(x)$异号，则点$(x_0, f(x_0))$是拐点；如果

$f''(x)$同号，则点$(x_0, f(x_0))$不是拐点。

例 8 求曲线 $y=e^{-x^2}$的凹凸区间和拐点。

解 $y'=-2xe^{-x^2}$, $y''=2(2x^2-1)e^{-x^2}$。

令 $y''=0$，解得 $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$。

y'' 符号的变化如表 2-3 所示。

表 2-3

x	$\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty\right)$
y''	+	0	−	0	+
y	凹	拐点 $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$	凸	拐点 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$	凹

由此可知，曲线$y=e^{-x^2}$在$\left(-\infty, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$和$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$内是凹的；在$\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$内是凸的．点$\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$和点$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$是曲线的拐点。

五、函数图形的描绘

从函数的图形可以直观地看到函数的某些特征和变化规律，无论是对于定性的分析还是对于定量的计算，都很有好处。

对于简单的函数，可用描点法作出它的图形，对于比较复杂的函数，单纯的描点法不仅工作量大，而且还不一定能描出函数的主要特征。现在应用微分学的方法，可以分析函数图形的主要特征：上升、下降、凹、凸、极值和拐点等，在知道了这些主要特征以后，只要描少量的点，便可以比较准确地画出函数的图形，这就是微分学作图法。它的一般步骤如下：

(1) 确定函数$y=f(x)$的定义域、间断点，考察函数的奇偶性

(对称性)、周期性等。

(2) 求 $f'(x)$ 及 $f''(x)$，并解出 $f'(x)=0$ 和 $f''(x)=0$ 在定义域内的全部实根。用这些实根将定义域分成几个"子区间"*；

(3) 确定各"子区间"内 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 的符号，并由此判定曲线的升降、凹凸、极值点和拐点；

(4) 算出以上各特殊点的函数值，并考察函数与坐标轴相交的情况，求出交点坐标；

(5) 将以上讨论结果按自变量由小到大的顺序列表，并由表描点，依次将各点连成曲线。

需指出，研究函数的图形，有时还要考察有无渐近线。曲线的**渐近线**是这样的直线，当点沿着曲线趋于无穷远时，点到该直线的距离趋于零。如果 $x\to+\infty$ (或 $-\infty$)时，$f(x)\to A$，则直线 $y=A$ 是 $f(x)$ 的水平渐近线。

例 9 描绘函数 $y=x^3-6x^2+9x+5$ 的图形。

解 函数的定义域为$(-\infty,\ +\infty)$，且在整个定义域上连续。又

$$f'(x)=3x^3-12x+9=3(x-1)(x-3)$$
$$f''(x)=6x-12=6(x-2)$$

由 $f'(x)=0$，得 $x_1=1$，$x_2=3$。由 $f''(x)=0$，得 $x_3=2$。

表 2-4

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,\ 2)$	2	$(2,\ 3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	−	−	0	+
$f''(x)$	−	−	−	0	+	+	+
$f(x)$	↗	9	↘	7	↘	5	↗
曲线性态	上升，凸	极大值	下降，凸	拐点 $(2,\ 7)$	下降，凹	极小值	上升，凹

*如果函数有间断点或导数不存在的点，这些点也要作为分点。

将点 $x=1, 2, 3$ 由小到大排列，依次把定义域分成四个子区间，考察情况列表，如表 2-4 所示。

当 $x\to+\infty$ 时，$y\to+\infty$；当 $x\to-\infty$ 时，$y\to-\infty$。

根据上述结果，再适当补充一些点，例如

$$f(0)=5,\quad f\left(-\frac{1}{2}\right)=-0.125,$$

就可比较准确地画出函数的图形(图 2-11)。

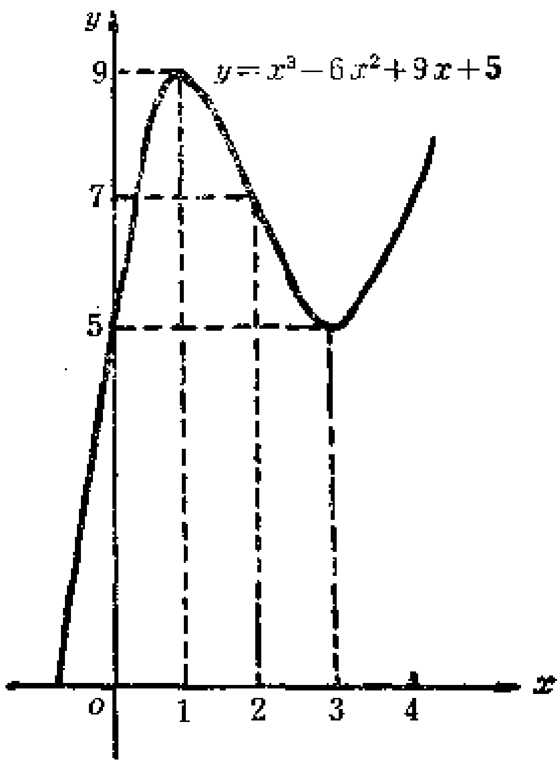


图 2-11

例 10 描绘函数 $y=e^{-x^2}$ 的图形。

解 函数的定义域为$(-\infty, +\infty)$，且在定义域上连续。由于 $f(-x)=f(x)$，故曲线对称于 y 轴，只需在$[0, +\infty)$上讨论该函数的图形。

$$f'(x)=-2xe^{-x^2}$$

$$f''(x)=2(2x^2-1)e^{-x^2}$$

由 $f'(x)=0$，得 $x_1=0$。由 $f''(x)=0$，得 $x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}$。考察情况列表，如表 2-5 所示。

表 2-5

x	0	$\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty\right)$
$f'(x)$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	1	↘	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	↘
曲线性态	极大值	下降，凸	拐点 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$	下降，凹

当 $x\to\infty$ 时，$y\to 0$，因此 $y=0$ 是曲线 $y=e^{-x^2}$ 的水平渐近线。根据以上结果，描点作图(图 2-12)。

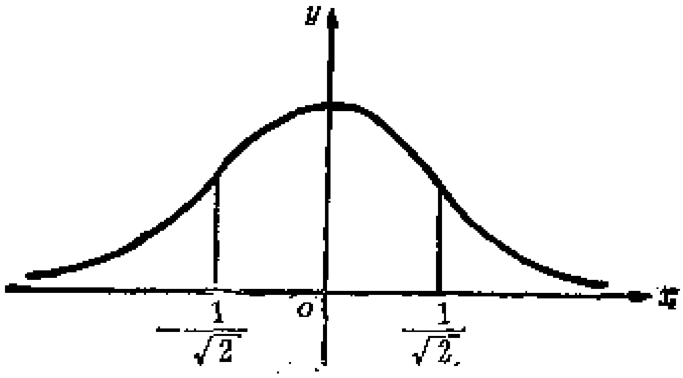


图 2-12

习 题 2-4

1．确定下列函数的单调区间．

(1) $y=\operatorname{arctg}x-x$；　　(2) $y=x^3-6x^2+9x+2$；

(3) $y=2x-\ln x$；　　(4) $y=x-2\sin x$ 在 $[0,2\pi]$ 上．

2．求下列函数的极值：

(1) $y=2x^3-3x^2$；　　(2) $y=x-\ln(1+x)$；

(3) $y=\frac{x}{1+x^2}$；　　*(4) $y=2-(x-1)^{2/3}$．

3．求下列函数的最大值、最小值：

(1) $y=2x^3-3x^2\quad -1\leqslant x\leqslant 4$；

(2) $y=x+\sqrt{1-x}$　　　$-5\leqslant x\leqslant 1$;

(3) $y=\dfrac{6x}{1+x^2}$　　　$x\geqslant 0$。

4. 试问 a 为何值时，函数

$$f(x)=a\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x$$

在 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 处有极值？并求出此极大值(或极小值)。

5. 水中的氢离子浓度和氢氧离子浓度的乘积为 10^{-14}，问应有怎样的氢离子浓度时，氢离子浓度和氢氧离子浓度之和为最小？

6. 设计一密闭的圆柱形容器，容积 V 一定，问底半径和高等于多少时，才能使表面积最小？

7. 从半径为 R 的圆内割去一个扇形，把剩下的部分围成一个圆锥形漏斗，问割去扇形的中心角应为多大时，漏斗的容积为最大？

8. 圆桌面的半径为 a，电灯放在圆桌面中央的上面多高处，才能使桌子边沿上的照度最大？$\left(\right.$照度 $I=k\dfrac{\cos\varphi}{r^2}$，$k$ 为光源强度，φ 为光线的投射角，r 为光源与被照点的距离。$\left.\right)$

9. 求下列函数图形的凹、凸的区间及拐点：

(1) $y=xe^{-x}$;　　　　(2) $y=\ln(1+x^2)$。

10. 描绘下列函数的图形：

(1) $y=x^3-x^2-x+1$;　　　　(2) $y=\ln(1+x^2)$;

(3) $y=\dfrac{x}{1+x^2}$;　　　　(4) $y=xe^{-x}$。

11. 已知口服一定剂量的某药后，血药浓度(C)与时间(t)的关系为：

$$C=40(e^{-0.2t}-e^{-2.3t})$$

求最高血药浓度及达到最高血药浓度所需的时间，并作出 C-t 曲线。

第五节　微　　分

一、微分概念

先分析一个例子：一个边长为 x_0 的正方形，当边长改变了 Δx 时，其面积改变了多少(图 2-13)？

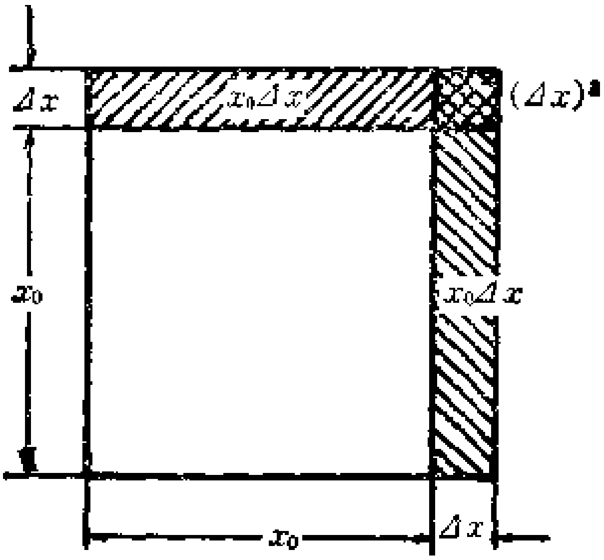


图 2-13

设正方形的边长为 x，其面积 S 是 x 的函数：

$$S = x^2$$

当边长在 x_0 有改变量 Δx 时，相应面积的改变量是

$$\Delta S = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2$$

从上式可见，ΔS 由两部分组成：第一部分 $2x_0\Delta x$ 是 Δx 的线性函数(即图中单线阴影部分的面积)，第二部分是$(\Delta x)^2$(图中双线阴影部分的面积)。当 $\Delta x\to 0$ 时，$(\Delta x)^2$ 是关于 Δx 的高阶无穷小，即

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{(\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \Delta x = 0$$

因此，当边长变化微小时，面积的改变量 ΔS 可近似地用第一部分 $2x_0\Delta x$ 来代替，这一部分正是 $S = x^2$ 在 x_0 点的导数与自变量的增量之乘积，它与函数增量 ΔS 仅相差一个比 Δx 高阶的无穷小。

一般地，设函数 $y = f(x)$在 x_0 点可导，即

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

由极限与无穷小量之间的关系，有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha$$

或
$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha\Delta x \tag{1}$$

其中，当 $\Delta x\to 0$ 时，$\alpha\to 0$。

(1) 式表明，函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可导时，函数的增量 Δy 分成两部分：第一部分 $f'(x_0)\Delta x$ 是 Δx 的线性函数，第二部分 $\alpha\Delta x$ 是关于 Δx 的高阶无穷小。这说明，当 $|\Delta x|$ 很小时，可以近似地用第一部分 $f'(x_0)\Delta x$ 代替 Δy，即 $\Delta y\approx f'(x_0)\Delta x$，其误差是较 Δx 的高阶无穷小。我们称 $f'(x_0)\Delta x$ 为 Δy 的线性主部，它就是函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的微分。

定义 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的导数 $f'(x_0)$ 与自变量的增量 Δx 之积 $f'(x_0)\cdot\Delta x$ 称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的**微分** (differential)，记作 dy 或 $df(x_0)$，即

$$dy=f'(x_0)\Delta x \tag{2}$$

定义中的 Δx 是自变量 x 的增量，它与 x_0 无关。我们规定自变量的微分等于自变量的增量，即

$$dx=\Delta x$$

于是函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的微分可写成：

$$dy=f'(x_0)dx \tag{3}$$

如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 有微分，便称 $f(x)$ 在 x_0 点可微。当 $f(x)$ 在某区间内的每一点 x 都可微时，就说 $f(x)$ 在该区间内可微。这时将(3)式改写为：

$$dy=f'(x)dx \tag{4}$$

由微分定义可知，一个可微函数一定可导，反之亦然。

前面用 $\frac{dy}{dx}$ 表示导数，$\frac{dy}{dx}$ 是作为一个整体记号来用的.引入微分概念后，将(4)式写成 $\frac{dy}{dx}=f'(x)$，函数的导数就是函数微分与自变量微分的商，故导数又称为微商。

下面说明微分的几何意义。

设函数 $y=f(x)$ 的图形如图 2-14 所示。在 $x=x_0$ 时，曲线 $y=f(x)$ 上的点为 $M(x_0, y_0)$，当 x_0 有增量 Δx 时，曲线上相应的点为 $N(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$，$MT$ 为曲线在点 M 的切线，α 为其倾斜角，由图可知：

$$PQ=MQ\cdot\operatorname{tg}\alpha=\Delta x\cdot f'(x_0)$$

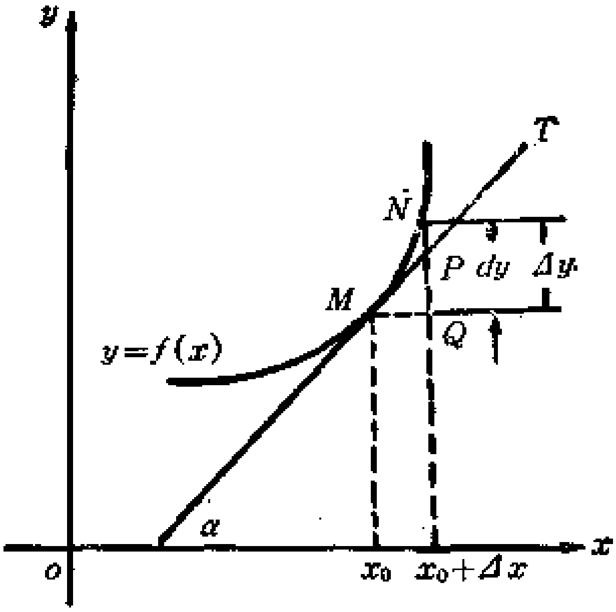


图 2-14

即 $$dy=PQ$$

由此可见，当 Δy 是曲线 $y=f(x)$ 上 M 点纵坐标的增量时，函数的微分 dy 就是曲线在该点切线的纵坐标相应的增量，这就是微分的几何意义。

二、微分的运算法则

从函数的微分表达式 $dy=f'(x)dx$ 可知，求微分 dy，只要求出导数 $f'(x)$，再乘上 dx 即可，所以求微分实质上归结为求导数，故通常把求导数或求微分的方法统称**微分法**。

1. 基本初等函数的微分

由基本初等函数的导数公式，直接得到基本初等函数的微分公式：

1° $d(c)=0$ 2° $d(x^\alpha)=\alpha x^{\alpha-1}dx$

3° $d(a^x)=a^x\ln a\,dx$ 4° $d(e^x)=e^x dx$

5° $d(\log_a x)=\dfrac{dx}{x\ln a}$ 6° $d(\ln x)=\dfrac{dx}{x}$

7° $d(\sin x)=\cos x\,dx$ 8° $d(\cos x)=-\sin x\,dx$

9° $d(\operatorname{tg} x)=\sec^2 x\,dx$ 10° $d(\operatorname{ctg} x)=-\csc^2 x\,dx$

11° $d(\sec x)=\sec x \operatorname{tg} x dx$　　12° $d(\csc x)=-\csc x \cdot \operatorname{ctg} x dx$

13° $d(\arcsin x)=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

14° $d(\arccos x)=-\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

15° $d(\operatorname{arctg} x)=\dfrac{dx}{1+x^2}$　　16° $d(\operatorname{arcctg} x)=-\dfrac{dx}{1+x^2}$

2. 微分的四则运算法则

由导数的四则运算法则，可推得相应的微分法则。

$$d(u\pm v)=du\pm dv$$

$$d(u\cdot v)=v\,du+u\,dv$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\,du-u\,dv}{v^2}\quad(v\neq 0)$$

3. 复合函数的微分

与复合函数的求导法则相对应的是复合函数的微分法则.

设 $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$, 则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$的微分为：

$$dy=y'_x dx=f'(u)\varphi'(x)dx \tag{5}$$

由于

$$du=\varphi'(x)dx$$

所以(5)式也可以写成：

$$dy=f'(u)du \tag{6}$$

由此可见，对函数 $y=f(u)$来说，不论 u是自变量，还是中间变量，其微分的形式都是 $dy=f'(u)du$。这就是一阶微分形式不变性。

例1 求函数 $y=x^2$ 当 x 由 1 改变为 1.01 时的微分和增量。

解 函数的微分为：

$$dy=(x^2)'dx=2x\,dx$$

当 $x=1$, $dx=1.01-1=0.01$ 时，函数的微分为：

$$dy=2\times1\times0.01=0.02$$

函数的增量为：

$$\Delta y=(1.01)^2-1^2=0.0201$$

例2 设 $y=e^{ax+bx^2}$，求 dy。

解 方法1：由定义

$$dy=(e^{ax+bx^2})'dx$$
$$=e^{ax+bx^2}(ax+bx^2)'dx$$
$$=(a+2bx)e^{ax+bx^2}dx$$

方法2：由微分形式不变性

$$dy=e^{ax+bx^2}d(ax+bx^2)$$
$$=e^{ax+bx^2}(ax+bx^2)'dx$$
$$=(a+2bx)e^{ax+bx^2}dx$$

例3 设 $y=e^{kx}\ln x$，求 dy。

解 $dy=d(e^{kx}\ln x)$

$$=\ln x d(e^{kx})+e^{kx}d(\ln x)$$
$$=\ln x\cdot ke^{kx}dx+e^{kx}\frac{1}{x}dx$$
$$=e^{kx}\left(k\ln x+\frac{1}{x}\right)dx$$

三、微分的应用

根据微分的概念，只要 $|\Delta x|$ 足够小，就可以用函数的微分 dy 近似地替代函数的增量 Δy，即 $\Delta y\approx dy$。据此可进行近似计算和误差估计。

1. 近似计算

在 $|\Delta x|$ 很小时，$\Delta y\approx dy$。即

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x \tag{7}$$

或

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x \tag{8}$$

在(8)式中，令 $x=x_0+\Delta x$，即 $\Delta x=x-x_0$，则有

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0) \tag{9}$$

利用(7)式可近似地计算函数的增量，利用(8)或(9)式可近似计算函数在某一特定点附近的函数值。

例4 在一直径为10cm的金属球表面上镀铜，铜的厚度为0.005cm，问约需用铜多少g？(铜的密度为8.9g/cm³)

解 半径为 R 的球的体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$，从而 $V'=4\pi R^2$。所求铜的体积为：

$$\Delta V\approx dV=V'\cdot\Delta R=4\pi R^2\cdot\Delta R$$

将 $R=5$，$\Delta R=0.005$ 代入，得

$$\Delta V\approx 4\pi\times 5^2\times 0.005=0.5\pi$$

约需铜

$$0.5\pi\times 8.9\approx 13.98(\text{g})$$

下面推导一些常用的近似公式。为此，在(9)式中取 $x_0=0$，有

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)x \tag{10}$$

应用(10)式，当 $|x|$ 较小时，可推得：

$$\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\frac{1}{n}x$$

$$\sin x\approx x$$

$$\operatorname{tg}x\approx x$$

$$e^x\approx 1+x$$

$$\ln(1+x)\approx x$$

这里，只推导 $\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\frac{1}{n}x$. 设 $f(x)=\sqrt[n]{1+x}$，那末 $f(0)=1$，$f'(0)=\frac{1}{n}(1+x)^{\frac{1}{n}-1}\Big|_{x=0}=\frac{1}{n}$，代入(10)式，便得

$$\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\frac{1}{n}x$$

例 5 计算 $\sqrt[5]{0.98}$ 的近似值.

解 $\sqrt[5]{0.98}=\sqrt[5]{1-0.02}$，利用上式，令 $x=-0.02$，得

$$\sqrt[5]{0.98}\approx 1+\frac{1}{5}(-0.02)=0.996$$

2. 误差估计

如果某量的准确值为 A，它的近似值为 a，则 $|A-a|$ 称为 a 的绝对误差；$\left|\frac{A-a}{a}\right|$ 称为**相对误差**.

例如某厂生产的维生素 B_6 片，标示量要求为 10mg/片，抽取

一片称得重为10.05 mg，则绝对误差为 $|10-10.05|=0.05(\mathrm{mg})$；相对误差为

$$\left|\frac{0.05}{10.05}\right|\approx 0.005=0.5\%.$$

我们利用微分来估计误差。

对于函数 $y=f(x)$，如果由 x 计算 y，在测量 x 时，由于有误差 Δx，实际测得的只是 x 的近似值 x_0，则由测定值算出的函数值 $f(x_0)$ 有相应的误差 Δy。由于 $\Delta y\approx dy$，故 y 的绝对误差为：

$$|\Delta y|\approx|dy|=|f'(x_0)\Delta x|$$

y 的相对误差为：

$$\left|\frac{\Delta y}{y}\right|\approx\left|\frac{f'(x_0)\Delta x}{f(x_0)}\right|$$

例 7 测得圆的半径为 25mm，它的绝对误差是 0.04mm。求该圆面积的绝对误差和相对误差。

解 圆面积 $S=\pi R^2$，$S'=2\pi R$。

当 $R=25$，$\Delta R=0.04$ 时，S 的绝对误差为：

$$|\Delta S|\approx|2\pi R\cdot\Delta R|=2\pi\times 25\times 0.04=2\pi\approx 6.28(\mathrm{mm}^2)$$

S 的相对误差为：

$$\left|\frac{\Delta S}{S}\right|\approx\left|\frac{2\pi R\cdot\Delta R}{\pi R^2}\right|=\frac{2\times 0.04}{25}=0.32\%$$

习 题 2-5

1．已知 $y=x^3-x$，计算在 $x=2$ 处，当 Δx 分别等于 1，0.1，0.01 时的 Δy 和 dy。

2．求下列函数的微分：

(1) $y=\dfrac{x}{1-x^2}$；　　(2) $y=\sin^2(3x+1)$；

(3) $y=x^2e^{2x}$；　　(4) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$。

3．将适当的函数填入下列括号内，使等式成立：

(1) $d(\qquad)=2dx$；　　(2) $d(\qquad)=\dfrac{1}{1+x}dx$；

(3) $d(\qquad)=\sin 2x\,dx$；　　(4) $d(\qquad)=e^{-2x}dx$；

(5) $d(\qquad)=\frac{1}{\sqrt{x}}dx$；　　(6) $d(\qquad)=\frac{1}{x^2}dx$。

4．当 $|x|$ 较小时，推导下列近似公式：

(1) $\mathrm{tg}x\approx x$；　　(2) $\ln(1+x)\approx x$。

5．利用微分计算下列各式的近似值：

(1) $\sqrt[3]{996}$；　　(2) $\mathrm{arctg}1.02$；

(3) $\cos 59°$；　　(4) $e^{1.01}$。

6．测得球的直径为 3 ± 0.01m，求：

(1) 球体积的绝对误差和相对误差；

(2) 球表面积的绝对误差和相对误差.

*7．一块肌肉逆作用力方向而收缩，当力增加时，肌肉的收缩速度就减慢，Hill 用下式描述：

$$(F+a)(v+b)=c$$

其中 a、b、c 为常数，求力 F 发生一个微小变化 ΔF 时，对肌肉收缩速度 v 有多大影响？

*8．一凸透镜如图 2-15 所示，半径为 R，口径为 $2H$，厚度为 δ，$H\ll R$。

(1) 求证：$\delta\approx\frac{H^2}{2R}$；

(2) 设 $2H=50$mm，$R=100$mm，求 δ 的近似值。

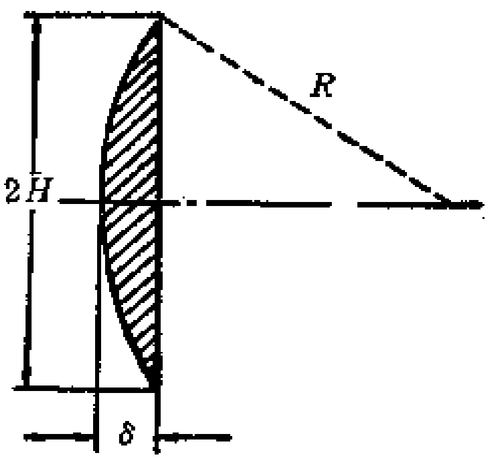


图　2-15

第三章　不定积分

求已知函数的导数或微分，是微分学研究的基本问题。本章中将研究与此相反的问题，即已知某函数的导数或微分，要求出该函数，这就是不定积分。

第一节　不定积分的概念和性质

一、不定积分的概念

定义　设 $f(x)$ 是定义在某区间内的函数，如果存在函数 $F(x)$，使得在该区间内的任何一点都有

$$F'(x)=f(x) \quad 或 \quad dF(x)=f(x)dx$$

则在该区间内称函数 $F(x)$ 为函数 $f(x)$ 的**原函数**。

例如，x^3 是 $3x^2$ 的原函数；$\sin x$ 是 $\cos x$ 的原函数；$\ln x$ 是 $\frac{1}{x}$ 的原函数。

显然，x^3 并不是函数 $3x^2$ 唯一的原函数，由于 $(x^3+1)'=3x^2$，$(x^3-2)'=3x^2$，所以 x^3+1、x^3-2 也是 $3x^2$ 的原函数。事实上，x^3+c 都是 $3x^2$ 的原函数，其中 c 为任意常数。

一般地，如果函数 $f(x)$ 存在一个原函数 $F(x)$，即 $F'(x)=f(x)$，那么 $F(x)+c$ 也是 $f(x)$ 的原函数，c 为任意常数。而且除了形如 $F(x)+c$ 的函数外，$f(x)$ 也不会有其它的原函数了。因为假如 $\Phi(x)$ 也是 $f(x)$ 的一个原函数，即 $\Phi'(x)=f(x)$，由于已知 $F'(x)=f(x)$，所以 $[\Phi(x)-F(x)]'=\Phi'(x)-F'(x)=0$。由拉格朗日中值定理的推论有 $\Phi(x)-F(x)=c$（这里，c 为某个常数），即 $\Phi(x)=F(x)+c$。这就表明，如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则

$F(x)+c$ 就包含了 $f(x)$ 的所有原函数，其中 c 为任意常数。

定义 函数 $f(x)$ 的原函数的全体称为 $f(x)$ 的**不定积分**（indefinite integral），记为 $\int f(x)\,dx$。其中 $f(x)$ 称为**被积函数**，$f(x)dx$ 称为**被积式**，x 称为**积分变量**，$\int$ 是积分号。

由上可知，对于被积函数 $f(x)$，只要找到它的一个原函数 $F(x)$，它的不定积分就是：

$$\int f(x)dx=F(x)+c$$

其中任意常数 c 称为积分常数。不定积分是一函数簇。

例如：

$$\int 3x^2dx=x^3+c$$

$$\int \cos x\,dx=\sin x+c$$

求已知函数的原函数的方法称为**不定积分法**，简称**积分法**。显然，积分法是微分法的逆运算。

例 1 设一条曲线通过点 $A(1,2)$，且其上任一点 (x,y) 处的切线斜率为 $2x$，求此曲线的方程。

解 设所求曲线方程为 $y=F(x)$，由题意知

$$F'(x)=2x,$$

即 $F(x)$ 是 $2x$ 的一个原函数，$2x$ 的原函数全体为：

$$\int 2x\,dx=x^2+c$$

所求曲线是 $y=x^2+c$ 中的一条，由于所求曲过点 $A(1,2)$，故将 $x=1$，$y=2$ 代入，得

$$2=1+c,\quad c=1.$$

于是所求曲线方程为：

$$y=x^2+1$$

现在来考察 $y=x^2+c$ 的几何意义，曲线 $y=x^2+c$ 的图形是

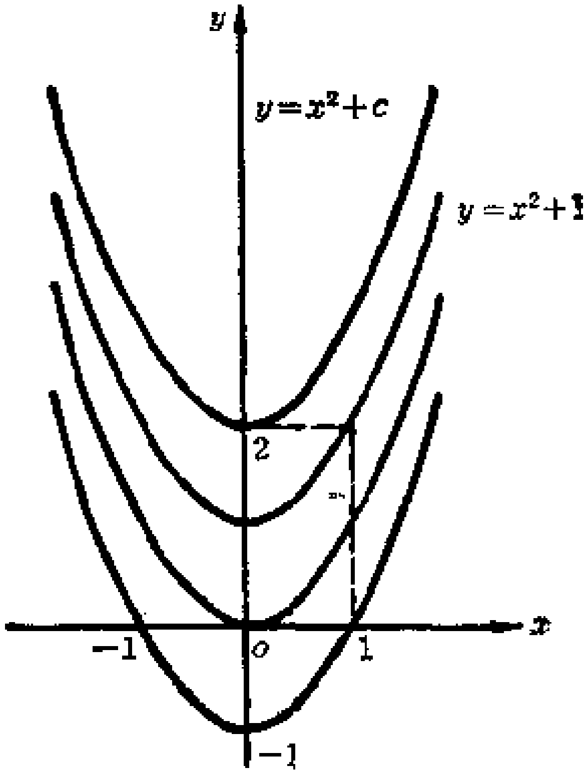


图 3-1

一般地，$\int f(x)dx=F(x)+c$ 是一簇函数，$y=F(x)+c$ 在几何上表示一簇曲线，称为**积分曲线簇**，该曲线簇中各曲线在横坐标 x 相同的各点的切线是相互平行的，其斜率等于被积函数 $f(x)$ 在该点的函数值。

二、基本积分公式

既然积分法是微分法的逆运算，故可从导数的基本公式得到相应的基本积分公式。

例如，因为$\left(\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right)'=x^{\alpha}$，所以$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$是 x^{α} 的一个原函数，故有

$$\int x^{\alpha}dx=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+c \quad (\alpha\neq-1)$$

类似地可以得到其它积分公式，下面列出常用的基本积分公式，通常称之为基本积分表。

1° $\int kdx = kx + c$ （k 为常数），

2° $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + c$ $(\alpha \neq -1)$，

3° $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + c$，

4° $\int a^{x}dx = \dfrac{1}{\ln a}a^{x} + c$，

5° $\int e^{x}dx = e^{x} + c$，

6° $\int \cos x\,dx = \sin x + c$，

7° $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$，

8° $\int \dfrac{dx}{\cos^{2}x}dx = \mathrm{tg}\,x + c$，

9° $\int \dfrac{dx}{\sin^{2}x}dx = -\mathrm{ctg}x + c$，

10° $\int \dfrac{dx}{1+x^{2}}dx = \mathrm{arc\,tg}\,x + c$，

11° $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}}dx = \arcsin x + c$.

这 11 个基本公式，是求不定积分的基础，必须熟记。

对公式 3° 作如下说明：当 $x>0$ 时，有 $\int \dfrac{1}{x}dx = \ln x + c$；当 $x<0$ 时，有 $\int \dfrac{1}{x}dx = \ln(-x) + c$。因此，不论 $x>0$ 或 $x<0$，有公式 3° 成立。

三、不定积分的性质

由不定积分的定义可直接得到不定积分的性质：

性质 1 不定积分的导数等于被积函数，即

$$\left[\int f(x)dx\right]' = f(x) \tag{1}$$

性质 2 不定积分的微分等于被积式，即

$$d\int f(x)dx=f(x)dx \tag{2}$$

性质 3 一个函数微分的不定积分与该函数仅相差一个常数。

$$\int df(x)=f(x)+c \tag{3}$$

或
$$\int f'(x)dx=f(x)+c$$

(2)式与(3)式表明，微分号与积分号连写在一起时，如果不计任意常数 c，不论其先后次序如何，恰好相互抵消。这正说明微分与积分之间是互为逆运算。

性质 4 常数因子可由积分号内提出，即

$$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx \quad (k\text{ 为不等于零的常数}) \tag{4}$$

证 由性质 1，有 $\left[\int k\,f(x)dx\right]'=k\,f(x)$，同时又有

$$\left[k\int f(x)dx\right]'=k\left[\int f(x)dx\right]'=kf(x)$$

(4)式左右两端导数相等，故两端最多只相差一个常数，但此常数不必写出，因为它可被认为已包含在两边的不定积分中，故(4)式成立。

性质 5 有限个函数的代数和的不定积分等于各个函数的不定积分的代数和，即

$$\int (u+v-w)\,dx=\int u\,dx+\int v\,dx-\int w\,dx \tag{5}$$

式中 u, v, w 均为 x 的函数。

证明方法与性质 4 同。

下面利用不定积分的性质和基本积分公式求一些简单的不定积分。

例 2 求 $\int\left(x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$。

解 $\int\left(x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$

$$=\int x dx+\int x^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{1+1}x^{1+1}+\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1}+c$$

$$=\frac{1}{2}x^2+2x^{\frac{1}{2}}+c$$

例 3 求 $\int(2x^3-3\sin x+5x\sqrt{x})dx$。

解 $\int(2x^3-3\sin x+5x\sqrt{x})dx$

$$=2\int x^3dx-3\int\sin x dx+5\int x\sqrt{x}dx$$

$$=\frac{1}{2}x^4+3\cos x+2x^{\frac{5}{2}}+c$$

例 4 求 $\int\frac{(x-1)^2}{x^3}dx$。

解 $\int\frac{(x-1)^2}{x^3}dx$

$$=\int\frac{dx}{x}-2\int\frac{dx}{x^2}+\int\frac{dx}{x^3}$$

$$=\ln|x|+\frac{2}{x}-\frac{1}{2x^2}+c$$

例 5 求 $\int\cos^2\frac{t}{2}dt$。

解 $\int\cos^2\frac{t}{2}dt$

$$=\int\frac{1+\cos t}{2}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int(1+\cos t)dt$$

$$=\frac{1}{2}(t+\sin t)+c$$

例 6 求 $\int\frac{1-x^2}{1+x^2}dx$。

解 $\int \frac{1-x^2}{1+x^2}dx$

$$=\int \frac{2-(1+x^2)}{1+x^2}dx$$

$$=\int \frac{2}{1+x^2}dx-\int dx$$

$$=2\operatorname{arctg}x-x+c$$

习 题 3-1

1．求下列不定积分：

(1) $\int (x^2-3x+2)dx$；　(2) $\int (x-3)^2dx$；

(3) $\int \sqrt{x}(x-3)dx$；　(4) $\int \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}dx$；

(5) $\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$；　(6) $\int \frac{x^4+x^2+2}{x^2+1}dx$；

(7) $\int (2^x+x^2)dx$；　(8) $\int 3^xe^xdx$；

(9) $\int \left(2e^x+\frac{3}{x}\right)dx$；　(10) $\int e^x\left(1-\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\right)dx$；

(11) $\int \left(\sin x+\cos\frac{\pi}{3}\right)dx$；　(12) $\int \sin^2\frac{x}{2}dx$；

(13) $\int \frac{dx}{1+\cos 2x}$；　(14) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}dx$；

(15) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx$；　(16) $\int (\operatorname{tg}^2x-1)dx$；

(17) $\int \operatorname{ctg}^2 xdx$；　(18) $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$；

(19) $\int \left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}+\frac{1}{4x^3}\right)dx$；　(20) $\int \frac{dx}{x(1+x)}$．

2．一曲线通过点(2,0)，且在任一点处的切线的斜率等于该点的横坐标，求此曲线的方程。

3．设在某一区间上，$F(x)$和$\Phi(x)$都是$f(x)$的原函数，试证：对该区间上的任意两点a、b，恒有

$$F(b)-F(a)=\Phi(b)-\Phi(a)$$

4．试证：若 $\int f(u)\,du=F(u)+c$，则

$$\int f(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+c$$

其中 a、b 为常数，且 $a\neq0$。

第二节 换元积分法

许多不定积分仅利用基本积分公式及不定积分的性质是无法求得的。此时常将积分变量作适当的变换，使被积式化成与某一基本积分公式相同的形式，从而求出其积分，这种方法称为**换元积分法**，简称**换元法**。

一、第一类换元法

例 1 求 $\int\cos 2x\,dx$。

解 这个积分在基本积分公式中找不到，只有类似的公式

$$\int\cos x\,dx=\sin x+c$$

但是，不能由此得出

$$\int\cos 2x\,dx=\sin 2x+c$$

因为

$$(\sin 2x)'=2\cos 2x\neq\cos 2x$$

然而用变量代换的方法，可以把所求的积分化成 $\int\cos x\,dx$ 的形式。

设 $u=2x$，那么 $du=2dx$，于是

$$\int\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}\int\cos u\,du=\frac{1}{2}\sin u+c$$

因为原来的积分变量是 x，所以最后要将 $u=2x$ 代回，得

$$\int\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}\sin 2x+c$$

例 2 求 $\int \frac{2dx}{3-x}$.

解 仿照上例的做法，设 $u=3-x$，则 $du=-dx$，于是

$$\int \frac{2dx}{3-x} = -2\int \frac{du}{u} = -2\ln|u|+c$$

代回原来的积分变量，得

$$\int \frac{2dx}{3-x} = -2\ln|3-x|+c$$

例 3 求 $\int 2xe^{x^2}dx$.

解 设 $u=x^2$，则 $du=2x\,dx$，于是

$$\int 2xe^{x^2}dx = \int e^u du = e^u+c$$

代回原变量，得

$$\int 2xe^{x^2}dx = e^{x^2}+c$$

例 4 求 $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

解 设 $u=1-x^2$，则 $du=-2x\,dx$，即 $x\,dx=-\frac{1}{2}du$，于是

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{2}\cdot\int u^{-\frac{1}{2}}du$$

$$= -u^{\frac{1}{2}}+c$$

代回原变量，得

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\sqrt{1-x^2}+c$$

例 5 求 $\int \operatorname{tg} x\,dx$.

解 $\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx$

设 $u=\cos x$，则 $du=-\sin x\,dx$，于是

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = -\int \frac{du}{u} = -\ln|u|+c$$

$$= -\ln|\cos x|+c$$

类似地可得

$$\int \operatorname{ctg} x\, dx = \ln|\sin x| + c$$

以上积分中所用的方法就是换元积分法。它是当所求积分无法直接求出时，引入一个新的积分变量 u，令 $u=\varphi(x)$，把积分变量 x 转化为 u，使得换元后的积分可以用基本积分公式(或其它的已知积分)求出，最后再把 u 用 $\varphi(x)$ 代回，就得到所需的结果。应用换元法的关键在于选择一个适当的函数 $\varphi(x)$ 作为新的积分变量 u，当 $u=\varphi(x)$ 时，在被积函数中要有一个因子 $\varphi'(x)$，使 $\varphi'(x)$ 与 dx 就凑成了 $d\varphi(x)$，即 $\varphi'(x)dx=d\varphi(x)$，或 $\varphi'(x)dx=du$，故此换元法又称为**凑微分法**，其步骤可表示为：

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &\xlongequal{\text{凑微分}} \int g[\varphi(x)]\varphi'(x)dx \\ &\xlongequal{u=\varphi(x)} \int g(u)du \\ &= G(u)+c \\ &= G[\varphi(x)]+c\end{aligned}$$

在比较熟练以后，中间变量 u 就不一定写出来。

例 6 求 $\int \cos^2 x\, dx$。

解 $\int \cos^2 x\, dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}dx = \int \frac{1}{2}dx$

$$+\frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\int \cos 2x\, d(2x)$$

$$=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+c$$

类似地可得

$$\int \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+c$$

例 7 求 $\int \sin^2 x\cos^3 x\, dx$。

解 $\int \sin^2 x\cos^3 x dx = \int \sin^2 x(1-\sin^2 x)\cos x\, dx$

$$=\int(\sin^2 x-\sin^4 x)d\sin x$$

$$=\int\sin^2 x\,d\sin x-\int\sin^4 x\,d\sin x$$

$$=\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{1}{5}\sin^5 x+c$$

例 8 求 $\int\frac{dx}{x(1+2\ln x)}$.

解 设 $u=1+2\ln x$, 则 $du=\frac{2}{x}dx$, 即 $\frac{1}{x}dx=\frac{1}{2}du$, 于是

$$\int\frac{dx}{x(1+2\ln x)}=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u}=\frac{1}{2}\ln|1+2\ln x|+c$$

或
$$\int\frac{dx}{x(1+2\ln x)}=\int\frac{d\ln x}{1+2\ln x}=\frac{1}{2}\int\frac{d(1+2\ln x)}{1+2\ln x}$$

$$=\frac{1}{2}\ln|1+2\ln x|+c$$

例 9 求 $\int\frac{1}{a^2+x^2}dx$.

解 $\int\frac{dx}{a^2+x^2}$

$$=\int\frac{1}{a^2}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}dx$$

$$=\frac{1}{a}\int\frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+c$$

例 10 求 $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ $(a>0)$.

解 $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$$=\int \frac{1}{a}\frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=\int\frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}$$

$$=\arcsin\frac{x}{a}+c$$

例 11 求$\int\frac{dx}{x^2-a^2}$.

解 $\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\int\frac{dx}{(x-a)(x+a)}=\frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)dx$

$$=\frac{1}{2a}\left[\int\frac{d(x-a)}{x-a}-\int\frac{d(x+a)}{x+a}\right]$$

$$=\frac{1}{2a}[\ln|x-a|-\ln|x+a|]+c$$

$$=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+c$$

由此可知：

$$\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right|+c$$

例 12 求$\int\frac{dx}{x^2+2x+3}$.

解 $\int\frac{dx}{x^2+2x+3}=\int\frac{dx}{(x+1)^2+2}=\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+(\sqrt{2})^2}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+c$$

例 13 求$\int\frac{dx}{\sqrt{2+4x-4x^2}}$.

解 $\int\frac{dx}{\sqrt{2+4x-4x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{3-(2x-1)^2}}$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(2x-1)}{\sqrt{3-(2x-1)^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+c$$

例 14 求$\int\sec x\,dx$.

解 $\int \sec x dx=\int \frac{dx}{\cos x}=\int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx$

$$=\int \frac{d\sin x}{1-\sin^2 x}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+c$$

因为 $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|=\frac{1}{2}\ln\frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x}$

$$=\ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right|$$

$$=\ln|\sec x+\operatorname{tg} x|$$

所以上述积分又可表示为：

$$\int \sec x dx=\ln|\sec x+\operatorname{tg} x|+c$$

例 15 求$\int \csc x dx$。

解 $\int \csc x\, dx=\int \frac{dx}{\sin x}=\int -\frac{dx}{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}$

$$=-\int \frac{d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$=-\ln\left|\sec\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|+c$$

$$=-\ln\left|\frac{1+\cos x}{\sin x}\right|+c$$

$$=-\ln\left|\frac{\sin x}{1-\cos x}\right|+c$$

$$=\ln|\csc x-\operatorname{ctg} x|+c$$

从上述例子中，读者可以发现常见的凑微分类型是：

$$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b);$$

$$\int xf(x^2)dx=\frac{1}{2}\int f(x^2)d(x^2);$$

$$\int \frac{f(\ln x)}{x}dx=\int f(\ln x)d\ln x;$$

$$\int e^x f(e^x)dx=\int f(e^x)de^x;$$

$$\int f(\sin x)\cos x\,dx=\int f(\sin x)d\sin x;$$

$$\int f(\cos x)\sin x\,dx=-\int f(\cos x)d\cos x.$$

二、第二类换元法

第一类换元法是通过变量代换：$u=\varphi(x)$，将积分$\int g[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$化为积分$\int f(u)du$进行计算，第二类换元法是通过变量代换$x=\psi(t)$，把积分$\int f(x)dx$转化为一个易于计算的积分$\int f[\psi(t)]\psi'(t)dt$.

例 16 求$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

解 求这个积分的困难在于有根式$\sqrt{a^2-x^2}$，可用换元来化去根式.

令 $x=a\sin t$，则$dx=a\cos t\,dt$，于是

$$\begin{aligned}\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx&=\int\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\;a\cos t\,dt\\&=a^2\int\cos^2 t\,dt\\&=a^2\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t\right)+c\\&=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{2}\sin t\cos t+c\end{aligned}$$

为了换成原变量x的函数，根据替换$x=a\sin t$作辅助三角形（图 3-2），于是有

$$\sin t=\frac{x}{a},\ \cos t=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}.$$

因此，

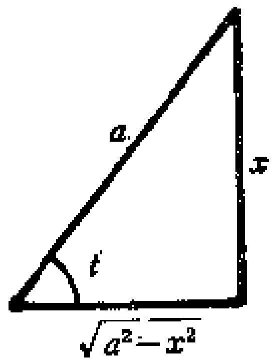


图 3-2

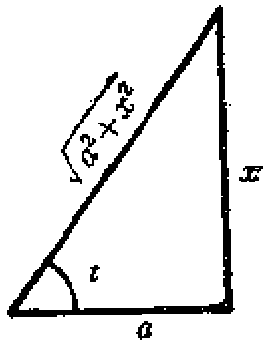


图 3-3

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+c.$$

例 17 求 $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$。

解 类似上例，利用三角公式

$$1+\operatorname{tg}^2 t=\sec^2 t$$

来化去根式。

令 $x=a\operatorname{tg}t$，则 $dx=a\sec^2 t\,dt$，于是

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\int\frac{a\sec^2 t}{a\sec t}dt=\int\sec t\,dt$$
$$=\ln|\sec t+\operatorname{tg}t|+c$$

根据替换 $\operatorname{tg}t=\frac{x}{a}$ 作辅助三角形（图 3-3），于是有

$$\sec t=\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}$$

因此，

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right|+c_1$$
$$=\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+c$$

其中 $c=c_1-\ln a$.

例 18 求 $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$。

解 令 $x=a\sec t$，则 $dx=a\sec t\operatorname{tg}t\,dt$，于是

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{a\sec t\,\mathrm{tg}\,t}{a\,\mathrm{tg}\,t}dt = \int \sec t\,dt$$

$$= \ln|\sec t + \mathrm{tg}\,t| + c$$

根据 $\sec t = \dfrac{x}{a}$ 作辅助三角形(图 3-4)，于是有

$$\mathrm{tg}\,t = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}$$

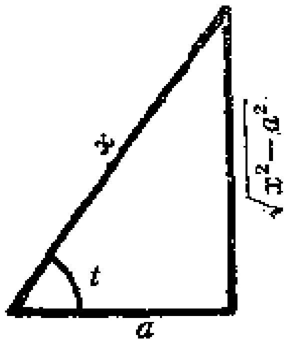


图 3-4

因此，

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right| + c_1$$

$$= \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + c$$

其中 $c = c_1 - \ln a$。

从以上三例可见，如果被积函数含有 $\sqrt{a^2-x^2}$，$\sqrt{x^2+a^2}$ 或 $\sqrt{x^2-a^2}$，则可分别作代换 $x = a\sin t$，$x = a\,\mathrm{tg}\,t$ 或 $x = a\sec t$ 化去根式。但具体解题时，不应拘泥于上述的变量代换，还应视被积函数的具体情况，尽可能运用简捷方法进行积分。

例 19 求 $\displaystyle\int \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2x+3}}dx$。

解 由于被积函数的分母在根号内是二次式，分子是一次式，而二次式的导数是一次式：$(x^2+2x+3)' = 2x+2$，所以可以把被积函数拆成两部分：

$$\frac{x-2}{\sqrt{x^2+2x+3}} = \frac{\frac{1}{2}(2x+2)}{\sqrt{x^2+2x+3}} - \frac{3}{\sqrt{x^2+2x+3}}$$

于是有

$$\int \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2x+3}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+3}}dx - 3\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+2x+3)}{\sqrt{x^2+2x+3}} - 3\int \frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+2}}$$

$$= \sqrt{x^2+2x+3} - 3\ln|x+1$$

$$+\sqrt{x^2+2x+3}\,|+c$$

例20 求$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-2x-3x^2}}$.

解 令$x=\frac{1}{t}$，则$dx=-\frac{1}{t^2}dt$，于是

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-2x-3x^2}}=\int \frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{1-\frac{2}{t}-\frac{3}{t^2}}}$$

$$=-\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-2t-3}}$$

$$=-\int \frac{dt}{\sqrt{(t-1)^2-4}}$$

$$=-\int \frac{d(t-1)}{\sqrt{(t-1)^2-4}}$$

$$=-\ln|t-1+\sqrt{t^2-2t-3}|+c$$

$$=-\ln\left|\frac{1}{x}-1+\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}-3}\right|+c$$

$$=\ln\left|\frac{x}{1-x+\sqrt{1-2x-3x^2}}\right|+c$$

此例中的代换$x=\frac{1}{t}$称为**倒代换**，利用它常可消去在被积函数的分母中的变量因子x。

例21 求$\int \frac{x^3}{(1+x^2)^{3/2}}dx$.

解 方法1：令$u=\sqrt{1+x^2}$，即$u^2=1+x^2$，于是$xdx=udu$，因而有

$$\int \frac{x^3}{(1+x^2)^{3/2}}dx=\int \frac{(u^2-1)udu}{u^3}=\int \left(1-\frac{1}{u^2}\right)du$$

$$=u+\frac{1}{u}+c=\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+c$$

$$=\frac{2+x^2}{\sqrt{1+x^2}}+c$$

方法2：令 $x=\operatorname{tg}t$，则 $dx=\sec^2 t\,dt$，于是有

$$\int\frac{x^3}{(1+x^2)^{3/2}}dx=\int\frac{\operatorname{tg}^3 t\sec^2 t}{\sec^3 t}dt=\int\frac{\sin^3 t}{\cos^2 t}dt$$

$$=\int\frac{\cos^2 t-1}{\cos^2 t}d\cos t=\cos t+\frac{1}{\cos t}+c$$

$$=\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+c$$

$$=\frac{2+x^2}{\sqrt{1+x^2}}+c$$

例22 求 $\int\frac{x+1}{\sqrt[3]{3x-1}}dx$。

解 由于被积函数分母的根号内是一次式，此时

令 $u=\sqrt[3]{3x-1}$，即 $x=\frac{1}{3}(u^3+1)$，则 $dx=u^2du$，于是

$$\int\frac{x+1}{\sqrt[3]{3x-1}}dx=\int\frac{\frac{1}{3}(u^3+1)+1}{u}u^2\,du$$

$$=\frac{1}{3}\int(u^4+4u)du=\frac{1}{15}u^5+\frac{2}{3}u^2+c$$

$$=\frac{1}{15}u^2(u^3+10)+c$$

$$=\frac{1}{15}(3x-1)^{2/3}(3x+9)+c$$

$$=\frac{1}{5}(3x-1)^{2/3}(x+3)+c$$

在本节例题中，有几个积分是以后经常会遇到的，通常地当作公式使用。这样，常用的积分公式，除了基本积分公式外，还有以下几个：

12° $\int\operatorname{tg}x\,dx=-\ln|\cos x|+c$，

13° $\int\operatorname{ctg}x\,dx=\ln|\sin x|+c$，

$14°\ \int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + c,$

$15°\ \int \csc x\,dx = \ln|\csc x - \operatorname{ctg} x| + c,$

$16°\ \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} + c,$

$17°\ \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c,$

$18°\ \int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + c,$

$19°\ \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c,$

$20°\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}| + c.$

习 题 3-2

1．在下列各式括号内填上系数，使等式成立：

(1) $dx = (\quad)\,d(1-x)$；　(2) $dx = (\quad)\,d(2x)$；

(3) $xdx = (\quad)\,d(x^2)$；　(4) $xdx = (\quad)\,d(2-3x^2)$；

(5) $e^{2x}dx = (\quad)\,d(e^{2x})$；　(6) $e^{-x}dx = (\quad)\,d(e^{-x})$；

(7) $\sin\frac{x}{2}dx = (\quad)\,d\left(\cos\frac{x}{2}\right)$；

(8) $\frac{dx}{1-2x} = (\quad)\,d(\ln|1-2x|)$；

(9) $\frac{dx}{1+4x^2} = (\quad)\,d(\operatorname{arc\,tg}2x)$；

(10) $\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = (\quad)\,d(\sqrt{1-x^2})$。

2．求下列不定积分：

(1) $\int (1-2x)^3 dx$；　(2) $\int \frac{dx}{3x+2}$；

(3) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3+2x}}$；　(4) $\int (\sin a x - e^{bx})\,dx$。

(5) $\int xe^{-x^2}dx$;　　(6) $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$;

(7) $\int \frac{2x}{1-x^2}dx$;　　(8) $\int \frac{3x^3}{1+x^4}dx$;

(9) $\int \frac{x^2}{1+x^6}dx$;　　(10) $\int \cos^2 3x\, dx$;

(11) $\int \frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt$;　　(12) $\int \cos(\omega t+\varphi)dt$;

(13) $\int \sin^3 x dx$;　　(14) $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$;

(15) $\int \sin x \cos\frac{x}{2}dx$;　　(16) $\int \sin 2x \cos 3x\, dx$;

(17) $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}dx$;　　(18) $\int \left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{ctg}2x\right)dx$;

(19) $\int \operatorname{tg}^5 x\cdot\sec^2 x dx$;　　(20) $\int \operatorname{tg}^3 x\sec x dx$;

(21) $\int \frac{dx}{\sin x\cos x}$;　　(22) $\int \frac{\ln x}{x}dx$;

(23) $\int \frac{dx}{x\ln x\ \ln\ln x}$;　　(24) $\int \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}dx$;

(25) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$;　　(26) $\int \frac{\cos\theta}{2+\sin\theta}d\theta$;

(27) $\int \operatorname{tg}^3 x\, dx$;　　(28) $\int \cos^5 x\, dx$;

(29) $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$;　　(30) $\int \frac{\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx$;

(31) $\int \frac{dx}{x^2+9}$;　　(32) $\int \frac{dx}{x^2-16}$;

(33) $\int \frac{dx}{4x^2+3}$;　　(34) $\int \frac{dx}{2x^2-1}$;

(35) $\int \frac{dx}{x^2-6x+5}$;　　(36) $\int \frac{2x-1}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

(37) $\int \frac{1-x}{\sqrt{9-4x^2}}dx$;　　(38) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$;

(39) $\int \frac{x-1}{x^2+9} dx$; (40) $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}$;

(41) $\int \sqrt{2-4x^2}\, dx$; (42) $\int \sqrt{8-2x-x^2}\, dx$;

(43) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+13}}$; (44) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2x-9}} dx$;

(45) $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x-5}}$; (46) $\int \sqrt{x-x^2}\, dx$;

(47) $\int (a^2-x^2)^{-\frac{3}{2}} dx$; (48) $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} dx$;

(49) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$; (50) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x+2}}$;

(51) $\int \frac{x^2}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$; (52) $\int \frac{x^3}{\sqrt{2+x^2}} dx$;

(53) $\int \frac{x}{\sqrt{1-2x}} dx$; (54) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}}$;

(55) $\int \frac{x}{\sqrt[3]{1-3x}} dx$; (56) $\int \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx$;

(57) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$; (58) $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx$;

(59) $\int \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^4} dx$; (60) $\int \sqrt{1+e^x}\, dx$.

第三节　分部积分法

设函数 $u=u(x)$, $v=v(x)$具有连续的导数，由乘积的微分公式有

$$d(uv)=udv+vdu$$

移项，得

$$udv=d(uv)-vdu$$

两端积分，得

$$\int u\,dv=uv-\int vdu \tag{1}$$

公式(1)称为**分部积分公式**。由此可知，求一个函数的不定积分时，可以把被积函数分成两个因子，一个作为u，另一个与dx结合作为dv，如果积分$\int udv$不易求出，而求$\int vdu$比较容易，这样便可利用公式(1)进行积分，利用(1)式求积分的方法称为**分部积分法**。

例1 求$\int x\cos x\,dx$。

解 设 $u=x$, $dv=\cos x\,dx$, 则

$$du=dx,\quad v=\int\cos x\,dx=\sin x.$$

代入分部积分公式(1)，得

$$\int x\cos x\,dx=x\sin x-\int\sin x\,dx$$
$$=x\sin x+\cos x+c$$

求这个积分时，如果设$u=\cos x$, $dv=x\,dx$, 那末$du=-\sin x\,dx$, $v=\int x\,dx=\frac{1}{2}x^2$, 于是

$$\int x\cos x\,dx=\frac{1}{2}x^2\cos x+\int\frac{1}{2}x^2\sin x\,dx$$

显然，此式右端的积分比原积分更不容易求出。

可见，应用分部积分公式时，恰当地选取u和dv至关重要，选取u和dv一般要考虑下面两点：

(1) v要容易求得；

(2) $\int vdu$要比$\int udv$容易积出。

例2 求$\int x^2e^x dx$。

解 设 $u=x^2$, $dv=e^x dx$, 则

$$du=2x\,dx,\quad v=\int e^x dx=e^x.$$

于是
$$\int x^2e^x dx=x^2e^x-2\int xe^x dx$$

这里$\int xe^x dx$比$\int x^2e^x dx$容易求出，因为被积函数中的x的幂次降低了一次，再一次用分部积分公式，有

$$\int xe^x dx=\int x\,d(e^x)=xe^x-\int e^x dx=xe^x-e^x+c.$$

代入前式，得

$$\begin{aligned}\int x^2e^x dx&=x^2e^x-2xe^x+2e^x+c\\&=e^x(x^2-2x+2)+c\end{aligned}$$

此例中，接连二次使用分部积分法，使问题由难到易，逐步解决。

例 3 求$\int x\ln x\,dx$.

解 设$u=\ln x$, $dv=x\,dx$, 则

$$du=\frac{1}{x}dx,\quad v=\int x\,dx=\frac{1}{2}x^2.\text{于是}$$

$$\begin{aligned}\int x\ln x\,dx&=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{2}\int x dx\\&=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+c\end{aligned}$$

例 4 求$\int \arcsin x\,dx$.

解 设 $u=\arcsin x$, $dv=dx$, 则

$$du=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\quad v=x.\text{于是}$$

$$\begin{aligned}\int \arcsin x\,dx&=x\arcsin x-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx\\&=x\arcsin x+\frac{1}{2}\int\frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\\&=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+c\end{aligned}$$

例 5 求$\int e^x\cos x\,dx$.

解 设 $u=e^x$, $dv=\cos x\,dx$, 则

$$du=e^x dx,\quad v=\sin x.\text{于是}$$

$$\int e^x \cos x\,dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx \tag{2}$$

等式右端的积分与等式左端的积分是同一类型的，对右端的积分 $\int e^x \sin x\,dx$ 也用分部积分法：设 $u=e^x$，$dv=\sin x\,dx$，那末 $du=e^x dx$，$v=-\cos x$。于是

$$\int e^x \sin x\,dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\,dx \tag{3}$$

将(3)式代入(2)式，得

$$\int e^x \cos x\,dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x\,dx,$$

将上式右端的第三项移项，再两端同除以 2，便得

$$\int e^x \cos x\,dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + c$$

例 6 求 $\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx$。

解 设 $u=\sqrt{x^2+a^2}$，$dv=dx$，则

$$du = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}dx,\quad v=x。于是$$

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx &= x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx \\ &= x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx \\ &= x\sqrt{x^2+a^2} - \int \sqrt{x^2+a^2}\,dx + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx &= \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} \\ &= \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}| + c\end{aligned}$$

类似地可得

$$\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+c$$

例7 求 $\int e^{-\sqrt{x}}dx$。

解 先作变量代换：$t=\sqrt{x}$，则 $x=t^2$，$dx=2tdt$，于是

$$\int e^{-\sqrt{x}}dx=2\int te^{-t}dt$$

再用分部积分法，有

$$\begin{aligned}\int e^{-\sqrt{x}}dx&=2\int te^{-t}dt=-2\int td(e^{-t})\\&=-2\left(te^{-t}-\int e^{-t}dt\right)\\&=-2(te^{-t}+e^{-t})+c\\&=-2e^{-\sqrt{x}}(\sqrt{x}+1)+c\end{aligned}$$

从以上各例可见，分部积分法常用于被积函数是两种不同类型的函数之积的情形，常见的类型有：

(1) $\int P(x)e^{\alpha x}dx$, $\int P(x)\sin\alpha x\,dx$, $\int P(x)\cos\alpha x\,dx$；

(2) $\int P(x)\ln x\,dx$, $\int P(x)\arcsin x\,dx$, $\int P(x)\mathrm{arc\,tg}\,x\,dx$；

(3) $\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx$, $\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx$.

其中 $P(x)$ 为多项式，最简单情形是 $P(x)=1$ 或 $P(x)=x$。对于类型(1)，设 $u=P(x)$；对于类型(2) 设 $dv=P(x)dx$；对于类型(3)，可随意设 u 或 dv。

习　题　3-3

求下列不定积分：

(1) $\int x\sin 2x\,dx$；　　(2) $\int x^2\cos x\,dx$；

(3) $\int \ln x\,dx$；　　(4) $\int x\,\mathrm{tg}^2x\,dx$；

(5) $\int x\sin^2 x\,dx$；(6) $\int \operatorname{arc\,tg} x\,dx$；

(7) $\int x\arcsin x\,dx$；(8) $\int x\operatorname{arc\,tg} x\,dx$；

(9) $\int \frac{\ln x}{x^2}dx$；(10) $\int x\ln(x-1)\,dx$；

(11) $\int te^{-2t}dt$；(12) $\int (\ln x)^2dx$；

(13) $\int e^x\sin 2x\,dx$；(14) $\int \ln(1+x^2)\,dx$；

(15) $\int e^{-x}\cos x\,dx$；(16) $\int e^{\sqrt{x+1}}dx$；

(17) $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx$；(18) $\int \cos(\ln x)\,dx$；

(19) $\int (\arcsin x)^2dx$；(20) $\int \csc^3 x\,dx$；

(21) $\int \sqrt{2x^2+1}\,dx$；(22) $\int \sqrt{x^2-4x+1}\,dx$。

第四节　有理函数的积分

两个多项式$P(x)$、$Q(x)$之商$\frac{P(x)}{Q(x)}$称为**有理函数**或**有理分式**，例如：

$$\frac{4x}{x^2+1},\quad \frac{5x^2-2x+1}{(x+1)(x^2-2)},\quad \frac{x^3-2x+1}{x^3+x^2-1},\quad \frac{3x^3-2x^2+7x-1}{x^2-x+2}$$

都是有理函数，如果$P(x)$的次数低于$Q(x)$的次数，称为**真分式**；否则称为**假分式**。上列四式中前两个为真分式，后两个为假分式。

假分式可以用多项式的除法化为一个多项式和一个真分式之和，例如

$$\frac{3x^3-2x^2+7x-1}{x^2-x+2}=3x+1+\frac{2x-3}{x^2-x+2}$$

因为多项以的积分十分简单，所以求有理函数的积分问题实

际上是求有理真分式的积分。有理真分式的不定积分方法是：先把真分式分解成几个简单分式的和，然后再求其积分。下面通过举例来说明。

例 1 求 $\int \frac{x+3}{x^2-5x+6}dx$.

解 因为被积函数的分母可以分解因式：$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$，所以真分式可以分解成简单分式之和：

$$\frac{x+3}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}$$

其中 A、B 为待定系数，可用以下两种方法求出。

方法 1：两端去分母后，得

$$x+3=A(x-3)+B(x-2) \tag{1}$$

即 $$x+3=(A+B)x-(3A+2B)$$

这是恒等式，两端 x 同次幂的系数必须相等，于是有

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -(3A+2B)=3 \end{cases}$$

从而解得 $$A=-5,\ B=6.$$

方法 2：在恒等式(1)中，代入特殊的 x 值，从而求出待定系数 A、B. 在(1)式中：

$$令\ x=2,\ 得\ A=-5;$$
$$令\ x=3,\ 得\ B=6.$$

此法称为**赋值法**. 于是有

$$\frac{x+3}{(x-2)(x-3)}=\frac{-5}{x-2}+\frac{6}{x-3}$$

所以

$$\begin{aligned}\int \frac{x+3}{x^2-5x+6}dx &= \int\left(\frac{-5}{x-2}+\frac{6}{x-3}\right)dx \\ &= -5\int\frac{d(x-2)}{x-2}+6\int\frac{d(x-3)}{x-3} \\ &= -5\ln|x-2|+6\ln|x-3|+c \\ &= \ln\frac{(x-3)^6}{|x-2|^5}+c\end{aligned}$$

例 2 求 $\int \frac{x-2}{x^2+2x+3}dx$.

解 由于被积函数的分母是二次质因式，而分子是一次式，这时可以把分子拆成两部分之和：一部分是分母的导数乘上一个常数因子；另一部分是常数，即

$$x-2=\frac{1}{2}(2x+2)-3$$

所以

$$\begin{aligned}\int \frac{x-2}{x^2+2x+3}dx&=\int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)-3}{x^2+2x+3}dx\\&=\frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}dx-3\int \frac{dx}{x^2+2x+3}\\&=\frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+2x+3)}{x^2+2x+3}-3\int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+(\sqrt{2})^2}\\&=\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+3|-\frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+c\end{aligned}$$

例 3 求 $\int \frac{x+1}{(x-1)^2(x-2)}dx$.

解 将被积函数分解为：

$$\frac{x+1}{(x-1)^2(x-2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-2}\quad .$$

注意：由于真分式的分母中含 $(x-1)^2$，将它分解成简单分式之和时，除了有 $(x-1)^2$ 为分母的一项外，还应有比 $(x-1)^2$ 的方次较低的项，即以 $(x-1)$ 为分母的一项。

上式两边乘以 $(x-1)^2(x-2)$，得

$$x+1=A(x-1)(x-2)+B(x-2)+C(x-1)^2 \qquad (2)$$

利用赋值法求 A、B、C。在(2)式中：

令 $x=1$，得 $B=-2$；

令 $x=2$，得 $C=3$。

再不妨令 $x=0$，利用已求得的 B、C 值，即可得 $A=-3$。于是

$$\int \frac{x+1}{(x-1)^2(x-2)}dx=\int \frac{-3}{x-1}dx+\int \frac{-2}{(x-1)^2}dx+\int \frac{3}{x-2}dx$$

$$= -3\ln|x-1| + \frac{2}{x-1} + 3\ln|x-2| + c$$

$$= \frac{2}{x-1} + 3\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + c$$

例 4 求 $\int \frac{x^2+x-2}{3x^3-x^2+3x-1}dx$.

解 被积函数的分母可分解为:

$$3x^3 - x^2 + 3x - 1 = (3x-1)(x^2+1)$$

这两个因式中有一个为二次质因式，故被积函数分解为如下形式:

$$\frac{x^2+x-2}{(3x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{3x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

两边乘以$(3x-1)(x^2+1)$，得

$$x^2+x-2 = A(x^2+1) + (Bx+C)(3x-1)$$

将此式右边展开并合并同类项，得

$$x^2+x-2 = (A+3B)x^2 + (-B+3C)x + (A-C)$$

于是有

$$\begin{cases} A+3B=1 \\ -B+3C=1 \\ A-C=-2 \end{cases}$$

解之，得 $A=-\frac{7}{5}$，$B=\frac{4}{5}$，$C=\frac{3}{5}$。于是

$$\int \frac{x^2+x-2}{3x^3-x^2+3x-1}dx = -\frac{7}{5}\int\frac{dx}{3x-1} + \frac{4}{5}\int\frac{xdx}{x^2+1} + \frac{3}{5}\int\frac{dx}{x^2+1}$$

$$= -\frac{7}{15}\ln|3x-1| + \frac{2}{5}\ln|x^2+1|$$

$$+ \frac{3}{5}\operatorname{arc\,tg} x + c$$

有关求不定积分的方法，我们就介绍到此为止。大家已看到，求不定积分要比求导数来得灵活且复杂，为了实用的方便，往往把常用的积分公式汇集成表，这种表叫做**积分表**。积分表是按照被积函数的类型来排列的。求积分时，可根据被积函数的类型直接地或经过简单的变形后，在表内查得所需的结果，本书末附有一个简单的积分表，以供查阅。

最后我们指出，对初等函数来说，在其定义域内它的原函数是一定存在的，但原函数不一定都是初等函数。如：

$$\int e^{-x^2}dx,\ \int\frac{\sin x}{x}dx,\ \int\frac{1}{\ln x}dx,\ \int\sin x^2dx,$$

这样的积分称为"积不出"的积分，也就是说，仅用上述的积分法是求不出它们的原函数的。

习　题　3-4

求下列不定积分：

(1) $\int\frac{x^2}{x+3}dx$；　　(2) $\int\frac{x^2+x+1}{x^2+4}dx$；

(3) $\int\frac{x+5}{x^2-2x-3}dx$；　　(4) $\int\frac{x}{x^2+6x+10}dx$；

(5) $\int\frac{3x^2-10}{x^2-4x+4}dx$；　　(6) $\int\frac{dx}{x(x-1)^2}$；

(7) $\int\frac{3}{x^3+1}dx$；　　(8) $\int\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx$；

(9) $\int\frac{1}{x^4-16}dx$；　　(10) $\int\frac{dx}{2x^3+x^2+2x+1}$.

第四章　定积分及其应用

导数和微分解决了函数的变化率、函数的极值等问题，微积分学还要解决的另一类问题是求平面曲线所围成的面积、变速直线运动的路程等，这些问题将在本章中加以解决。

第一节　定积分的概念和性质

一、两个实际问题

1．曲边梯形的面积

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续，且 $f(x) \geqslant 0$，则由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a$，$x=b$ 以及 x 轴所围成的图形 S 称为**曲边梯形**（图 4-1）。如何计算这个曲边梯形 S 的面积 A？

在初等数学中，解决圆的面积所用的方法是用圆内接正多边形的面积作为圆的面积的近似值，再用极限方法求出圆的面积。现在也用同样的思想方法来讨论曲边梯形面积的问题。如果能求出

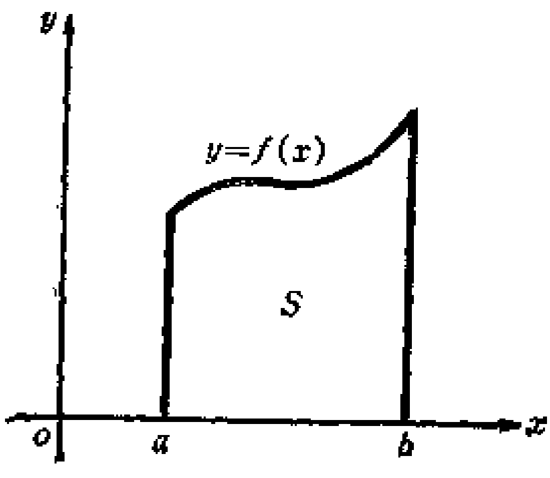


图　4-1

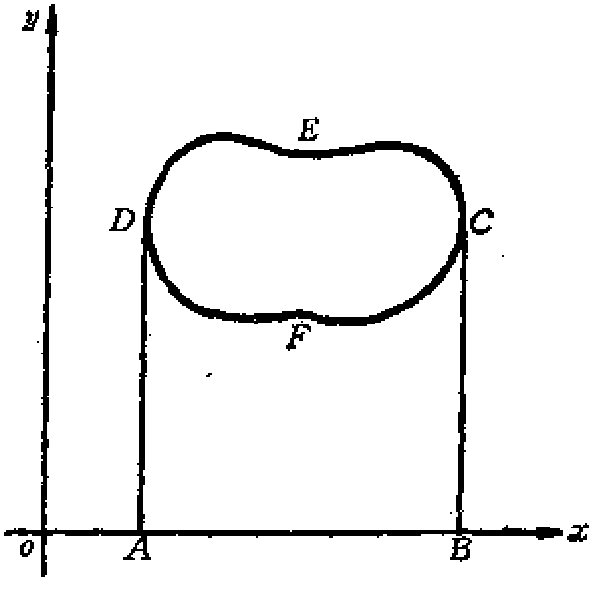


图　4-2

它的面积，那么一般平面上曲线所围成图形的面积就能解决，因为它总可化为几个曲边梯形面积的代数和来计算。如图 4-2 中，曲线图形 $DFCED$ 的面积就等于曲边梯形 $ABCED$ 的面积减去曲边梯形 $ABCFD$ 的面积。

现在，我们来讨论曲边梯形面积的求法。由于曲边梯形有一条曲边，其“高度”是变化的，就不能简单地象矩形那样用底乘高来求其面积。然而，由于曲边梯形的“高” $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上是连续变化的，我们可以把区间 $[a, b]$ 任意分成 n 个小区间，相应地作出 n 个小曲边梯形，那末 $f(x)$ 在每一个小区间上变化不大，可以近似地看作不变。这时，每一个小曲边梯形的面积便可近似地用小矩形的面积来代替，把这些小矩形的面积相加，就得到整个曲

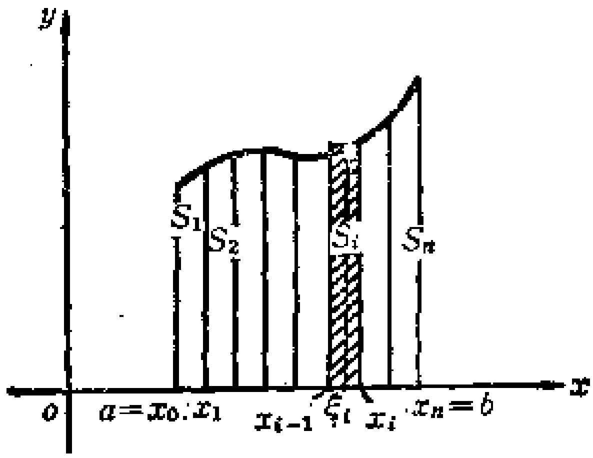


图 4-3

边梯形面积的近似值(图 4-3)。如果区间分割越细，所得面积的近似程度就越高，因此，曲边梯形的面积可以定义为当区间 $[a, b]$ 无限细分时，小矩形面积和的极限。

按上述思路，可归结为下面四个步骤：

(1) 分割：在区间 $[a, b]$ 内任意插入 $n-1$ 个分点：

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

把区间 $[a, b]$ 分成 n 个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$，它们的长度为

$$\Delta x_i=x_i-x_{i-1} \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

用直线 $x=x_i$ 把曲边梯形 S 分割成 n 个小曲边梯形，各个小

曲边梯形面积记为

$$\Delta A_i \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

(2) 近似代替：在每个小区间$[x_{i-1}, x_i]$上任取一点$\xi_i(x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i)$，以这点的函数值$f(\xi_i)$为高，相应的区间长$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$为底作小矩形，其面积$f(\xi_i)\Delta x_i$作为它所在的小曲边梯形面积$\Delta A_i$的近似值，即

$$\Delta A_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

(3) 求和：把所有小矩形面积相加就得到所要求的曲边梯形S的面积A的近似值，即

$$A = \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \tag{1}$$

(4) 取极限：记$\lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n}\{\Delta x_i\}$，即$\lambda$表示所有小区间长度的最大值，当$\lambda \to 0$时，意味着分割无限细分，那末和式

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

的极限就定义为曲边梯形的面积A，即

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \tag{2}$$

2. **变速直线运动的路程**

设某物体作变速直线运动，已知速度$v=v(t)$是时间间隔$[T_1, T_2]$上的连续函数，且$v(t) \geqslant 0$，现要计算在这段时间内物体所经过的路程s。

由于物体作变速直线运动，速度是随时间变化的变量，所以不能直接用等速运动的公式：

$$\text{路程} = \text{速度} \times \text{时间}$$

来计算所经过的路程，但由于速度函数$v=v(t)$是连续的，在很短一段时间内速度可认为变化很小，近似于等速。因此，也可仿照上一问题的思路用先求路程的近似值，再取极限的方法求出路程的准确值。

(1) 分割：在时间间隔$[T_1, T_2]$内任意插入$n-1$个分点：

$$T_1 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{i-1} < t_i < \cdots < t_{n-1} < t_n = T_2$$

得到 n 个小段时间间隔 $[t_{i-1}, t_i]$，第 i 小段的时间为：

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

物体在这个小段时间经过的路程为 $\Delta s_i (i = 1, 2, \cdots, n)$。

（2）近似代替：在每一小段时间间隔 $[t_{i-1}, t_i]$ 内任取一时刻 $\tau_i (t_{i-1} \leqslant \tau_i \leqslant t_i)$ 将此时刻 τ_i 的速度 $v(\tau_i)$ 代替该时间间隔上各个时刻的速度。这样，物体可认为作匀速运动。因此，这小段时间间隔的路程 Δs_i 的近似值为：

$$\Delta s_i \approx v(\tau_i) \Delta t_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

（3）求和：把各小段路程的近似值相加，便得到变速直线运动的路程 s 的近似值，

即
$$s = \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i \approx \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i) \Delta t_i \tag{3}$$

（4）取极限：记 $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \{\Delta t_i\}$，则当 $\lambda \to 0$ 时，和式(3)右端的极限就定义为变速直线运动的路程 s，即

$$s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i) \Delta t_i \tag{4}$$

二、定积分的定义

上述两例分别是几何、物理问题，但都是通过"分割、近似代替、求和、取极限"的方法来解决，撇开问题的具体意义保留其分析结构和数量关系的共性，便抽象出定积分的定义。

定义 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义，在 $[a, b]$ 内任意插入 $n-1$ 个分点：

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

将区间 $[a, b]$ 分成 n 个长度为：

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

的小区间，在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取一点 $\xi_i (x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i)$，作和式

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i \tag{5}$$

记 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$，如果不论小区间如何划分以及 ξ_i 如何取法，只要当 $\lambda\to 0$ 时，和式

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

有同一极限存在，则称此极限值为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的**定积分**(definite integral)，记作 $\int_a^b f(x)dx$，即

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \tag{6}$$

其中 $f(x)$ 称为**被积函数**，$f(x)dx$ 称为**被积表达式**，x 称为**积分变量**，a 与 b 分别称为**定积分的下限与上限**，区间 $[a, b]$ 称为**积分区间**，和式 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 称为**积分和**。

由定积分的定义可知，定积分表示一个数，它仅与被积函数和积分区间有关，而与积分变量的记号无关，即

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt$$

在定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的定义中是假定 $a<b$ 的，但为了今后应用的方便，我们还规定：

当 $a=b$ 时，$\int_a^b f(x)dx=0$，

当 $a>b$ 时，$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$。

由定义不难知道，在 $[a, b]$ 内，$f(x)=1$ 时，

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b dx=b-a$$

定积分的定义表明，只有当和式(5)的极限存在时，函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的定积分才存在，亦称为**可积**。定义中并不要求被积函数一定连续，但可以证明，若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的定积分一定存在，简单地说，**闭区间上的连续函数是可积的**。

根据定积分的定义和上述两个实际问题可知，定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 表示曲线 $y=f(x)(f(x)>0)$，直线 $x=a$，$x=b$ 和 x 轴所围的曲边梯形的面积。当 $f(x)\leqslant 0$ 时，定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 表示相应曲边梯形面积的相反数。

如果函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有时为正有时为负（图 4-4），那末，定积分的几何意义就是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上各个曲边梯形面积的代数和。

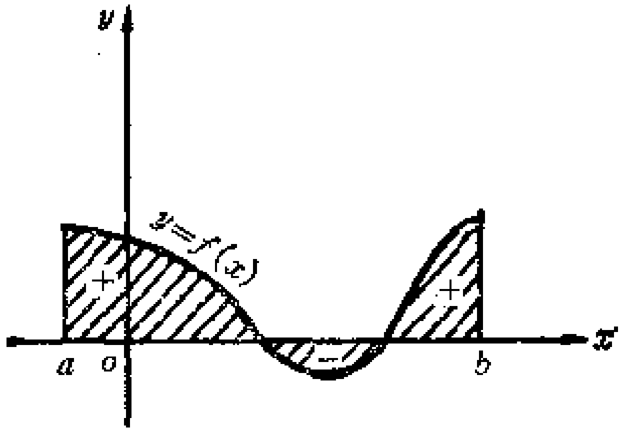


图 4-4

物体作变速直线运动时，在时间间隔 $[T_1, T_2]$ 上物体经过的路程，就是速度函数 $v(t)(v(t)>0)$ 在区间 $[T_1, T_2]$ 上的定积分

$$\int_{T_1}^{T_2} v(t)dt.$$

例 1 用定积分定义计算 $\int_0^1 x^2dx$.

解 因为被积函数 x^2 在 $[0, 1]$ 上是连续的，所以是可积的。于是定积分与区间的分割及点 ξ_i 的取法无关，为了方便起见，现在区间 $[0, 1]$ 内取 $n-1$ 个等分点：

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{i-1}<x_i<x_{n-1}<x_n=b$$

每个小区间的长度都等于 $\frac{1}{n}$，并取 $\xi_i=x_i(i=1, 2, \cdots, n)$，得和式

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}x_i^2\Delta x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} n \cdot (n+1)(2n+1)$$

$$= \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

令 $n \to \infty$ 时，$\lambda = \Delta x_i \to 0$，那么对上式取极限，于是有

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \Delta x_i$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{3}$$

三、 定积分的性质

根据定积分的定义及极限运算法则，当被积函数在积分区间上是连续时，可得到下面性质。

性质 1 常数因子可以提到积分号外，即

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \qquad (k\text{为常数})$$

性质 2 两个（或有限个）函数代数和的定积分等于它们定积分的代数和，即

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

性质 3 对于任意三个数 a, b, c 均有

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

这表明定积分对于区间具有可加性。

性质 4 如果在区间 $[a, b]$ 上有 $f(x) \leqslant g(x)$，则

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$$

性质 5 （积分中值定理）如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续，则在 $[a, b]$ 上至少存在一点 ξ，使得

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \quad (a \leqslant \xi \leqslant b)$$

这个公式叫**积分中值公式**.

证 因为 $f(x)$在区间$[a, b]$上连续，所以 $f(x)$在$[a, b]$上有最小值 m 和最大值 M，即

$$m \leqslant f(x) \leqslant M$$

由性质 4，得

$$\int_a^b m dx \leqslant \int_a^b f(x) dx \leqslant \int_a^b M dx$$

由于

$$\int_a^b m dx = m(b-a)$$

$$\int_a^b M dx = M(b-a)$$

于是

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x) dx \leqslant M(b-a)$$

因而

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x) dx \leqslant M$$

即$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ 是介于连续函数 $f(x)$的最大值 M 和最小值 m 之间的一个数，由闭区间上连续函数的介值定理，可知在$[a, b]$上至少存在一点ξ，使得

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x) dx$$

即

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \quad (a \leqslant \xi \leqslant b)$$

积分中值定理的几何意义是：在区间$[a, b]$上总可找到一点ξ，使得以曲线 $y=f(x)$ 为曲边的曲边梯形面积，等于同一底边而高为 $f(\xi)$的矩形面积(图 4-5)。

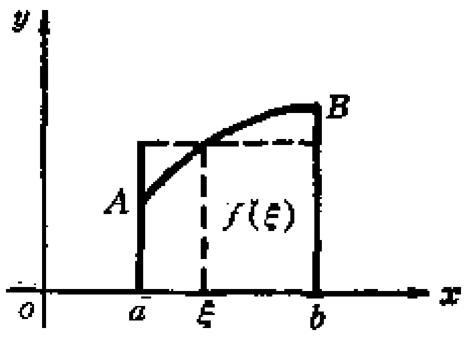


图 4-5

习 题 4-1

*1. 用定积分定义计算定积分$\int_a^b x dx \ (a<b)$。

*2. 自由落体的速度 $v=gt$，试用定积分定义求前5秒内所下落的距离。

3. 设某细竿长为 l，其密度为 $\mu(x)$，x为细竿上任意点到一确定端点的距离，试用定积分表示细竿的质量。

4. 根据定积分的几何意义，判断下列定积分的正负：

(1) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx$；　　(2) $\int_{-\pi}^{0}\sin x\,dx$；

(3) $\int_{0}^{3}x^3dx$；　　(4) $\int_{\frac{1}{e}}^{1}\ln x\,dx$。

5. 比较下列各对定积分的大小：

(1) $\int_{0}^{1}xdx$ 与 $\int_{0}^{1}x^2dx$；　　(2) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}xdx$ 与 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$；

(3) $\int_{1}^{2}\ln xdx$ 与 $\int_{1}^{2}(\ln x)^2dx$；　　(4) $\int_{0}^{1}xdx$ 与 $\int_{0}^{1}e^xdx$。

6. 利用定积分的几何意义，说明下列等式是否成立，并说明理由：

(1) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=0$；　　(2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx$；

(3) $\int_{-1}^{1}\operatorname{arc\,tg}x\,dx=0$；　　(4) $\int_{-1}^{1}x^2dx=2\int_{0}^{1}x^2dx$。

第二节　定积分的计算

一、微积分学基本定理

1. 积分上限的函数及其导数

设 $f(x)$在$[a, b]$上连续，x为$[a, b]$上任意一点，则 $f(x)$在$[a, x]$上可积，即 $\int_{a}^{x}f(x)dx$ 存在。由于定积分与积分变量的记号无关，为了不致引起混淆，把积分变量 x 换成 t，于是 $f(x)$在$[a, x]$上的定积分改写成

$$\int_{a}^{x}f(t)dt$$

当积分上限 x 在$[a, b]$上变动时，对于每一个 x 值，$\int_{a}^{x}f(t)dt$ 都有唯一的确定值与之对应，因而$\int_{a}^{x}f(t)dt$ 为变动上限 x 的函数，记

作

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt \quad (a\leqslant x\leqslant b) \tag{1}$$

上述积分通常称为**变上限积分**。

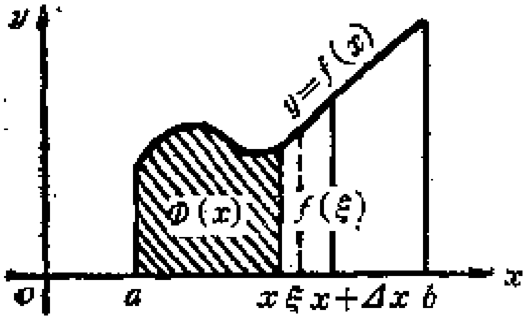


图 4-6

在图 4-6 中，函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ 表示阴影部分曲边梯形的面积。

定理 1 如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则积分上限的函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a, b]$ 上可导，且

$$\Phi'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x) \quad (a\leqslant x\leqslant b) \tag{2}$$

证 设 x 是 $[a, b]$ 上任一点，对应于 x 的改变量 Δx（图 4-6 中 $\Delta x>0$），函数 $\Phi(x)$ 相应的改变量为：

$$\begin{aligned}\Delta\Phi(x)&=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)\\&=\int_a^{x+\Delta x}f(t)dt-\int_a^x f(t)dt\\&=\int_a^{x+\Delta x}f(t)dt+\int_x^a f(t)dt\\&=\int_x^{x+\Delta x}f(t)dt\end{aligned}$$

在区间 $[x, x+\Delta x]$ 上应用积分中值定理，有

$$\int_x^{x+\Delta x}f(t)dt=f(\xi)\Delta x$$

故
$$\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x}=f(\xi) \quad (x\leqslant\xi\leqslant x+\Delta x)$$

因为 $f(x)$ 在点 x 连续，所以，当 $\Delta x\to 0$ 时，有 $\xi\to x$，从而 $f(\xi)\to f(x)$，于是

$$\Phi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x}=\lim_{\xi\to x}f(\xi)=f(x)$$

由于 $\Phi'(x)=f(x)$，因此 $\Phi(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的一个原函数，由此得

推论 如果函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则

$$\Phi(x)=\int_{a}^{x} f(t)dt$$

是函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的一个原函数。

定理1的重要价值不仅在于它告诉了我们连续函数的原函数必定存在，而且引导出了牛顿-莱布尼兹（Newton-Leibniz）公式。

2. 牛顿-莱布尼兹公式

定理2 如果函数 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的一个原函数，则

$$\int_{a}^{b} f(x)dx=F(b)-F(a) \tag{3}$$

证 由定理1知，$\Phi(x)=\int_{a}^{x} f(t)dt$ 也是 $f(x)$ 的一个原函数，因此 $F(x)$ 与 $\Phi(x)$ 之差必定是一个常数 c，即

$$F(x)=\int_{a}^{x} f(t)dt+c$$

为确定 c，令 $x=a$，因为 $\int_{a}^{a} f(t)dt=0$，得

$$c=F(a)$$

因而

$$\int_{a}^{x} f(t)dt=F(x)-F(a)$$

再令 $x=b$，即得

$$\int_{a}^{b} f(t)dt=F(b)-F(a)$$

或

$$\int_{a}^{b} f(x)dx=F(b)-F(a)$$

通常记

$$F(b)-F(a)=F(x)\Big|_{a}^{b}$$

于是(3)式也可写成

$$\int_{a}^{b} f(x)dx=F(x)\Big|_{a}^{b}=F(b)-F(a)$$

这就是著名的牛顿-莱布尼兹公式。它是微积分学的基本公式，揭

示了定积分与不定积分之间的内在关系，从而使微分学和积分学建立了联系。当被积函数的原函数可以求出时，定积分就等于原函数在积分上限的函数值与下限的函数值之差。

例 1 求$\int_0^1 x^2 dx$。

解 $\int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$

例 2 求$\int_0^2 f(x)dx$，设$f(x) = \begin{cases} x^2, & 当\ 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2-x, & 当\ 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$

解
$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)dx &= \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx \\ &= \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (2-x)dx \\ &= \frac{1}{3} + \left(2x - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_1^2 \\ &= \frac{1}{3} + \left[(4-2) - \left(2 - \frac{1}{2}\right)\right] = \frac{5}{6}\end{aligned}$$

例 3 求$\int_{-1}^1 \sqrt{x^2 - x^4}\, dx$。

解 $\int_{-1}^1 \sqrt{x^2 - x^4}\, dx = \int_{-1}^1 |x|\sqrt{1-x^2}\, dx$

由于在$[-1, 0]$内$|x| = -x$，而在$[0, 1]$内$|x| = x$，所以

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \sqrt{x^2 - x^4}\, dx &= \int_{-1}^0 (-x)\sqrt{1-x^2}\, dx + \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\, dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^0 \sqrt{1-x^2}\, d(1-x^2) - \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, d(1-x^2) \\ &= \frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^0 - \frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

二、定积分的计算法

牛顿-莱布尼兹公式把定积分的计算归结为求被积函数的原函数在积分上下限函数值之差。为了简化计算，我们通过例题介绍定积分的换元法与分部积分法。

例4 求 $\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}dx$.

解 令 $\sqrt{2x+1}=t$, 则 $x=\frac{t^2-1}{2}$, $dx=tdt$,

当 $x=0$ 时, $t=1$; $x=4$ 时, $t=3$. 故

$$\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}dx=\int_1^3 \frac{t^2+3}{2}\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{t^3}{3}+3t\right)\Big|_1^3=\frac{22}{3}$$

例5 求 $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$, $(a>0)$.

解 令 $x=a\cos t$, 则 $dx=-a\sin t\,dt$, 当 $x=0$ 时, $t=\frac{\pi}{2}$;

$x=a$ 时, $t=0$. 故

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^0 a\sin t(-a\sin t)dt$$

$$=-a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 t\,dt=\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)dt$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}a^2$$

从这两个例子看到,用换元法计算定积分时,在积分变量改变的同时,积分的上、下限也必须作相应的改变,在求出原函数后,不必再代回到原来的变量,只要直接把变化后的积分上、下限代入新变量进行计算就行了。

例6 试证:对于连续函数 $f(x)$, 若 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 上为偶函数,则

$$\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx \tag{4}$$

若 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 上为奇函数,则

$$\int_{-a}^a f(x)dx=0 \tag{5}$$

证 因为

$$\int_{-a}^a f(x)dx=\int_{-a}^0 f(x)dx+\int_0^a f(x)dx$$

令 $x=-t$, 则

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{a}^{0} f(-t)dt = \int_{0}^{a} f(-t)dt$$
$$= \int_{0}^{a} f(-x)dx$$

于是

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(-x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$$
$$= \int_{0}^{a} [f(-x) + f(x)]dx \tag{6}$$

若 $f(x)$ 为偶函数，则 $f(-x) = f(x)$，由 (6) 式立即得到 (4) 式，若 $f(x)$ 为奇函数，则 $f(-x) = -f(x)$，由 (6) 式立即得到 (5) 式。

对于奇偶函数在关于原点对称的区间上的积分，利用上述结果可以简化计算。

例 7 求 $\int_{1}^{e} \ln x\, dx$。

解 设 $u = \ln x$，$dv = dx$

则 $du = \frac{1}{x} dx$，$v = x$。

于是 $$\int_{1}^{e} \ln x\, dx = x\ln x\Big|_{1}^{e} - \int_{1}^{e} x\cdot\frac{1}{x}dx$$
$$= x\ln x\Big|_{1}^{e} - x\Big|_{1}^{e}$$
$$= (e) - (e-1) = 1$$

例 8 求 $\int_{0}^{1} x \operatorname{arctg} x\, dx$。

解 $$\int_{0}^{1} x \operatorname{arctg} x\, dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{1} \operatorname{arctg} x\, d(x^2+1)$$
$$= \left[\frac{1}{2}(x^2+1)\operatorname{arctg} x\right]_{0}^{1} - \frac{1}{2}\int_{0}^{1} dx$$
$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

在用分部积分公式进行定积分的计算时，应注意 $u\cdot v$ 这一部分也要立即代入积分限进行计算。

习 题 4-2

1. 设函数$f(x)=\int_1^x\sqrt{1+t^2}\,dt$，求$f'(0)$，$f'\left(\frac{3}{4}\right)$。

2. 设$f(x)=\int_x^0 \sin t\,dt$，求在$x=0,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}$处的导数值和函数值。

3. 讨论函数$y=\int_0^x te^{-t^2}dt$的极值与拐点。

*4. 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\cos t^2dt}{\int_0^x e^{-t}dt}$。

5. 计算下列定积分：

(1) $\int_1^2\left(x^3+\frac{1}{x^4}\right)dx$；　　(2) $\int_4^9\sqrt{x}(1+\sqrt{x})dx$；

(3) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$；　　(4) $\int_0^{2\pi}|\sin x|dx$；

(5) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{tg}^2x\,dx$；　　(6) $\int_0^2|1-x|dx$。

6. 计算下列定积分：

(1) $\int_0^4\frac{1}{1+x}dx$；　　(2) $\int_{-1}^1\frac{x}{\sqrt{5-4x}}dx$；

(3) $\int_{\frac{1}{e}}^e\frac{\ln^2x}{x}dx$；　　(4) $\int_0^1\frac{1}{1+e^x}dx$；

(5) $\int_1^4\frac{xdx}{\sqrt{2+4x}}$；　　(6) $\int_1^5\frac{\sqrt{x-1}}{x}dx$；

(7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+\sin^2x}dx$；　　(8) $\int_0^1\frac{1}{e^x+e^{-x}}dx$；

(9) $\int_0^4\frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}dx$；　　(10) $\int_{-2}^0\frac{dx}{x^2+2x+2}$；

(11) $\int_1^4\frac{1}{x+\sqrt{x}}dx$；　　(12) $\int_1^{e^2}\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$；

*(13) $\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx$；　　*(14) $\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$。

7. 计算下列定积分：

(1) $\int_0^{e-1}\ln(x+1)dx$;　　(2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sec^2 x\,dx$;

(3) $\int_0^{\ln 2} xe^{-x}dx$;　　(4) $\int_1^e x\ln x\,dx$;

(5) $\int_0^{\sqrt{3}} x\operatorname{arc\,tg} x\,dx$;　　(6) $\int_0^{2\pi} x^2\cos x\,dx$;

(7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\,dx$;　　(8) $\int_{\frac{1}{e}}^{e} \sqrt{(\ln x)^2}\,dx$;

*(9) $\int_1^e \sin(\ln x)dx$;　　*(10) $\int_0^1 \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx$。

*8．证明：$\int_a^b f(x)dx=(b-a)\int_0^1 f[a+(b-a)x]$。

*9．证明：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx$。

*10．设 $f(x)$ 是$(-\infty,+\infty)$上周期为 T 的连续函数，试证对任意实数 a，有

$$\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_0^T f(x)dx$$

第三节　定积分的近似计算

应用牛顿-莱布尼兹公式计算定积分必须求出被积函数的原函数。在应用上，有其局限性。因为在实际问题中，有时会遇到下列情况：(1) 不知道被积函数的表达式(如列表的函数，由曲线给出的函数等)；(2) 有些被积函数的原函数不易求得或者不能用初等函数表示。这时通常用近似计算的方法来计算定积分的近似值。

一、矩形法和梯形法

矩形法和梯形法的基本思想是：把曲边梯形分成若干个小曲边梯形，这些小曲边梯形的数值分别用相应的小矩形或小梯形的数值来计算。

把区间$[a, b]$ n 等分，设分点依次是

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

所对应的函数值为 $y_0, y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}, y_n$，每个小区间长度都是 $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$. 矩形法是在每个小区间$[x_{i-1}, x_i]$上用矩形面积$y_{i-1}\Delta x$ 或 $y_i\Delta x$ 近似代替小曲边梯形面积(图 4-7)，则得

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n y_{i-1}\Delta x=\Delta x\sum_{i=1}^n y_{i-1}$$

或

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n y_i\Delta x=\Delta x\sum_{i=1}^n y_i$$

即

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0+y_1+\cdots+y_{n-1}) \tag{1}$$

或

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1+y_2+\cdots+y_n) \tag{2}$$

(1)式和(2)式都称为定积分的**矩形法公式**.

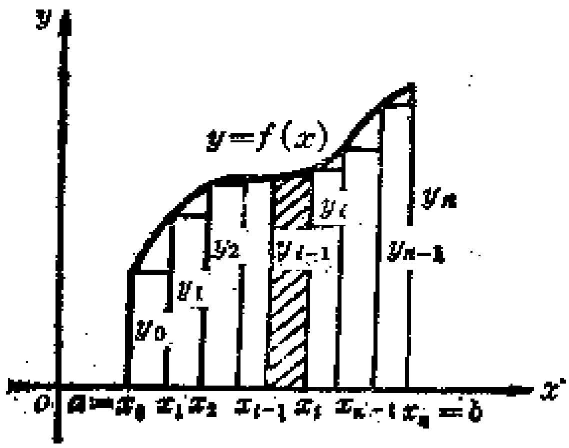


图 4-7

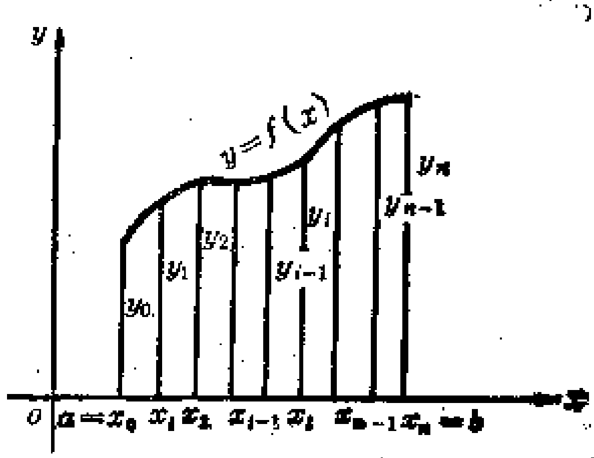


图 4-8

若在每个小区间$[x_{i-1}, x_i]$上用梯形面积$\dfrac{y_{i-1}+y_i}{2}\Delta x$ 近似地代替小曲边梯形面积(图 4-8)，则得

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n \frac{y_{i-1}+y_i}{2}\Delta x=\frac{\Delta x}{2}\sum_{i=1}^n (y_{i-1}+y_i)$$

即

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{1}{2}y_0+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}+\frac{1}{2}y_n\right) \tag{3}$$

(3)式称定积分的**梯形法公式**.

二、抛物线法

抛物线法是对每一小段曲线用抛物线弧段来代替，便得到抛物线公式。

把$[a, b]$分成n（偶数）个等分，其分点为：

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

所对应的函数值分别为$y_0, y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}, y_n$，$\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$，则所求积分可写成

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{x_0}^{x_2}f(x)dx+\int_{x_2}^{x_4}f(x)dx+\cdots+\int_{x_{n-2}}^{x_n}f(x)dx$$

现将通过三点A_0, A_1, A_2的抛物线（图4-9）$y=Ax^2+Bx+C$（其中A, B, C可由此抛物线通过的点$A_0(x_0, y_0)$，$A_1(x_1, y_1)$，$A_2(x_2, y_2)$所确定），在区间$[x_0, x_2]$上的积分

$$\int_{x_0}^{x_2}(Ax^2+Bx+C)dx$$

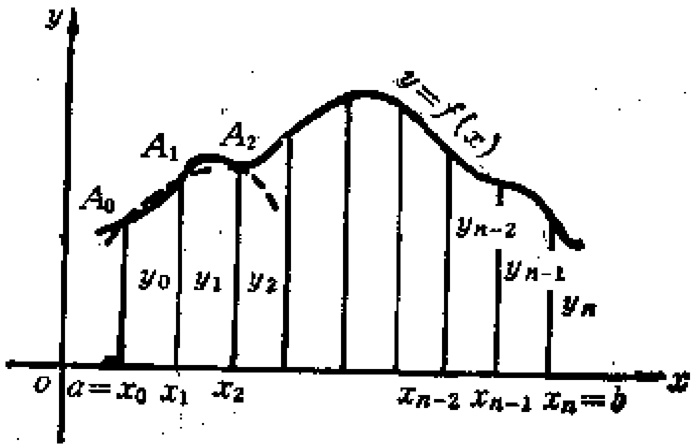


图 4-9

来近似代替积分

$$\int_{x_0}^{x_2}f(x)dx$$

也就是用通过点A_0，A_1、A_2的抛物线下的面积来近似代替曲线$y=f(x)$下的面积（参看图4-9）。

不难证明：

$$\int_{x_0}^{x_2}(Ax^2+Bx+C)dx=\frac{b-a}{3n}(y_0+4y_1+y_2)$$

其中 y_0, y_1, y_2 为 A_0, A_1, A_2 三点的纵坐标。

同样，可得区间$[x_2, x_4]$上积分的近似值为：

$$\frac{b-a}{3n}(y_2+4y_3+y_4)$$

依此类推，可得

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{3n}[(y_0+4y_1+y_2)+(y_2+4y_3+y_4)+\cdots+(y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n)]$$

最后整理得

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{3n}[(y_0+y_n)+4(y_1+y_3+\cdots+y_{n-1})+2(y_2+y_4+\cdots+y_{n-2})] \tag{4}$$

(4)式称为**抛物线公式**，也称**辛卜生(Simpson)公式**。

例 分别用矩形法、梯形法和抛物线法计算$\int_1^2\frac{1}{x}dx$的近似值。

解 取$n=10$, $\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{1}{10}$, $f(x)=\frac{1}{x}$。分点所对应的值为：

$$y_0=1.0000,\ y_1=0.9091,\ y_2=0.8333,$$
$$y_3=0.7692,\ y_4=0.7143,\ y_5=0.6667,$$
$$y_6=0.6250,\ y_7=0.5882,\ y_8=0.5556,$$
$$y_9=0.5263,\ y_{10}=0.5000.$$

用矩形公式得

$$\int_1^2\frac{1}{x}dx\approx\frac{1}{10}(y_0+y_1+\cdots+y_9)=0.7188$$

用梯形公式得

$$\int_1^2\frac{1}{x}dx\approx\frac{1}{20}[y_0+2(y_1+\cdots+y_9)+y_{10}]=0.6938$$

用抛物线公式得

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx \approx \frac{1}{30}[(y_0+y_{10})+4(y_1+y_3+y_5+y_7+y_9)+2(y_2+y_4+y_6+y_8)]=0.6931$$

由于$\int_1^2 \frac{1}{x}dx=\ln x\Big|_1^2=\ln 2$，由查表得$\ln 2\approx 0.6931$。由此可知，用抛物线公式计算定积分的近似值的精确度比矩形公式和梯形公式高。

习 题 4-3

1．已知$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4}$，试把区间[0，1]分成四等分，分别用矩形法、梯形法和抛物线法的公式计算π的近似值（取四位小数）。

2．某烧伤病人需植皮如图 4-10 大小的一块面积，试根据图示的测量数据（单位为cm），用抛物线法计算其面积的近似值。

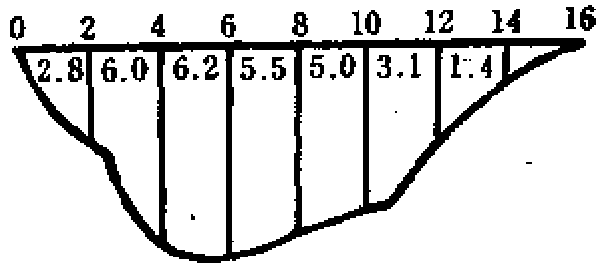


图4-10

3．药物动力学中常按梯形法近似计算血药浓度C-时间t曲线下面积（记为AUC）。现有一名受试者口服某药后测得一些C-t数据如下：

t(h)	0	1	2	3	4	5	6	8	10	12
C(μg/ml)	0	10.2	19.3	21.4	17.7	16.4	13.8	9.8	7.4	5.3

求0～12小时内C-t曲线下面积AUC的近似值。

第四节　积分区间为无限的广义积分

在定积分的定义中，积分区间[a，b]是有限区间。但在医药

学和其它科学技术的实际问题中，会遇到积分区间是无限的情形，因此需把定积分作一些推广。

定义 设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续，且对任意 $b(b>a)$，若极限 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$ 存在，则称此极限值为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上的广义积分 (improper integral)，并记作 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$，即

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

这时也称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ **收敛**或**存在**；若极限不存在，则称该广义积分**发散**或**不存在**。

类似地，设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, b]$ 上连续，且对任意 $a(a<b)$，若极限 $\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$ 存在，则称此极限值为函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, b]$ 上的**广义积分**，记作 $\int_{-\infty}^b f(x)dx$，即

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx \tag{2}$$

并称该广义积分**收敛**或**存在**；若极限不存在，则称该广义积分**发散**或**不存在**。

若对于 $(-\infty, +\infty)$ 内任一实数 c，广义积分 $\int_{-\infty}^c f(x)dx$ 与 $\int_c^{+\infty} f(x)dx$ 都收敛，则称广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ **收敛**或**存在**，且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx \tag{3}$$

若 $\int_{-\infty}^c f(x)dx$ 与 $\int_c^{+\infty} f(x)dx$ 中有一个发散或不存在，则称广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ **发散**或**不存在**。

为使用方便，这里仍保持定积分的记法，并记

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^{+\infty}$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = F(b) - \lim_{a\to-\infty} F(a) = F(x)\Big|_{-\infty}^b$$

及 $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{c} f(x)dx+\int_{c}^{+\infty} f(x)dx$$

$$=F(x)\Big|_{-\infty}^{c}+F(x)\Big|_{c}^{+\infty}=F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

其中$F(x)$为$f(x)$的一个原函数，$F(+\infty)=\lim\limits_{b\to+\infty}F(b)$，$F(-\infty)=\lim\limits_{a\to-\infty}F(a)$。

例 1 计算广义积分$\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}$和$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$。

解 $$\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x\Big|_{-\infty}^{0}$$

$$=0-\lim_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}x=0-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x\Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}x-\lim_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}x$$

$$=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi$$

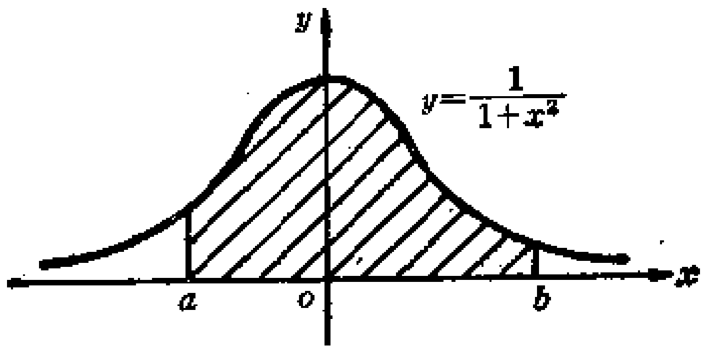


图 4-11

这结果的几何意义是：当$a\to-\infty$，且$b\to+\infty$时，虽然图4-11中阴影部分无限向左右延伸，但是它的面积却有极限值π。

例 2 讨论广义积分$\int_{a}^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx(a>0)$的敛散性。

解 当$p=1$时，则

$$\int_{a}^{+\infty}\frac{1}{x}dx=\ln x\Big|_{a}^{+\infty}=+\infty$$

当$p\neq1$时，则

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\frac{x^{1-p}}{1-p}\bigg|_a^{+\infty}=\begin{cases}+\infty, & p<1\\ \dfrac{1}{p-1}a^{1-p}, & p>1\end{cases}$$

综上所述，当 $p>1$ 时，此广义积分收敛，其值为$\dfrac{1}{p-1}a^{1-p}$；当 $p\leqslant1$ 时，此广义积分发散。

例 3 设静脉注射某药物后，血药浓度(c)－时间(t) 曲线可表为 $c=c_0e^{-kt}$，其中 c_0 为初始血药浓度，$k>0$ 为药物的消除速率常数。试求 c-t 曲线下的总面积 AUC。

解 $\text{AUC}=\int_0^{+\infty}c_0e^{-kt}dt=c_0\int_0^{+\infty}e^{-kt}dt$

$$=c_0\left(-\frac{1}{k}e^{-kt}\right)\bigg|_0^{+\infty}=c_0\left(0+\frac{1}{k}\right)=\frac{c_0}{k}$$

习 题 4-4

1．判断下列广义积分的敛散性，若收敛，求其值：

(1) $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^2}\ (a>0)$；　　(2) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$；

(3) $\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}$；　　(4) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$；

(5) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$；　　(6) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{e^x}dx$；

(7) $\int_0^{+\infty}xe^{-x^2}dx$；　　(8) $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x-2}$。

2．当 k 为何值时，积分$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^k}$收敛？又何时为发散？

*3．设口服某药后体内的血药浓度符合下式：

$$C(t)=\frac{k_aFD}{(k_a-k)V}(e^{-kt}-e^{-k_at})$$

其中 k_a、k、V、D 及 F 均为常数，试求 C-t 曲线下的总面积 AUC。

第五节 定积分的应用

一、定积分的微元法

微元法是应用定积分求具有可加性这一类量的方法，它是定积分概念的概括。在实际问题中，若具有可加性的所求量 A 可归结为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的定积分，则用微元法求量 A 通常可分为两步：

(1) 求微元(即微分)：求出所求量 A 的微元。

在 $[a, b]$ 内任意一个微小区间 $[x, x+dx]$ 上，选择函数 $f(x)$，以"不变代变"找出量 A 的微元，

$$dA = f(x)dx \tag{1}$$

(2) 求积分：将上述微分式两边积分，得所求量 A，

$$\int_0^A dA = \int_a^b f(x)dx$$

即

$$A = \int_a^b f(x)dx \tag{2}$$

微元法的关键是在微小区间 $[x, x+dx]$ 上进行数量分析，正确地找出所求量 A 的微分式 $f(x)dx$，例如，在求变速直线运动的路程问题中，我们分析 $[t, t+dt]$ 这一小段时间区间内物体所经过的路程，这时把这段时间内的运动看作速度等于时刻 t 的速度 $v(t)$ 的匀速运动，所以路程 s 的微元为：

$$ds = v(t)dt$$

然后，两边积分得

$$s = \int_a^b v(t)dt$$

这种方法叫**微元法**，又称**元素法**。

二、平面图形的面积

现应用微元法求由曲线 $y = f(x)$，$y = g(x)$ ($f(x) \geq g(x)$) 及直线 $x = a$，$x = b$ ($a < b$) 围成的平面图形的面积 A。首先在 $[a, b]$ 内取

一微小区间$[x, x+dx]$，它所对应的窄条面积（图 4-12 中的阴影部分）近似等于高为 $f(x)-g(x)$、底为dx的窄矩形面积，故面积的微元为：

$$dA=[f(x)-g(x)]dx$$

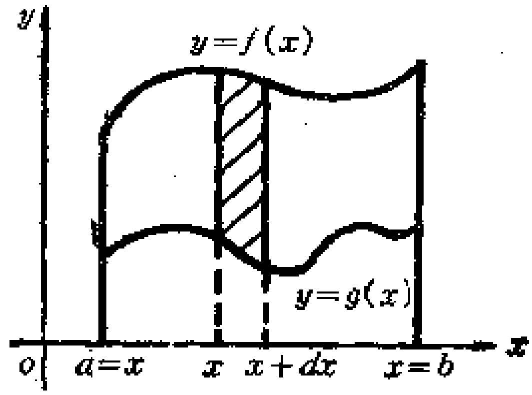


图 4-12

两端求定积分，得所求面积

$$A=\int_a^b[f(x)-g(x)]dx \tag{3}$$

特别地，当 $g(x)=0$ 时，有

$$A=\int_a^b f(x)dx$$

这是本章开始讨论的情况。

当 $f(x)=0$ 时，有

$$A=-\int_a^b g(x)dx$$

这表示在$[a, b]$上 $g(x)\leqslant 0$ 时，曲线 $g(x)$与直线 $x=a$, $x=b$ 和x轴所围面积。

同理，由曲线 $x=\varphi(y)$,$x=\psi(y)$（$\psi(y)\leqslant\varphi(y)$） 及 $y=c$, $y=d$ ($c<d$)所围成的平面图形的面积（图 4-13）为：

$$A=\int_c^d[\varphi(y)-\psi(y)]dy \tag{4}$$

例 1 求由抛物线 $y=4-x^2$ 与直线 $y=3x$ 所围成的图形的面积。

解 为便于分析问题，一般我们先画草图（图 4-14）。为了确

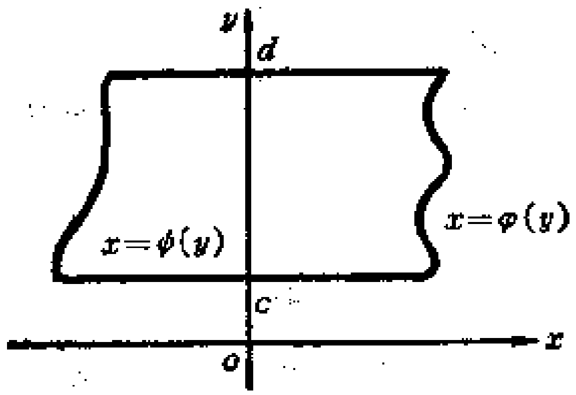


图 4-13

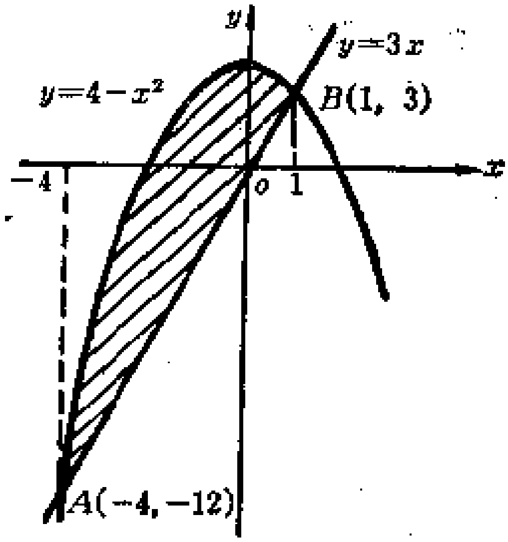


图 4-14

定积分限，求抛物线和直线的交点，即解方程组

$$\begin{cases} y=4-x^2 \\ y=3x \end{cases}$$

得交点 $A(-4,\ -12)$，$B(1,\ 3)$，取 x 为积分变量，由图形可知被积函数和上下限，于是所求面积

$$\begin{aligned} A &= \int_{-4}^{1}[(4-x^2)-3x]dx \\ &= \left(4x-\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right)\Big|_{-4}^{1} \\ &= 20\frac{5}{6} \end{aligned}$$

例 2 求抛物线 $y^2=2x$ 与直线 $y=x-4$ 围成的图形的面积（图 4-15）.

解 解方程组

$$\begin{cases} y^2=2x \\ y=x-4 \end{cases}$$

得交点 $A(2,\ -2)$，$B(8,\ 4)$，取 y 为积分变量，于是

$$A=\int_{-2}^{4}\left(y+4-\frac{y^2}{2}\right)dy=\left(\frac{y^2}{2}+4y-\frac{y^3}{6}\right)\Big|_{-2}^{4}=18$$

例 3 计算椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的面积.

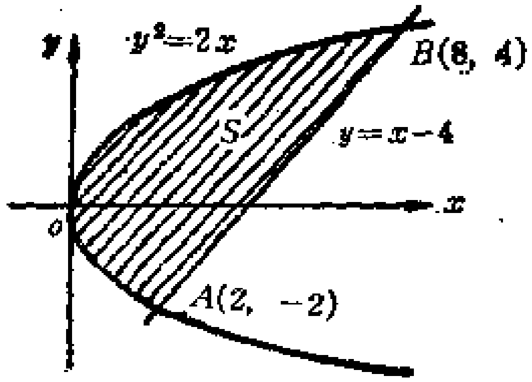


图 4-15

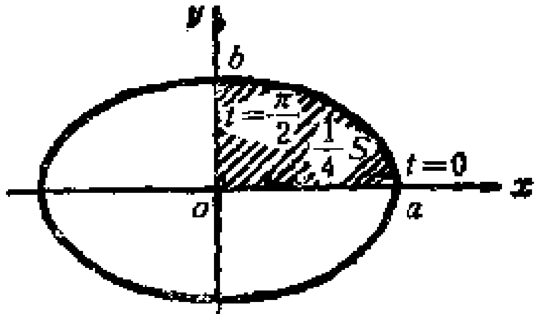


图 4-16

解 由椭圆的对称性，故所求面积应为第一象限部分的4倍(图4-16)，于是

$$A=4\int_0^a y\,dx$$

为避免由椭圆方程中解出 y 以及相应的复杂计算，可利用椭圆的参数方程

$$x=a\cos t,\ y=b\sin t.$$

于是，$dx=-a\sin t\,dt$，当 $x=0$ 时，$t=\frac{\pi}{2}$，$x=a$ 时，$t=0$，于是

$$A=4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t(-a\sin t\,dt)$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}} ab\sin^2 t\,dt=\pi ab$$

当 $a=b$ 时，便得圆的面积 πa^2。

一般地，当曲边梯形的曲边由参数方程

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$$

给出时，曲边梯形的面积为：

$$A=\int_{t_1}^{t_2}\psi(t)\varphi'(t)dt \tag{5}$$

其中 t_1 及 t_2 是对应于曲线的起点及终点的参数值。

三、旋转体的体积

现在我们求由曲线 $y=f(x)$（假定它不与 x 轴相交）与直线

$x=a$, $x=b$ 及x轴所围成的平面图形绕x轴旋转一周而成的旋转体(图 4-17)的体积。

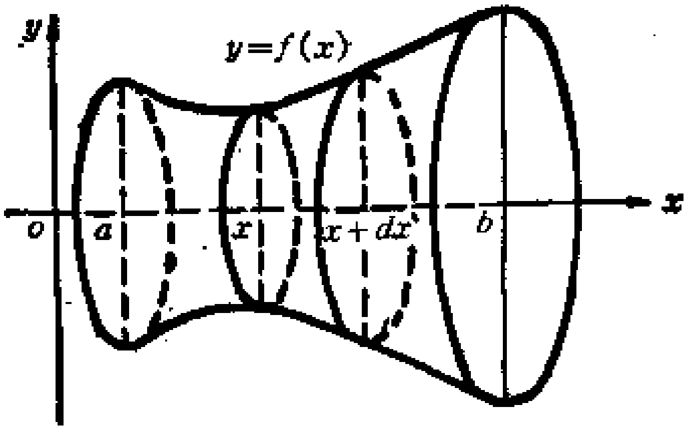


图 4-17

取x为积分变量，在$[a, b]$内任取一微小区间$[x, x+dx]$，对应于这个小区间上的旋转体的体积可用底半径为$f(x)$，高为dx的薄圆柱体的体积来近似代替，即体积微元为：

$$dV_x=\pi[f(x)]^2dx$$

从而
$$V_x=\pi\int_a^b[f(x)]^2dx \tag{6}$$

或
$$V_x=\pi\int_a^b y^2dx$$

类似地，由曲线$x=\varphi(y)$(假定它不与y轴相交)与直线$y=c$, $y=d$及y轴所围成的平面图形绕y轴旋转一周而成的旋转体的体积为：

$$V_y=\pi\int_c^d[\varphi(y)]^2dy \tag{7}$$

或
$$V_y=\pi\int_c^d x^2dy$$

例4 计算由椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 绕x轴旋转而成的旋转体的体积。

解 由椭圆的对称性可知，此椭圆的体积为

$$V_x=2\pi\int_0^a y^2dx$$

$$=2\pi\frac{b^2}{a^2}\int_0^a (a^2-x^2)dx=2\pi\frac{b^2}{a^2}\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a$$

$$=\frac{4}{3}\pi ab^2$$

若此椭圆绕 y 轴旋转，则此旋转体体积为，

$$V_y=2\pi\int_0^b x^2dy$$

$$=2\pi\frac{a^2}{b^2}\int_0^b (b^2-y^2)dy=2\pi\frac{a^2}{b^2}\left(b^2y-\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^b$$

$$=\frac{4}{3}\pi a^2b$$

当 $a=b=R$ 时，便得半径为 R 的球的体积为：

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3$$

例5 计算抛物线 $y=x^2$ 与 $x=1$，$x=0$ 及 x 轴所围成的平面图形绕 y 轴旋转一周而成的旋转体的体积(图 4-18)。

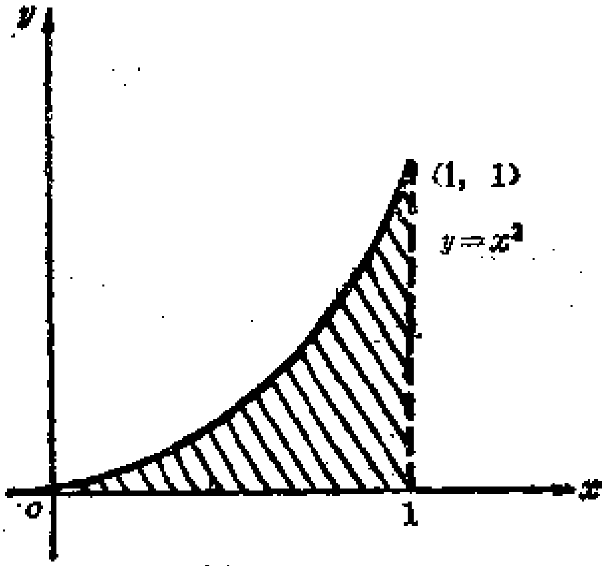


图 4-18

解 首先求出抛物线 $y=x^2$ 与 $x=1$ 的交点为(1，1)。所要求的旋转体的体积为：

$$V=\pi\int_0^1 [1-x^2]dy$$

$$=\pi\int_0^1 [1-y]dy=\pi\left(y-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\pi$$

四、变力所作的功

一物体在常力 F 作用下沿力的方向位移 s 时，所作的功为 $W=F\cdot s$。但是在许多情况下，力 F 是在不断变化的，它是位移 s 的函数 $F(s)$。这时就不能直接用上面的公式来计算变力所作的功。设物体在变力 $F(s)$ 的作用下沿直线由 $s=a$ 移动到 $s=b$，且力的方向与位移方向一致，我们先在区间 $[a, b]$ 内任取微小区间 $[s, s+ds]$，在这小区间上以物体在 s 处所受的力 $F(s)$，来代替这小段位移 ds 上物体所受的力，则功的微元为：

$$dW=F(s)ds$$

从而物体由 $s=a$ 位移到 $s=b$ 时变力所作的功为：

$$W=\int_a^b F(s)ds \tag{8}$$

例6 将一根弹簧从平衡位置拉长 s，求拉力（即克服弹性力）所作的功。

解 将弹簧一端固定，另一端的平衡位置取为坐标原点，弹簧的伸长方向为 x 轴的正方向（图 4-19）。由虎克定律：在弹性限度内，将弹簧拉长所用的力 F 与弹簧的伸长 x 成正比，即

$$F(x)=kx \quad (k\text{ 为弹性系数})。$$

从而 $$W=\int_0^s F(x)dx=\int_0^s kxdx=\frac{1}{2}ks^2$$

例7 有一形如圆台的水桶，高 3m，上下底半径分别为 1 m 及 2m，盛满了水。若将水全部抽出，需作多少功？

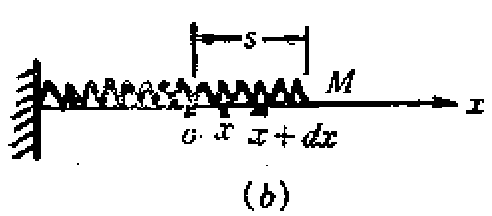


图 4-19

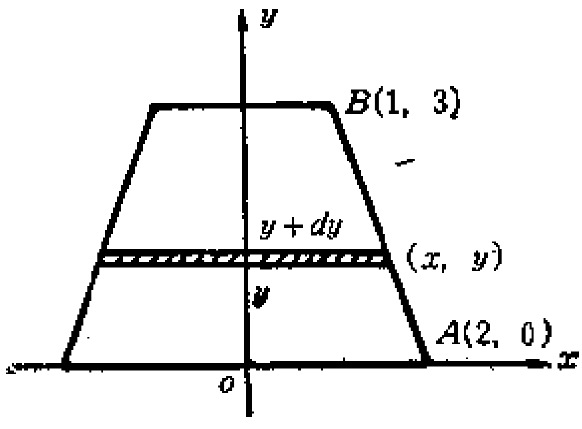


图 4-20

解 取坐标系如图 4-20 所示，以 y 为积分变量，在$[0, 3]$内取小区间 $[y, y+dy]$，从 y 到 $y+dy$ 这薄层水近似地看作圆柱体，其体积为：

$$dV = \pi x^2 dy$$

这层水距顶面为$(3-y)$，水的密度为 $\gamma = 1(\text{t/m}^3)$，直线 AB 的方程为 $x = 2 - \frac{y}{3}$，故抽出这薄层水所作的功为：

$$\begin{aligned} dW &= \gamma dV \cdot (3-y) = \gamma \pi x^2 dy \cdot (3-y) \\ &= \pi(3-y)\left(2-\frac{y}{3}\right)^2 dy \end{aligned}$$

于是将水全部抽出需作功为：

$$\begin{aligned} W &= \pi \int_0^3 (3-y)\left(2-\frac{y}{3}\right)^2 dy \\ &= \pi\left(12y - 4y^2 + \frac{5}{9}y^3 - \frac{y^4}{36}\right)\Big|_0^3 \\ &= \frac{51}{4}\pi(\text{t} \cdot \text{m}) \end{aligned}$$

下面讨论气体膨胀所作的功。

设某种定量气体密闭在附有活塞的圆筒内(图 4-21)，若以 Q 和 P 分别表示活塞的面积和单位面积上的压力(压强)，则气体膨胀而使活塞承受的压力是

$$F = P \cdot Q$$

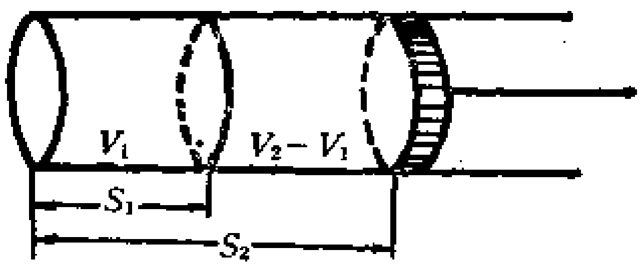


图 4-21

气体膨胀使活塞由距筒底 S_1 处移到 S_2 处时所作的功为：

$$W = \int_{S_1}^{S_2} PQds$$

如果活塞由 S_1 移到 S_2 时，气体的体积由 V_1 变到 V_2，而 V 又是 S 的函数：$V=Q\cdot S$，于是 $dV=Qds$，故有

$$W=\int_{V_1}^{V_2}PdV \tag{9}$$

公式(9)为气体膨胀所作的功的计算公式。

例 8 求服从波义耳–马略特定律 $PV=c$ 的气体的体积由 V_1 变到 V_2 时所作的功。

解 因 $PV=c$（c 为常数），即 $P=\frac{c}{V}$，

故 $$W=\int_{V_1}^{V_2}PdV=\int_{V_1}^{V_2}\frac{c}{V}dV=c\ln\frac{V_2}{V_1}$$

如果 P_1 与 P_2 表示过程开始与最终时的气体压强，则 $P_1V_1=P_2V_2=c$，即 $\frac{V_2}{V_1}=\frac{P_1}{P_2}$，所以，气体膨胀所作的功也可表为：

$$W=c\ln\frac{P_1}{P_2}$$

五、连续函数的平均值

设有 n 个数值 $y_1, y_2, \cdots, y_n$，称 $\frac{1}{n}(y_1+y_2+\cdots+y_n)$ 为这 n 个数值的**算术平均值**。在实际中，常常要求连续函数 $f(x)$ 在某一区间 $[a, b]$ 上的平均值。例如，物理中求平均速度、平均压强及药物的平均血药浓度等等。

若把区间 $[a, b]$ n 等分，其分点：

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_n=b$$

每个小区间长度 $\Delta x=\frac{b-a}{n}$，在区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取一点 ξ_i，则我们把这 n 个函数值 $f(\xi_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 的算术平均值当 $n\to\infty$ 时的极限，定义为**函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的平均值**，记为 $\bar{y}$，即

$$\bar{y}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i).$$

因为 $\Delta x=\frac{b-a}{n}$，于是

$$\overline{y} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x$$
$$= \frac{1}{b-a} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x$$

由定积分定义可知，$f(x)$在$[a, b]$上的平均值为：

$$\overline{y} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \tag{10}$$

由(10)式可见，函数$f(x)$在$[a, b]$上的平均值$\overline{y}$正是积分中值定理(第四章第一节)中的$f(\xi)$。

例 9 已知某化学反应的速度为时间t的函数$v(t)=ake^{-kt}$，其中a, k是常数，求在$[0, T]$这段时间内的平均反应速度。

解
$$\overline{v} = \frac{1}{T}\int_0^T ake^{-kt}dt = -\frac{1}{T}ae^{-kt}\Big|_0^T$$
$$= \frac{a}{T}(1-e^{-kT})$$

例 10 一定质量的理想气体，在等温过程中体积从V_a膨胀到V_b，求在此过程中气体压强的平均值。

解 在等温过程中，一定质量的理想气体的压强P和体积V之间的关系为：

$$PV = c$$

其中c为常数，因此，$P=\frac{c}{V}$，于是得气体压强的平均值为：

$$\overline{P} = \frac{1}{V_b - V_a}\int_{V_a}^{V_b}\frac{c}{V}\,dV = \frac{c}{V_b - V_a}\ln V\Big|_{V_a}^{V_b}$$
$$= \frac{c}{V_b - V_a}\ln\frac{V_b}{V_a}.$$

例 11 在某一实验中，先让病人禁食（以便降低体内的血糖水平），然后通过注射给以大量的葡萄糖，假定实验测定血液中胰岛素浓度$c(t)$(单位/毫升)符合下列函数：

$$c(t)=\begin{cases} t(10-t), & 0\leqslant t\leqslant 5 \\ 25e^{-k(t-5)}, & t>5 \end{cases}$$

其中$k=\frac{1}{20}\ln 2$，时间t的单位为分，求1小时内血液中胰岛素的平均浓度。

解 $\overline{c(t)}=\dfrac{1}{60}\int_0^{60}c(t)dt=\dfrac{1}{60}\left[\int_0^5 c(t)dt+\int_5^{60}c(t)dt\right]$

$$=\frac{1}{60}\left[\int_0^5 t(10-t)dt+\int_5^{60}25e^{-k(t-5)}dt\right]$$

$$=\frac{1}{60}\left(5t^2-\frac{1}{3}t^3\right)\Big|_0^5+\frac{5}{12}\left(-\frac{1}{k}e^{-k(t-5)}\right)\Big|_5^{60}$$

$$=\frac{1}{60}\left(125-\frac{125}{3}\right)-\frac{5}{12k}(e^{-55k}-1)$$

≈ 11.63(单位/毫升)

习 题 4-5

1．求下列曲线围成的平面图形的面积：

(1) $y^2=2x, x=2y$；

(2) $y=\dfrac{1}{x}, x=1, x=4, y=0$；

(3) $y=x^3, y=8$, y 轴；

(4) $y=e^x, y=e^{-x}, x=1$；

(5) $y=|\lg x|, y=0, x=0.1, x=10$；

(6) 抛物线$(x-1)^2=-8(y-8)$与 x 轴；

*(7) $x=y^{2/3}, y=8, x=0$；

*(8) $y=x, y=x+\sin^2 x\,(0\leqslant x\leqslant \pi)$。

2．求由 $y=-x^2+4x-3$ 及其在点$(0,-3)$和点$(3,0)$处的切线所围成图形面积。

3．求由 $y=x^4-2x^2+3$，x 轴及过曲线的两个极小点且与 y 轴平行的直线所围图形面积。

*4．求由摆线 $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$的一拱与横轴所围图形面积。

5．求下列曲线围成的图形绕指定轴旋转所产生的旋转体的体积：

(1) $y=x^2, x=y^2$，绕 x 轴；

(2) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1, y=\pm b, x=0$，绕 y 轴；

*(3) $x^2+(y-b)^2=R^2\,(0<R<b)$，绕 x 轴；

*(4) $x^2+y^2=a^2$，绕 $x=-b\,(b>a>0)$；

(5) $y=4x, y=4x^2$，绕 x 轴；

(6) $xy=a(a>0),x=a,x=2a,y=0$，绕 x 轴。

6．一物体在某介质中按规律 $s=t^2$ 作直线运动，其中 s 是 t 时间内所经过的路程。介质的阻力与速度的平方成正比，试求物体由 $s=0$ 到 $s=a$ 时，克服介质阻力所作的功。

7．假定弹簧所受的压力与压缩的距离成正比。若 1kg 的力能使弹簧压缩 1cm，要使弹簧压缩 10cm 时，问需作功多少？

8．底半径为 3m，高为 2m 的圆锥形水池装满了水，欲将池水全部抽出，需作多少功？

9．半径为 r(m) 的半球形水池，充满了水，把池内的水完全吸尽，问作功多少？

10．假设某气体服从泊松公式 $PV^{\alpha}=c$，其中 α 为大于 1 的常数。试证当气体的体积由 V_0 变到 V_1 时所作的功为 $\dfrac{1}{\alpha-1}(V_0P_0-V_1P_1)$。

*11．设有质量为 M 的均匀金属杆长为 L，其延长线左侧 a 处有一质量为 m 的小球，求杆对小球的万有引力。

*12．设一固定质点的质量为 M，动点的质量为 m，依万有引力定律，动点向定点作直线运动，计算此两点由最初距离 d 变到一半时，引力所作的功。

13．计算在等温过程中，气体由 V_1 膨胀到 V_2 时所作的功，假定此气体服从范德瓦尔定律

$$\left(P+\frac{a}{V^2}\right)(V-b)=kT$$

*14．油在半径为 R 的输油管中流动，各点的流速 $v=\dfrac{v_0}{1+r}$，式中 v_0 为圆心处的流速，r 为所考虑的点到圆心的距离。求单位时间内通过油管截面的油量。

*15．血液在半径为 R 的血管中流动，血管横截面上距中心处为 r 的流速 $v=k(R^2-r^2)$（k 为常数），求单位时间内通过该截面的血流量。

16．物体以初速度 $v_0=10$cm/s 开始下落，求 5s 内速度 v 的平均值。

17．已知半波整流后的交流电的电流强度 $I(t)$ 与 t 的函数关系为：

$$I(t)=\begin{cases} I_m\sin\omega t, & 0\leqslant t\leqslant\dfrac{T}{2} \\ 0, & \dfrac{T}{2}<t\leqslant T \end{cases}$$

求在一个周期 T 内的 $I(t)$ 的平均值。

第五章 微分方程

我们在研究医学以及其它科学技术的实际问题时，往往要寻求各个变量之间的函数关系。这种函数关系有时可直接找到，有时则可以通过建立含有自变量、未知函数及其导数的关系式——微分方程，来求出未知函数，本章将论述这方面的内容。

第一节 微分方程的基本概念

下面通过具体的例子来说明有关微分方程的几个基本概念。

例 1 已知一曲线过点 $A(1, 2)$，且该曲线上任意点 $P(x, y)$ 处的切线斜率为 $2x$.求此曲线的方程。

解 设所求曲线的方程为 $y=f(x)$. 由导数的几何意义可知，$y=f(x)$应满足方程

$$\frac{dy}{dx}=2x \tag{1}$$

又因所求曲线通过点 $A(1, 2)$，所以 $y=f(x)$还应满足条件：

$$\text{当 } x=1 \text{ 时}, y=2 \tag{2}$$

为了求出未知函数，将(1)式化成

$$dy=2x\,dx$$

对上式两端积分，得

$$y=\int 2x\,dx+C=x^2+C \tag{3}$$

其中 C 是任意常数*。

按题意，所求曲线要满足条件(2)，将它代入(3)式，得 $C=1$.

故所求曲线的方程为：

---

* 为了突出任意常数 C，在微分方程中，我们约定 $\int f(x)dx$ 只表示一个原函数，任意常数 C 要明确写出。

$$y=x^2+1 \tag{4}$$

例 2 一质点在重力作用下自由下落，若不计空气阻力，求质点在时刻 t 的位移 s。

解 取质点下落的方向为位移 s 的正方向，选定坐标原点。设质点在初始时的位置为 s_0。在时刻 t 的位移为 $s=s(t)$，由二阶导数的物理意义有

$$\frac{d^2s}{dt^2}=g \tag{5}$$

又因初速度为零，所以 $s=s(t)$ 还应满足

$$\text{当 } t=0 \text{ 时}, s=s_0,\ \frac{ds}{dt}=0 \tag{6}$$

将(5)式写成

$$d\left(\frac{ds}{dt}\right)=g\,dt$$

两端积分，得

$$\frac{ds}{dt}=gt+C_1 \tag{7}$$

再积分一次，得

$$s=\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2 \tag{8}$$

其中 C_1, C_2 为任意常数。

把条件 $t=0$, $\frac{ds}{dt}=0$ 代入(7)式，得

$$C_1=0$$

把条件 $t=0$, $s=s_0$ 代入(8)式，得

$$C_2=s_0$$

因此质点在时刻 t 的位移为：

$$s=\frac{1}{2}gt^2+s_0$$

特别地，当物体的初始位置在坐标原点时，有

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

在上面两个例子中，方程(1)和(5)都是含有未知函数的导数的方程。我们把含有自变量、未知函数及其导数(或微分)的方程

称为**微分方程**(differential equation)。在微分方程中，自变量、未知函数可以不出现，但未知函数的导数(或微分)必须出现。方程(1)和(5)都是微分方程。

微分方程中所出现的最高阶导数的阶数称为**微分方程的阶**。方程(1)和(5)分别是一阶和二阶微分方程。

满足微分方程的函数称为**微分方程的解**。也就是说，如果把某个函数以及它的导数代入微分方程，能使方程成为恒等式，这个函数就是该微分方程的解。解的图形称为**积分曲线**。如果微分方程的解中含有的独立的任意常数的个数与微分方程的阶数相同，这样的解称为**微分方程的通解**。函数(3)和(4)是方程(1)的解，函数(8)和(9)是方程(5)的解，而方程(1)和(5)的通解只能分别是函数(3)和(8)。

由于通解中含有任意常数，故通解所表达的是某一类运动过程的一般规律，要确切地表达某一具体过程的特定规律，必须确定解中的任意常数。为此，要根据问题的实际情况，提出能确定这些任意常数的条件，这种条件习惯上称为**初始条件**.如例1中的(2)式和例2中的(6)式就分别是方程(1)和(5)的初始条件。

通解中的任意常数由初始条件确定后所得到的解，称为**微分方程的特解**。函数(4)和(9)分别是方程(1)和(5)满足各自的初始条件(2)和(6)的特解.

用微分方程来解决实际问题时，除了列出微分方程外，还要给出初始条件，我们所要求的是既满足方程又满足初始条件的特解。

习　题　5-1

1. 什么叫微分方程和微分方程的阶?下列等式中哪几个是微分方程?并说出它的阶数.

(1) $y''+3y'+2y=x$;　　(2) $y^2-3y+2=0$;

(3) $dy=(2x+6)dx$;　　(4) $\frac{dN}{dt}=r(M-N)N$.

2. 验证 $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}$（其中 C_1、C_2 为任意常数）是微分方程 $y''-2y'-3y=0$ 的通解。

3. 验证 $y=Ce^{-x}+x-1$（其中 C 是任意常数）是微分方程 $\frac{dy}{dx}+y=x$ 的通解。并求出满足初始条件 $y|_{x=0}=1$ 的特解。

4. 已知一曲线通过点(1,0)，且该曲线上任意点 $P(x,y)$ 处切线的斜率为 x^2，求该曲线的方程。

5. 一质点由原点开始($t=0$)沿直线运动，已知在时刻 t 的加速度为 t^2-1，而在 $t=1$ 时，速度为 $\frac{1}{3}$，求位移 x 与时间 t 的函数关系。

第二节　可分离变量的微分方程

形如
$$\frac{dy}{dx}=f(x)\cdot g(y) \tag{1}$$
的方程，称为**可分离变量的微分方程**。当 $g(y)\neq0$ 时，(1)式变为
$$\frac{dy}{g(y)}=f(x)\cdot dx \tag{2}$$
方程(2)的右端 dx 的系数只含变量 x，左端 dy 的系数只含变量 y，此时方程中的变量已被分离。由(1)变为(2)称为**分离变量**。

对(2)式的两端积分
$$\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx+C$$
这样便可得微分方程(1)的通解。

例 1　求方程 $x+y\frac{dy}{dx}=0$ 的通解。

解　这是一个可分离变量的微分方程，将变量分离，得
$$ydy=-xdx$$
两端积分，得
$$\frac{1}{2}y^2=-\frac{1}{2}x^2+C_1$$
或
$$x^2+y^2=C$$
这个通解是隐函数，它表示一簇圆。

例 2　在化学反应中，若化学反应速度与反应物当时的浓度

成正比，则称为一级反应。设时刻 t 反应物的浓度为 $C=C(t)$，初始浓度为 C_0，求在一级反应情形下，反应物浓度的变化规律。

解 由一级反应的意义得微分方程

$$\frac{dC}{dt}=-kC \tag{3}$$

其中 $k>0$ 为反应速率常数。初始条件为：

当 $t=0$ 时，$C=C_0$。

将方程(3)分离变量，有

$$\frac{dC}{C}=-kdt$$

两端积分，得

$$\ln C=-kt+\ln A$$

其中 $\ln A$ 为任意常数。上式写成

$$C=Ae^{-kt}$$

代入初始条件，得 $A=C_0$。所以在时刻 t 反应物浓度的变化规律为：

$$C=C_0e^{-kt} \tag{4}$$

微分方程(3)是许多自然现象的数学模型。例如，放射性同位素的衰减，细菌和病毒的繁殖，电容器的充放电，以及某些药物在体内血液中浓度的变化等。在医学和生物学中，凡是满足方程(3)$\left(\text{或方程}\frac{dC}{dt}=kC\right)$的变化过程，称为一级速率过程，$k$ 称为一级速率常数。由(4)式可知，在一级速率过程中，被考察的量是呈指数衰减(或指数增加)的。

例 3 为描述某个封闭人群中人口变化的规律，通常假设在时刻 t 的人口数 $N(t)$ 满足方程

$$\frac{dN}{dt}=R(t,\ N)N \tag{5}$$

其中函数 $R(t,\ N)$ 表示人口的相对增长率，它是影响人口繁殖和死亡的各种因素的综合表现。在最简单的情况下，R 等于人口的出生率 b 与死亡率 d 之差，即 $R=b-d$。这时(5)式成为：

$$\frac{dN}{dt}=(b-d)N \tag{6}$$

当 $b-d$ 为常数时，由上例可知，方程(6)的解为：

$$N(t)=N_0e^{(b-d)t} \tag{7}$$

其中 N_0 为 $t=0$ 时的人口数，这说明人口呈指数增长或指数衰减。

1798 年马尔萨斯(Malthus)发现，对于人口的出生率大于死亡率($b>d$)的人群，方程(7)表明了人口将不断增长而趋于无穷大，即

$$\lim_{t\to\infty}N(t)=+\infty$$

这个结论显然与现实世界不符合。实际上，器官、有机体和人群都不是无限增长的，它们虽在初期呈指数增长，但随后增长速率逐渐减少，因而最终的数量是有限制的，这就是所谓"有限增长"。

为了描述人群的有限增长，假设相对增长率 $R(t, N)$ 是人口数 N 的函数，而且当 N 趋近于人口的最大值 M 时，$R(N)$ 趋近于零。1839 年维尔豪斯特(Verhulst)提出了著名的 Logistic 方程：

$$\frac{dN(t)}{dt}=r[M-N(t)]N(t) \tag{8}$$

其中 $r>0$ 为常数。

方程(8)也是可分离变量的，事实上，我们有

$$-\frac{M}{(M-N)N}\cdot dN=-rMdt$$

两端积分，得

$$-\int\left(\frac{1}{M-N}+\frac{1}{N}\right)dN=-rMt+\ln C$$

$$\ln\frac{M-N}{N}=-rMt+\ln C$$

$$\frac{M-N}{N}=Ce^{-rMt}$$

$$M=N(1+Ce^{-rMt})$$

于是 Logistic 方程的解为：

$$N(t)=\frac{M}{1+Ce^{-rMt}} \tag{9}$$

其中 C 为任意常数。方程(9)所表示的曲线称为 **Logistic 曲线**。

Logistic 方程除了用于描述动物群体的增长外，还常用于描述有机体的繁殖、流行病的传播、肿瘤以及森林的增长等许多具有“有限增长”特征的自然规律。它常出现于医学、生物学的文献中。

例 4 求方程 $y''=\ln x$ 的通解。

解 这是一个二阶微分方程，我们可以通过降阶法，将它变成一阶微分方程。

令 $y'=p(x)$，则 $y''=\frac{dp}{dx}$，于是原方程成为：

$$\frac{dp}{dx}=\ln x$$

这是一个关于函数 p 的一阶微分方程，而且是可分离变量的。分离变量后积分，得

$$p=\int \ln x dx + C_1$$

$$= x\ln x - x + C_1$$

即

$$\frac{dy}{dx}=x\ln x - x + C_1$$

再积分一次，便得到原方程的通解

$$y=\int (x\ln x - x)dx + C_1x + C_2$$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{3}{4}x^2+C_1x+C_2$$

此例的解法告诉我们，型如 $y''=f(x)$，$y'''=f(x)$ 的微分方程，都可用降阶的方法求出其解。

习 题 5-2

1．求下列微分方程的通解：

(1) $y\sqrt{1-x^2}\,dy=xdx$；

(2) $\frac{dy}{dx} = -y$;

(3) $\frac{dy}{dx} = -k(2-y)$;

(4) $2(xy+x)dx + (y - x^2y)dy = 0$;

(5) $dx = a(\cos t\,dt + x\sin t\,dt)$;

(6) $(\cos y - 2x)' = 1$.

2. 求下列微分方程的通解：

(1) $y'' = (x-2)e^{-x}$;

(2) $y''' = \frac{1}{(1-x)^2}$.

3. 求满足下列微分方程及初始条件的特解：

(1) $\frac{dy}{dx} = 2y + 1$, $y(0) = 3$;

(2) $1 + y^2 - xyy' = 0$, $y(1) = 0$;

(3) $\frac{dm}{dt} = k(2-m)m$, $m(0) = 1$, $m(1) = \frac{3}{2}$;

(4) $y'' = 1 - e^{-x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

4. 已知 I^{131}(碘 ^{131}) 的放射速率与它当时的放射性强度成正比，已知 I^{131} 原有的放射性强度为 15mc(毫居里)，问 12 天后还剩多少天(I^{131} 的半衰期为 8)?

5. 每毫升含 400 单位的某药物，经过 2 个月后分析其含量为 380单位，已知药物的分解为一级反应，问

(1) 配置 3 个月后药物含量为多少单位?

(2) 如药物低于 300 单位无效，问该药物的有效期是多少?

6. 物体温度降低的速度与物体自身的温度和它周围介质的温度之差成正比。若最初温度为 100°C 的物体，置于恒保持 15°C 的空气中，1 分钟后，物体温度降到 85°C，问需多少时间此物体降到 35°C?

7. 已知曲线过点 (0,1)，且其上任一点 (x, y) 处的切线斜率等于该点的横坐标与纵坐标乘积之相反数，求此曲线的方程。

8. 列车在直线轨道上以 20 m/s 的速度行驶，制动时列车获得加速度 -0.4m/s^2. 问开始制动后要经过多少时间才能把列车刹住? 在这段时间内列车行驶了多少路程?

第三节　一阶线性微分方程

一、一阶线性微分方程

形如
$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x) \tag{1}$$
的方程，称为**一阶线性微分方程**．这类方程的特征是：未知函数及其导数都是线性的（一次的）．

如果 $Q(x)\equiv 0$，方程(1)成为
$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0 \tag{2}$$
称它为与方程(1)相对应的**线性齐次方程**，方程(1)就称为**线性非齐次方程**．

为求出线性非齐次方程(1)的解，我们先解线性齐次方程(2)，它是可分离变量的，分离变量，有
$$\frac{dy}{y}=-P(x)dx$$
$$\ln|y|=-\int P(x)dx+\ln C$$
$$y=Ce^{-\int P(x)dx} \tag{3}$$
其中 C 为任意常数．这是齐次方程(2)的通解．

如何求对应的非齐次方程的解呢？首先注意(3)式中的 C 是任意常数时，它是(2)的解，因而不可能是(1)的解．但是能否用一个适当的函数 $h(x)$ 代替常数 C，使
$$y=h(x)e^{-\int P(x)dx} \tag{4}$$
是方程(1)的解呢？为此，可把(4)式代入(1)式让它满足方程，如果由此能确定 $h(x)$，则方程(1)的解就可得到了．

将(4)式对 x 求导，得
$$\frac{dy}{dx}=h'(x)e^{-\int P(x)dx}-h(x)P(x)e^{-\int P(x)dx}$$
$$=h'(x)e^{-\int P(x)dx}-P(x)y$$

把上式代入方程(1)，得

$$h'(x)e^{-\int P(x)dx}-P(x)y+P(x)y=Q(x)$$

即
$$h'(x)=Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

积分，得

$$h(x)=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}+C$$

由于$P(x)$，$Q(x)$为已知，因而$h(x)$便确定了。把$h(x)$代回(4)式，就得到了线性齐次方程(1)的通解

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left\{\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right\} \tag{5}$$

以上求线性非齐次方程通解的方法称为**常数变易法**。其特点是将对应齐次方程的通解中的任意常数变为待定函数，然后代入原方程求出这个待定函数，这样就可得到所求的解。在解一阶线性方程时，(5)式可作为通解的公式使用。但我们也可按上述方法求解，这样既可掌握常数变易法，又不必死记公式。

例 1 求方程$\cos x\dfrac{dy}{dx}+y\sin x=1$的通解。

解 将方程写成如(1)式的标准形式

$$\frac{dy}{dx}+y\operatorname{tg}x=\frac{1}{\cos x}$$

在此一阶线性方程中，$P(x)=\operatorname{tg}x$，$Q(x)=\dfrac{1}{\cos x}$。

用常数变易法求解。先求对应齐次方程

$$\frac{dy}{dx}+y\operatorname{tg}x=0$$

的通解。分离变量，得

$$\frac{dy}{y}=-\operatorname{tg}x\,dx$$

积分，得

$$\ln y=\ln\cos x+\ln C$$

即
$$y=C\cdot\cos x$$

再用常数变易法求非齐次方程的通解。

设$y=h(x)\cos x$，则

$$y' = h'(x)\cos x - h(x)\sin x$$

代入原方程，化简后得

$$h'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

分离变量后，再积分得

$$h(x) = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx + C$$

$$= \operatorname{tg} x + C$$

故原方程的通解为：

$$y = (\operatorname{tg} x + C)\cos x$$

$$= \sin x + C\cos x$$

读者亦可利用公式(5)，直接求出其解，所得结果相同。

例2 有一容器内盛清水100L，现将浓度为4g/L的盐水以每分钟5L的速度注入容器，并不断搅拌使混合液迅速达到均匀，同时混合液以每分钟3L的速率流出容器.问在任一时刻t容器内的含盐量x是多少？在20 min末容器中的含盐量是多少？

解 这类问题称为混合问题，解决这类问题的基本思想是：设在时刻t，容器内的含盐量为$x(t)$，当时间从t变到$t+\Delta t$时，$x(t)$有改变量Δx，设在这段时间内，注入与流出容器内的盐量分别是Δy与Δz，那么

含盐改变量 = 注入盐量 − 流出盐量。

或

$$\Delta x = \Delta y - \Delta z$$

由此得

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta y}{\Delta t} - \frac{\Delta z}{\Delta t}$$

$\Delta t \to 0$，得

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} - \frac{dz}{dt} \tag{6}$$

这就是解决混合问题的基本方程。

对于一个系统的某个量而言，(6)式表示在系统中：

某个量的变化率 = 其输入变化率 − 其输出变化率。

由题意可知，在时刻 t，容器中含盐量的变化率为 $\frac{dx}{dt}$，盐量注入的变化率为 $4(g/L)\times 5(L/min)=20(g/min)$，盐量流出的变化率为：

$$\frac{x}{100+(5-3)t}(g/L)\times 3(L/min)=\frac{3x}{100+2t}(g/min)$$

由(6)式，有

$$\frac{dx}{dt}=20-\frac{3x}{100+2t}$$

即
$$\frac{dx}{dt}+\frac{3x}{100+2t}=20$$

这是一阶线性方程，由通解公式(5)得到它的通解

$$x=e^{-\int\frac{3}{100+2t}dt}\left\{\int 20e^{\int\frac{3}{100+2t}dt}dt+c\right\}$$

$$=(100+2t)^{-\frac{3}{2}}\left\{4(100+2t)^{\frac{5}{2}}+c\right\}$$

由于一开始容器中盛的是清水，所以初始条件为 $x(0)=0$。将此条件代入上式，得 $c=-4\times 10^5$，于是

$$x=400+8t-4\times 10^5(100+2t)^{-\frac{3}{2}}$$

这就是容器中的含盐量与时间的关系。

当 $t=20$ 时，$x=400+160-4\times 10^5\times 140^{-\frac{3}{2}}\approx 318.5$。故在20分钟末容器中的含盐量为 318.5g。

二、贝努里方程

形如
$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^{\alpha} \tag{7}$$

的方程，称为**贝努里**(Bernoulli)**方程**，其中 α 为常数。

当 $\alpha=0$ 时，(7)式是线性方程；当 $\alpha=1$ 时，(7)式是可分离变量的方程。

当 $\alpha\neq 0, 1$ 时，可以通过变量变换，将它化成线性方程。为此，将(7)式两端同除以 y^{α}，得

$$y^{-\alpha}\frac{dy}{dx}+P(x)y^{1-\alpha}=Q(x)$$

令 $V=y^{1-\alpha}$，从而 $\frac{dV}{dx}=(1-\alpha)y^{-\alpha}\frac{dy}{dx}$，于是原方程成为：

$$\frac{1}{1-\alpha}\frac{dV}{dx}+P(x)V=Q(x)$$

或
$$\frac{dV}{dx}+(1-\alpha)P(x)V=(1-\alpha)Q(x)$$

这是一阶线性方程。求出此方程的通解以后，再用 $y^{1-\alpha}=V$ 代回，便得到原方程的通解。

例 3 求方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x+x^2y}$ 的通解。

解 把 x 作为未知函数，y 当作自变量，有

$$\frac{dx}{dy}=x+yx^2$$

它是一个 $\alpha=2$ 的贝努里方程。

令 $V=x^{-1}$，从而 $\frac{dV}{dy}=-x^{-2}\frac{dx}{dy}$，代入上式，得

$$\frac{dV}{dy}+V=-y$$

解这个线性方程，有

$$\begin{aligned}V&=e^{-\int dy}\left\{\int -ye^{\int dy}dy+C\right\}\\&=e^{-y}\{-ye^{y}+e^{y}+C\}\\&=1-y+Ce^{-y}\end{aligned}$$

从而原方程的通解为：

$$\frac{1}{x}=1-y+Ce^{-y}$$

例 4 求方程 $y''+\frac{1}{x}y'-x=1$ 的通解。

解 这是一个二阶微分方程，但可用降阶法把它转化为一阶方程来求解。

设 $y'=P$，从而 $y''=\frac{dP}{dx}$，代入原方程有

$$\frac{dP}{dx}+\frac{1}{x}P=x+1$$

这是关于P的一阶线性方程，其通解为：

$$P=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left\{\int(x+1)e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C_1\right\}$$

$$=x^{-1}\left\{\int(x^2+x)dx+C_1\right\}$$

$$=\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}x+C_1x^{-1}$$

即 $$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}x+C_1x^{-1}$$

再积分一次，得原方程的通解

$$y=\frac{1}{9}x^3+\frac{1}{4}x^2+C_1\ln x+C_2$$

习　　题 5-3

1．求下列微分方程的通解：

(1) $x\dfrac{dy}{dx}-y=x^3$；

(2) $y'-2y-x=2$；

(3) $x(y'-\sin x)+y=0$；

(4) $xdy-ydx=\dfrac{x}{\ln x}dx$。

2．求下列微分方程的通解：

(1) $y'-x^2y^2=y$；

(2) $3y^2y'-y^3=x+1$；

(3) $xy''+y'-x^2=0$；

(4) $y''-(y')^2=1$。

3．求满足下列微分方程及初始条件的特解：

(1) $\sin x d y-(y\cos x+1)dx=0, y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$；

(2) $y''+y'=e^{-2x}, y(0)=y'(0)=1$。

4．设一容器内有100L溶液，其中含有10kg净盐，若以3L/min的速度把净水注入容器，同时以2L/min的速度使溶液流出，假设容器内的溶液浓度任何时刻都均匀，问过程开始1h后，溶液内还有多少净盐？

5．有一容积为10800m^{3}的恒温车间，在生产过程中，一部分二氧化碳扩散在车间中，如果没有通风设备，空气中二氧化碳稳定在0.12%，为了工作

人员的身体健康，用一台通风量为 $1500m^3/min$ 的鼓风机通风，通入的新鲜空气中含有 0.04% 的二氧化碳. 问鼓风机开机 10 min 后，车间中二氧化碳的百分比降到多少?

6. 质量为 m 的质点从液面由静止开始在液体中下降. 假定液体的阻力与速度 v 成正比，试求质点下降时的速度 v 与时间 t 的关系以及位移 x 与时间 t 的关系(图 5-1).

7. 在电阻为 R, 电感为 L, 电动势 $E(t)=E_0\sin\omega t$ 的串联电路中，试求电路接通后，电路中的电流 $i(t)$.

*8. 设某种细菌存在于某毒素之中，细菌生长的速率与其存在的个数成正比，比例系数为 a，毒素杀灭细菌的速率与细菌的个数和毒素的数量之乘积成正比，比例系数为 b，同时毒素的数量以恒速 c 增加，用 $y(t)$ 表示时刻 t 存活的细菌个数，假设 $t=0$ 时开始产生毒素，$y(0)=y_0$，试求 $y(t)$，并指出 $t\to+\infty$ 时，$y(t)$ 的变化特点.

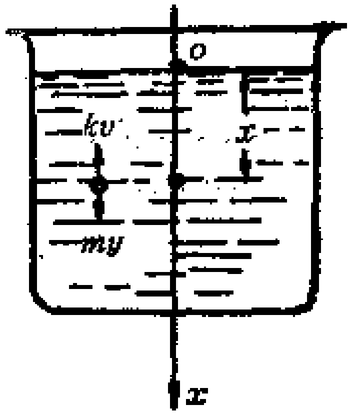


图 5-1

第四节 二阶常系数线性齐次微分方程

形如
$$y''+py'+qy=f(x) \tag{1}$$
的方程，称为**二阶常系数线性微分方程**，其中 p,q 为常数，"线性"是指方程中的未知函数及其各阶导数都是一次的.

如果 $f(x)\equiv 0$，方程(1)成为：
$$y''+py'+qy=0 \tag{2}$$
称方程(2)为**二阶常系数线性齐次微分方程**. 本节只讨论齐次方程(2)的解法.

一、二阶常系数线性齐次方程解的性质

性质 1 若 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 是方程(2)的两个解，则
$$y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x) \tag{3}$$
也是方程(2)的解，其中 c_1, c_2 为任意常数.

证 因为 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 是方程(2)的解，所以

$$y_1'' + py_1' + qy_1 = 0$$
$$y_2'' + py_2' + qy_2 = 0$$

将 $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ 代入(2)式左端，由上面两个等式即得

$$\begin{aligned}&(c_1y_1 + c_2y_2)'' + p(c_1y_1 + c_2y_2)' + q(c_1y_1 + c_2y_2)\\&= c_1(y_1'' + py_1' + qy_1) + c_2(y_2'' + py_2' + qy_2)\\&= c_1\cdot 0 + c_2\cdot 0 = 0\end{aligned}$$

所以 $y = c_1y_1 + c_2y_2$ 是方程(2)的解。

线性齐次方程解的这一性质称为**解的叠合性**。

叠合起来的解(3) 既然含有两个任意常数 c_1 和 c_2，是否一定是方程(2)的通解呢？我们举例来分析。容易验证：$y_1 = e^x$ 和 $y_2 = 2e^x$ 都是齐次方程 $y'' - 2y' + y = 0$ 的解，由性质 1 知 $y = c_1e^x + 2c_2e^x$ 也是它的解，这个解形式上含有两个任意常数，实质上只有一个，因为它可以写成 $y = ce^x$，其中 $c = c_1 + 2c_2$，所以这个叠合起来的解就不是方程的通解。那末在什么情况下函数(3)才是方程(2)的通解呢？从上面的分析可以看到，如果

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = k \quad (k\text{ 为常数}) \tag{4}$$

即 $$y_1(x) = ky_2(x)$$

那末 $$c_1y_1 + c_2y_2 = (c_1k + c_2)y_2 = cy_2$$

其中 $c = c_1k + c_2$。这时函数(3)就不是方程(2)的通解。

反之，如果 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 不满足关系式(4)，即一个解不是另一个解的常数倍，这时 $y = c_1y_1 + c_2y_2$ 含有两个独立的任意常数，它就是方程(2)的通解。

满足关系式 (4) 的两个函数 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 称为是**线性相关的**。否则，称为是**线性无关的**。

由上述讨论，我们得到下面的性质：

性质 2 若 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是线性齐次方程 (2) 的两个线性无关的特解，则

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

是方程(2)的通解，其中 c_1，c_2 是任意常数。

二、二阶常系数线性齐次方程的解法

由性质2可知，求二阶常系数线性齐次方程(2)的通解，归结为求它的两个线性无关的特解。

因为指数函数求导后仍为指数函数，故可设方程(2)的解为：

$$y = e^{rx}$$

其中 r 为待定常数。于是

$$y' = re^{rx},\ y'' = r^2e^{rx},$$

将它们代入方程(2)，有

$$e^{rx}(r^2 + pr + q) = 0$$

由于 $e^{rx} \neq 0$，只要

$$r^2 + pr + q = 0 \tag{5}$$

则 $y = e^{rx}$ 就是方程(2)的解。这就是说，对应于二次代数方程(5)的每一个根 r，就有微分方程(2)的一个特解 e^{rx}。显然，这个代数方程(5)决定着微分方程(2)的解，称(5)为微分方程(2)的**特征方程**．特征方程的根称为**特征根**。

下面根据特征根的三种不同情况，分别研究齐次方程(2)的通解。

1．特征方程有两个不相等的实根 r_1 和 r_2

这时得到方程(2)的两个特解 $y_1 = e^{r_1x}$ 和 $y_2 = e^{r_2x}$，因为两者之比不等于常数，所以它们是线性无关的，故方程(2)的通解是

$$y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}$$

2．特征方程有两个相等的实根 $r_1 = r_2$

这时只能得到方程(2)的一个特解 $y_1 = e^{r_1x}$。显然 ce^{r_1x} 也是(2)的解，下面用常数变易法来求另一个线性无关的特解。为此，设

$$y_2 = h(x)e^{r_1x}$$

是方程(2)的解，其中 $h(x)$ 为待定函数。于是

$$y_2' = [r_1h(x) + h'(x)]e^{r_1x}$$

$$y_2'' = [r_1^2h(x) + 2r_1h'(x) + h''(x)]e^{r_1x}$$

将它们代入方程(2)，得

$$[h''(x)+(2r_1+p)h'(x)+(r_1^2+pr_1+q)h(x)]e^{r_1x}=0$$

因为 r_1 为特征根，所以 $r_1^2+pr_1+q=0$，又因为 r_1 是重根，所以由二次方程根与系数的关系有 $2r_1+p=0$，于是上式成为：

$$h''(x)=0$$

积分两次，得

$$h(x)=Ax+B$$

其中 A, B 为任意常数。由于我们只要求得一个与 e^{r_1x} 线性无关的特解。为简单起见，取 $A=1, B=0$，于是 $h(x)=x$，从而得到

$$y_2=xe^{r_1x}$$

故特征方程有重根时，方程(2)的通解是

$$y=c_1e^{r_1x}+c_2xe^{r_1x}$$

3. 特征方程有一对共轭复根 $r_1=\alpha+i\beta$, $r_2=\alpha-i\beta$

这时，$y_1=e^{(\alpha+i\beta)x}$ 和 $y_2=e^{(\alpha-i\beta)x}$ 是方程(2)的两个线性无关的特解。可是这种复数形式的解不便于应用。为了得到实数形式的解，利用欧拉(Euler)公式：

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x$$

将 y_1 与 y_2 写成

$$y_1=e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)$$

$$y_2=e^{\alpha x}(\cos\beta x-i\sin\beta x)$$

由解的叠合性可知

$$\frac{1}{2}(y_1+y_2)=e^{\alpha x}\cos\beta x$$

$$\frac{1}{2i}(y_1-y_2)=e^{\alpha x}\sin\beta x$$

也是方程(2)的解，而且是线性无关的，故方程(2)的通解为

$$y=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)$$

综上所述，二阶常系数线性齐次方程的通解与特征方程的对应关系如表 5-1 所示。

例 1 求方程 $\frac{d^2s}{dt^2}-4\frac{ds}{dt}+4s=0$，当 $s(0)=1$，$s'(0)=-1$

时的解。

表 5-1

特征方程 $r^2+pr+q=0$ 的根		微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解
不等实根	$r_1 \neq r_2$	$y=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}$
相等实根	$r_1=r_2$	$y=(c_1+c_2x)e^{rx}$
共轭复根	$r_{1,2}=\alpha \pm i\beta$	$y=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)$

解 特征方程为：

$$r^2-4r+4=0$$

特征根是重根：$r_1=r_2=2$. 因此原方程的通解是

$$s=(c_1+c_2t)e^{2t}$$

于是
$$s'=(2c_1+c_2+2c_2t)e^{2t}$$

将初始条件 $s(0)=1$, $s'(0)=-1$ 代入，得

$$\begin{cases} 1=c_1 \\ -1=2c_1+c_2 \end{cases}$$

得 $c_1=1$, $c_2=-3$, 故所求特解为

$$s=(1-3t)e^{2t}$$

例 2 求方程 $y''+2y'+5y=0$ 的通解。

解 特征方程为：

$$r^2+2r+5=0$$

解得
$$r=\frac{-2\pm\sqrt{4-20}}{2}=-1\pm 2i$$

故原方程的通解是

$$y=e^{-x}(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)$$

例 3 图 5-2 是 $R—L—C$ 振荡电路，其中电阻 R、电感 L、电容 C 均为常数。设电容器已经充电，当开关 K 合上后，电容器放电，电路中有电流 i 通过，产生电磁振荡，求电流 i 随时间 t 的变化规律。

解 根据回路电压定律可知，电阻、电感、电容上的电位降分

别为：

$$U_R = iR,\ U_L = L\frac{di}{dt},\ U_C = \frac{q}{C},$$

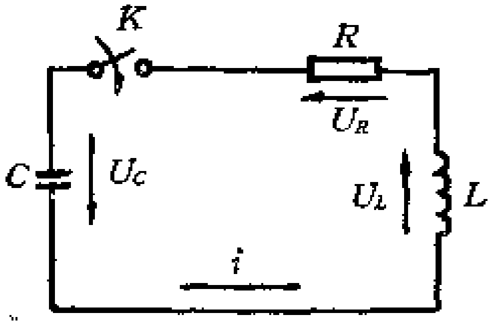


图 5-2

且 $\qquad U_L + U_R + U_C = 0$

即 $\quad L\frac{di}{dt} + iR + \frac{q}{C} = 0$

其中 q 为电容上的电量，q和 i 都是时间 t 的函数。

上式两端对 t 求导，由于 $\frac{dq}{dt} = i$，于是有

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = 0 \tag{6}$$

这是二阶常系数线性齐次方程。 由此可求得电流 i 随时间 t 的变化规律。

对于方程(6)的解，我们只讨论电阻小到忽略不计，即 $R=0$的情况。此时(6)式成为：

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{C}i = 0$$

令 $\omega^2 = \frac{1}{LC}$，有

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \omega^2 i = 0 \tag{7}$$

它的特征方程为

$$r^2 + \omega^2 = 0$$

特征根为 $r = \pm\omega i$。

故方程(7)的通解为

$$\begin{aligned} i &= c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t \\ &= A\sin(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

其中 $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$，$\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{c_1}{c_2}$。

这就是 $L—C$ 振荡电路中电流的变化规律。

习 题 5-4

1．求下列微分方程的通解：

(1) $y''+8y'+15y=0$;　　(2) $y''-5y'+6y=0$;

(3) $y''-6y'+9y=0$;　　(4) $\frac{d^3x}{dt^3}+3\frac{dx}{dt}+t=0$;

(5) $y''+2x=0$;　　(6) $4y''+4y'+1=0$;

(7) $x''+9x=0$;　　(8) $y''-y=0$;

(9) $y''+4y'+5y=0$;　　*(10) $y''+4y'+4y-4=0$。

2．求满足下列微分方程及初始条件的特解：

(1) $y''-y'-6y=0, y(0)=-1, y'(0)=1$;

(2) $y''+3y=0, y(0)=2, y'(0)=3\sqrt{3}$;

(3) $4y''+4y'+y=0, y(0)=2, y'(0)=5$;

*(4) $\frac{d^2x}{dt^2}+2b\frac{dx}{dt}+k^2x=0(k>b>0), x(0)=0, x'(0)=v_0$。

3．质量为 25g 的物体系于弹簧的一端，放在水平而光滑的平面上（无阻尼）。如果把物体由平衡位置移动 4cm 放开（没有初速度），已知弹性系数 $k=400\times10^{-5}$N/cm，求物体的位移函数。

第五节　拉普拉斯变换

一、拉氏变换的概念和性质

拉普拉斯(Laplace)变换是一种数学方法，它能将积分运算转化为代数运算，把求解微分方程转化为求解代数方程，使微分方程易于求解。拉普拉斯变换在生物医学工程、药物动力学及生理学等医学科学领域中有广泛的应用。

定义　设函数 $f(t)$ 当 $t\geqslant0$ 时有定义，并且积分

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

在 s 的某一区域内收敛，则由此积分所确定的函数

$$F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

称为函数 $f(t)$ 的**拉普拉斯变换**(Laplace transform)，简称**拉氏变换**。记为

$$F(s)=\mathscr{L}[f(t)]$$

若 $F(s)$ 是 $f(t)$ 的拉氏变换，则称 $f(t)$ 为 $F(s)$ 的**拉氏逆变换**，记为

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$$

在拉氏变换中，也称 $f(t)$ 为象原函数，$F(s)$ 为象函数。由拉氏变换的定义可知，对于每一个（满足一定条件的）象原函数，对应着一个确定的象函数。

例 1 求函数

$$u(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t\geqslant 0\end{cases}$$

的拉氏变换。

解 根据拉氏变换的定义，有

$$\mathscr{L}[u(t)]=\int_0^{+\infty}e^{-st}dt=-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{s}\quad(s>0)$$

所以当 $s>0$ 时，$\mathscr{L}[1]=\dfrac{1}{s}$。

函数 $u(t)$ 通常称为单位阶跃函数，它表示在 $t=0$ 时，一个不变的信号突然加到系统上。例如在电生理中，当用电刺激机体时，外加电压由零突然加到某一单位值。

例 2 求函数 $f(t)=e^{kt}$，当 $t>0$ 时的拉氏变换。

解

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[e^{kt}]&=\int_0^{+\infty}e^{kt}e^{-st}dt\\&=-\frac{1}{s-k}e^{-(s-k)t}\Big|_0^{+\infty}\\&=\frac{1}{s-k}\quad(s>k)\end{aligned}$$

所以当 $s>k$ 时，$\mathscr{L}[e^{kt}]=\dfrac{1}{s-k}$。

例 3 求函数 $f(t)=t$，当 $t>0$ 时的拉氏变换。

解

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[t]&=\int_0^{+\infty}te^{-st}dt\\&=-\frac{1}{s}te^{-st}\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{s}\int_0^{+\infty}e^{-st}dt\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{s^2}\quad(s>0)$$

所以当 $s>0$ 时，$\mathscr{L}[t]=\frac{1}{s^2}$。

同理可得

$$\mathscr{L}[t^n]=\frac{n!}{s^{n+1}}\quad(n\text{ 为非负整数})$$

从上面的例子可以看到，象原函数是 t 的函数，象函数是 s 的函数。在实际工作中，有专门的拉氏变换表可查(附录二)。利用拉氏变换表，已知 $f(t)$，便可求出 $F(s)$；反过来，由 $F(s)$ 也可求出 $f(t)$，这就是拉氏逆变换。用拉氏逆变换的符号，可将以上各例的结果写成

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)=1,\ \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right)=t,\ \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-k}\right)=e^{kt}.$$

拉氏变换有许多重要性质，下面仅介绍最常用的几个性质。

(1) 线性性质 若 α、β 为常数，且

$$\mathscr{L}[f_1(t)]=F_1(s),\ \mathscr{L}[f_2(t)]=F_2(s),\text{ 则}$$

$$\mathscr{L}[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)]=\alpha\mathscr{L}[f_1(t)]+\beta\mathscr{L}[f_2(t)]\tag{2}$$

$$\mathscr{L}^{-1}[\alpha F_1(s)+\beta F_2(s)]=\alpha\mathscr{L}^{-1}[F_1(s)]+\beta\mathscr{L}^{-1}[F_2(s)]\tag{3}$$

证 根据拉氏变换的定义，有

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)]\\&=\int_0^{+\infty}[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)]e^{-st}dt\\&=\alpha\int_0^{+\infty}f_1(t)e^{-st}dt+\beta\int_0^{+\infty}f_2(t)e^{-st}dt\\&=\alpha\mathscr{L}[f_1(t)]+\beta\mathscr{L}[f_2(t)]\end{aligned}$$

(2)式得证。

对于(3)式，只要分别对(3)式两端取拉氏变换，再利用(2)式，即可证明。

这个性质表明，函数线性组合的拉氏变换等于拉氏变换的线性组合。

(2) 微分性质 若 $\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$，则

$$\mathscr{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0) \tag{4}$$

证 因为 $\mathscr{L}[f'(t)] = \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-st}dt$

$$= f(t)e^{-st}\Big|_0^{+\infty} + s\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

由于绝大多数的象函数 $f(t)$ 都满足

$$\lim_{t\to+\infty} f(t)e^{-st} = 0$$

所以有
$$\mathscr{L}[f'(t)] = -f(0) + s\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$
$$= sF(s) - f(0)$$

推论 若 $\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$，则

$$\mathscr{L}[f''(t)] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0) \tag{5}$$

二次运用(4)式即可证明。

特别地，当初始值 $f(0) = f'(0) = 0$ 时，有

$$\mathscr{L}[f'(t)] = sF(s), \quad \mathscr{L}[f''(t)] = s^2F(s)$$

这个微分性质说明了导函数的拉氏变换 $\mathscr{L}[f'(t)]$ 可以化为原函数的拉氏变换 $\mathscr{L}[f(t)]$，利用这个性质可将求解微分方程转化为求解代数方程。

例 4 求 $\mathscr{L}[\sin kt]$，$\mathscr{L}[\cos kt]$。

解 设 $f(t) = \sin kt$，有

$$f'(t) = k\cos kt, \ f''(t) = -k^2\sin kt$$

且
$$f(0) = 0, \ f'(0) = k$$

由微分性质(5)式，有

$$\mathscr{L}[-k^2\sin kt] = s^2\mathscr{L}[\sin kt] - k$$

即
$$-k^2\mathscr{L}[\sin kt] = s^2\mathscr{L}[\sin kt] - k$$

故
$$\mathscr{L}[\sin kt] = \frac{k}{s^2 + k^2}$$

同理可得

$$\mathscr{L}[\cos kt] = \frac{s}{s^2 + k^2}$$

(3) 位移性质 若 $\mathscr{L}[f(t)] = F(s)$，则

$$\mathscr{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a)$$

证 $\mathscr{L}[e^{at}f(t)]=\int_0^{+\infty}e^{at}f(t)e^{-st}dt$

$$=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-(s-a)t}dt$$

$$=F(s-a)$$

此性质表明，一个象原函数乘以指数函数 e^{at}，其拉氏变换等于原来的象函数作位移 a。

利用上述性质，由

$$\mathscr{L}[t^n]=\frac{n!}{s^{n+1}},\ \mathscr{L}[\sin kt]=\frac{k}{s^2+k^2},\ \mathscr{L}[\cos kt]=\frac{s}{s^2+k^2}$$

可推得 $\mathscr{L}[e^{at}t^n]=\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}},\ \mathscr{L}[e^{at}\sin kt]=\dfrac{k}{(s-a)^2+k^2},$

$$\mathscr{L}[e^{at}\cos kt]=\frac{s-a}{(s-a)^2+k^2}.$$

二、拉氏变换在解微分方程中的应用

现通过举例来说明如何运用拉氏变换来解微分方程。

例 5 求方程 $y''+4y=\sin t$ 满足初始条件 $f(0)=f'(0)=0$ 的特解。

解 设 $y=y(t)$，$\mathscr{L}[y(t)]=F(s)$。

将方程两端取拉氏变换

$$\mathscr{L}[y'+4y]=\mathscr{L}[\sin t]$$

由线性性质有

$$\mathscr{L}[y'']+4\mathscr{L}[y]=\frac{1}{s^2+1}$$

利用微分性质及初始条件，得

$$s^2F(s)+4F(s)=\frac{1}{s^2+1}$$

于是象函数为：

$$F(s)=\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

即 $$F(s)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{s^2+1}-\frac{1}{s^2+4}\right)$$

对上式两端取拉氏逆变换，即得所求的解

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{s^2+1}-\frac{1}{s^2+4}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{3}\left\{\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]-\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{s^2+4}\right]\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\sin t-\frac{1}{6}\sin 2t$$

例 6 求微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=k_a x_a-kx\\[2mm]\dfrac{dx_a}{dt}=-k_a x_a\end{cases}$$

在 $t=0$ 时，$x_a=FD$，$x=0$ 的特解。

解 设 $\mathscr{L}[x(t)]=X(s)$，$\mathscr{L}[x_a(t)]=X_a(s)$。

对方程组中各个方程的两端分别取拉氏变换，得

$$\begin{cases}\mathscr{L}[x'(t)]=k_a\mathscr{L}[x_a(t)]-k\mathscr{L}[x(t)]\\ \mathscr{L}[x_a'(t)]=-k_a\mathscr{L}[x_a(t)]\end{cases}$$

由微分性质及初始条件，有

$$\begin{cases}sX(s)=k_aX_a(s)-kX(s)\\ sX_a(s)-FD=-k_aX_a(s)\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}(s+k)X(s)-k_aX_a(s)=0\\ (s+k_a)X_a(s)=FD\end{cases}$$

解此代数方程组，得

$$\begin{cases}X(s)=\dfrac{k_aFD}{k_a-k}\left(\dfrac{1}{s+k}-\dfrac{1}{s+k_a}\right)\\[2mm] X_a(s)=\dfrac{FD}{k_a+s}\end{cases}$$

最后，取拉氏逆变换，即得所求的解：

$$\begin{cases}x(t)=\dfrac{k_aFD}{k_a-k}(e^{-kt}-e^{-k_at})\\[2mm] x_a(t)=FDe^{-k_at}\end{cases}$$

从上面的例子可知，利用拉氏变换解常系数线性微分方程的步骤是：

(1) 对微分方程取拉氏变换，得到一个象函数的代数方程

——象方程；

(2) 解此象方程，得象函数；

(3) 对象函数取拉氏逆变换，便得到微分方程的解（即象原函数）。

在取拉氏变换和拉氏逆变换的过程中，可以利用拉氏变换表，又由于在取拉氏变换时利用了初始条件，从而直接求出所需的特解，这就使得用拉氏变换来解微分方程更加简便了。

要注意的是，用拉氏变换求解微分方程时，必须知道初始条件，故它一般只用于求微分方程的特解。

习 题 5-5

1．根据定义求下列函数的拉氏变换：

(1) $f(t)=1-e^{-t}$；　　(2) $f(t)=t^2$。

2．求下列函数的拉氏变换：

(1) $f(t)=t^2+3t+2$；

(2) $f(t)=A(1-e^{-kt})$；

(3) $f(t)=5\sin 2t+3\cos 2t$；

(4) $f(t)=\dfrac{A}{k_2-k_1}(e^{-k_1t}-e^{-k_2t})$。

3．求下列函数的拉氏逆变换：

(1) $F(s)=\dfrac{1}{s^3}$；　　(2) $F(s)=\dfrac{3}{s^2+4}$；

(3) $F(s)=\dfrac{1}{s^2+2s}$；　　(4) $F(s)=\dfrac{s+1}{s^2+s+6}$。

4．利用拉氏变换解下列微分方程：

(1) $y'+y=3e^{2t}$，当 $t=0$ 时，$y=0$；

(2) $y''+4y=t+4$，当 $t=0$ 时，$y=1, y'=0$；

*(3) $y''-2y'+2y=2e^t\cos t$，当 $t=0$ 时，$y=0, y'=0$。

*(4) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=k(x_a-x)\\[2ex]\dfrac{dx_a}{dt}=-kx_a\end{cases}$

当 $t=0$ 时，$x_a=FD, x=0$。

第六节　微分方程在医学中的应用

一、肿瘤生长的数学模型

在描述生物科学的某个问题中，我们把表示各变量间关系的数学方程称为**数学模型**. 肿瘤生长的数学模型，就是从数量方面描述肿瘤生长的数学方程. 设v表示在时刻t肿瘤的大小（体积、重量、细胞数等），由实际经验知道，肿瘤生长到时刻t时的增长速率与当时的v值成正比，比例系数为k；但k不是常数，它随时间t减小，其减小速率与当时k的大小成正比，此比例系数$\alpha\geqslant 0$为常数. 由此得如下数学模型：

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt}=kv & (1) \\ \dfrac{dk}{dt}=-\alpha k & (2) \end{cases}$$

我们分两种情况讨论上述模型的解：

(1) 若$\alpha=0$. 这时$\dfrac{dk}{dt}=0$，故k为常数，记为A.

设$t=0$时，$v=v_0$，则由(1)式有

$$v=v_0e^{At} \tag{3}$$

由此可知，在这种情况下，肿瘤完全呈指数生长，生长速率常数为A.

(2) 若$\alpha>0$. 这时由(2)式得

$$k=Ae^{-\alpha t}$$

其中A为$t=0$时的k值.

将上式代入方程(1)，有

$$\frac{dv}{dt}=Ave^{-\alpha t}$$

分离变量后积分，得

$$\ln v=-\frac{A}{\alpha}e^{-\alpha t}+\ln c$$

其中 c 为任意常数。

设 $t=0$ 时，$v=v_0$，于是有 $c=v_0e^{\frac{A}{\alpha}}$。所以

$$v=v_0e^{\frac{A}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})} \tag{4}$$

这就是描述肿瘤生长的数学关系式。它称为高姆帕茨函数（Gompertz function），其图形称为高姆帕茨曲线(图 5-3)。

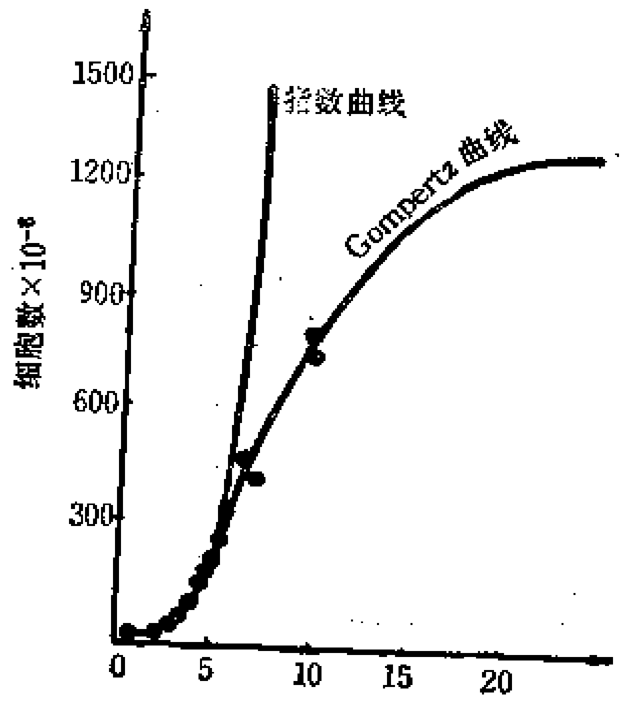


图 5-3

下面利用高姆帕茨函数来研究肿瘤生长的情况：

(1) 当 $\alpha t\to 0$ 时，由于 $e^{-\alpha t}\approx 1-\alpha t$，于是(4)式成为：

$$v=v_0e^{At}$$

可见，当 α 为不等于 0 的有限值而且 t 值很小时，即肿瘤生长的初期阶段，肿瘤是呈指数增长的。

(2) 当 $t\to+\infty$ 时，$e^{-\alpha t}\to 0$，由(4)式得 v 的最大渐近值

$$v_{\max}=v_0e^{\frac{A}{\alpha}}$$

这就是肿瘤生长的理论上限。容易知道，$\frac{dv}{dt}>0$，故 v 单调递增，从而当 $t\to+\infty$ 时，$v\to v_{\max}$。

由图 5-3 可以看到，用高姆帕茨函数描述肿瘤生长规律，与实

际情况是很吻合的。

二、药物动力学室模型

在药物动力学中，广泛采用室模型来研究药物在体内的吸收、分布、代谢和排泄的时间过程。最简单的是把机体设想为一个同质单元，即所谓一室模型，它适合于给药后，药物立即进入血液循环，能在瞬时分布全身并达到动态平衡的情况。

1. 静脉注射

在快速静脉注射给药时，常用的一室模型如图 5-4 所示。图中 D 为一次注射的剂量，V 为室的理论容积，称为药物的表现分布容积，x 为时刻 t 时体内的药量，k 为消除（包括代谢和排泄）速率常数。

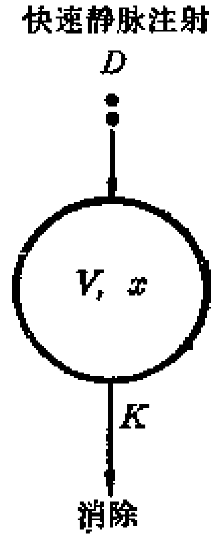


图 5-4

设体内药量减小的速率与体内当时的药量成正比，即消除为一级速率过程，于是有

$$\frac{dx}{dt}=-kx \qquad (k>0) \qquad (5)$$

其中负号表示药量在体内是减少的。

在 $t=0$ 时，$x=D$ 的初始条件下，(5)式的解为：

$$x=De^{-kt}$$

若 c 表示在时刻 t 时的血药浓度，则 $c=\frac{x}{V}$，于是有

$$c=c_0e^{-kt} \qquad (6)$$

其中 $c_0=\frac{D}{V}$，为初始血药浓度。

(6) 式就是描述快速静脉注射时，一室模型下血药浓度随时间递减的方程，它是一条单项负指数曲线。

2. 口服给药

口服给药与静脉给药的一个重要区别是药物有一个从吸收部位（胃肠道等）进入全身血液循环的过程，即吸收过程。图 5-5 是常用的口服给药的一室模型，图中 k_a 表示吸收速率常数，F 表示吸收分数，即所给剂量 D 能被吸收进入血液循环的分数。其余符

号意义同前。

设在时刻 t，体内药量为 x，吸收部位的药量为 x_a，如果吸收和消除都是一级速率过程，吸收速率常数为 k_a，消除速率常数为 k，则有

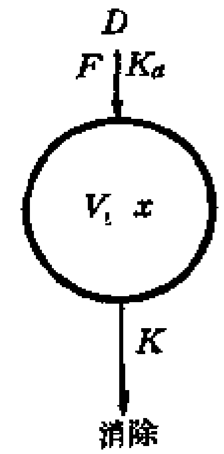


图 5-5

$$\begin{cases} \dfrac{dx_a}{dt} = -k_a x_a \\ \dfrac{dx}{dt} = k_a x_a - kx \end{cases} \qquad (7)$$

初始条件为：

$$t=0 \text{ 时}, x_a = FD,\ x=0.$$

在第五节例 6 里，已经求得方程组(7)的解

$$x = \frac{k_a FD}{k_a - k}(e^{-kt} - e^{-k_a t})$$

由 $C=\dfrac{x}{V}$，便得到血药浓度 C 随时间 t 的变化规律：

$$C = \frac{k_a FD}{(k_a - k)V}(e^{-kt} - e^{-k_a t}) \qquad (8)$$

此方程描述了多数药物在一次口服剂量 D 后，血药浓度 C 与时间 t 的关系，它是一条双项负指数曲线，如图 5-6 所示。

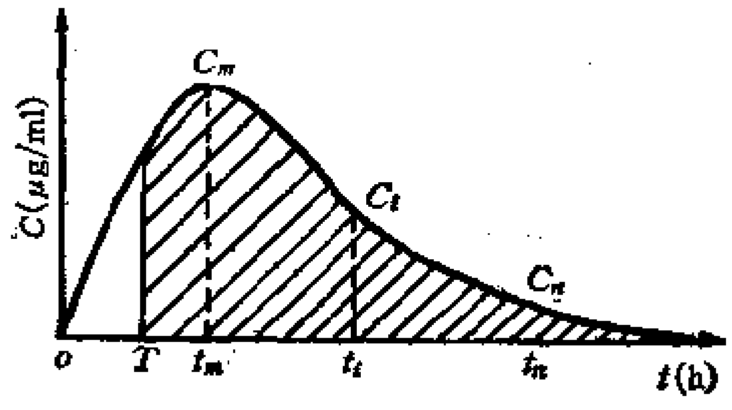


图 5-6

下面我们求最大血药浓度(峰浓度) C_{max} 及其到达的时间(达峰时) t_m。为此，求导

$$\frac{dC}{dt} = \frac{k_a FD}{V(k_a - k)}(-ke^{-kt} + k_a e^{-k_a t}) \qquad (9)$$

令 $\frac{dC}{dt}=0$，得

$$t_m=\frac{1}{k_a-k}\ln\frac{k_a}{k}$$

代入(8)式，有

$$C_{\max}=\frac{k_aFD}{(k_a-k)V}(e^{-kt_m}-e^{-k_at_m}) \tag{10}$$

注意到 $\left.\frac{dC}{dt}\right|_{t=t_m}=0$ 时，由(9)式有

$$-ke^{-kt_m}+k_ae^{-k_at_m}=0$$

利用它，可将(10)式简化为：

$$C_{\max}=\frac{FD}{V}e^{-kt_m}$$

这就是最大血药浓度。在给药方案设计中，我们可利用上述关系式确定给药剂量和给药时间间隔，从而设计出比较合适的给药方案。

习 题 5-6

1．试求在快速静脉注射一室模型中，血药浓度的半衰期 $t_{1/2}$。

2．在口服一室模型下，设 t_i 为 c-t 曲线上拐点的横坐标，证明：达峰时 $t_m=\frac{1}{2}t_i$。

*3．在静脉注射一室模型下，若每隔一定时间 τ 静脉注射一定的剂量 D（每次剂量D和给药间隔 τ 保持不变），试求第 n 次给药后所经过的时间t（$0\leqslant t\leqslant\tau$）与血药浓度 C 之间的关系，并求 $n\to\infty$ 时，血药浓度的最大值$(C_\infty)_{\max}$和最小值$(C_\infty)_{\min}$。

*4．考虑一个流行病学问题：假设某地人群以感染率 a 转变为感染者（阳性者），同时阳性者又以感染率 b 转回为易感者（阴性者）。试求在时刻 t 人群中感染者的比率 y，初始条件为 $y(0)=0$。

*5．葡萄糖在酸性溶液中的破坏过程，可简化表示为 $A\xrightarrow{k_1}B\xrightarrow{k_2}C$，其中 A 为葡萄糖，B 为5-羟基甲糠醛，C 为最后的综合生成物．若 k_1 和 k_2 都是一级速率常数，求 A、B、C 三种物质的变化规律，初始条件为 $t=0$ 时，$A=A_0$，$B=C=0$。

第六章　多元函数微积分

在医药学和其它科学中常会遇到依赖于两个或更多个自变量的函数，称为**多元函数**，本章在一元函数及其微积分的基础上介绍多元函数微积分法。

第一节　多元函数

一、空间直角坐标系

为了确定空间某一点 P 的位置，取相互垂直并交于一点 o 的三条数轴 ox、oy、oz，为坐标轴，分别称为 **x 轴**、**y 轴**、**z 轴**，或**横轴**、**纵轴**、**立轴**，交点 o 称为**原点**。每两条坐标轴所决定的平面 xoy、yoz、zox 称为**坐标面**。这样就构成了空间直角坐标系 $o—xyz$(图6-1)。

三个坐标面把空间划分成八个部分，称为**卦限**(图6-2)。

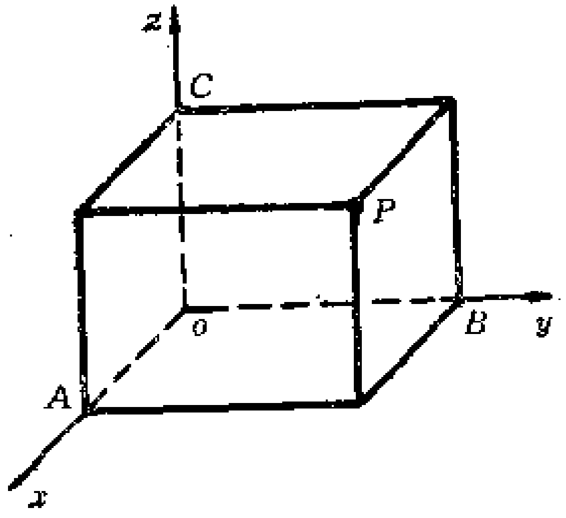


图　6-1

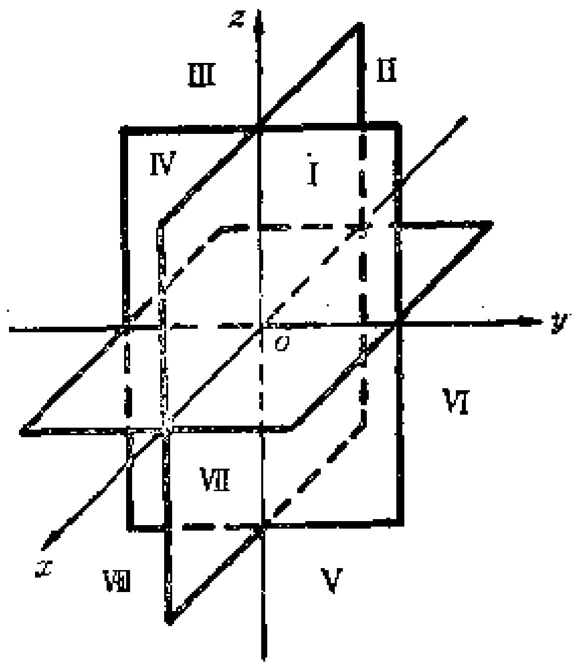


图　6-2

过 P 点作三个平面与三个坐标轴垂直且交于 A、B、C 三点，它们在 x 轴、y 轴和 z 轴上的坐标的值分别是 x, y, z, 这样，空间任意一点 P 决定了一个有序数组 $\{x, y, z\}$；反之，任一有序数组 $\{x, y, z\}$ 也唯一确定了空间的一个点 P，我们称这个有序数组为**点 P 的坐标**，记为 $P(x, y, z)$，其中 x, y, z 分别称为点 P 的**横坐标、纵坐标和立坐标**。显然，原点 o 的坐标为 $(0, 0, 0)$。

建立了空间点的坐标，就可用坐标来计算任意两点间的距离。

已知空间两点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2, z_2)$，从图 6-3 可以知道，有

$$|P_1P_2| = \sqrt{|P_1A|^2 + |AD|^2 + |DP_2|^2}$$

或
$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad (1)$$

(1)式即为空间任意两点的距离公式。

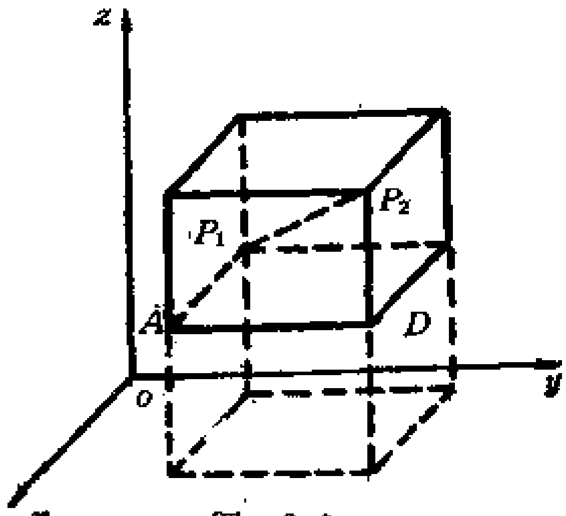


图 6-3

特别地，任一点 $M(x, y, z)$ 与原点 $o(0, 0, 0)$ 间的距离公式为：

$$|oM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad (2)$$

例 1 求点 $P_1(2, 3, 5)$ 与 $P_2(-3, -4, 1)$ 之间的距离。

解 由公式(1)得

$$|P_1P_2| = \sqrt{(-3-2)^2 + (-4-3)^2 + (1-5)^2}$$
$$= \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$$

例 2 求半径为 R，球心在原点的球面方程。

解 设 $M(x, y, z)$为球面上任一点，则有

$$|oM| = R$$

或
$$\sqrt{x^2+y^2+z^2} = R$$

即
$$x^2+y^2+z^2 = R^2$$

显然，不在球面上的任意一点均不满足此方程，因此，这就是球心在原点，半径为 R 的球面方程。

二、多元函数的概念

先看两个例子

例 3 研究机体对某种药物的反应。设给予药量 x 单位，经过 t 小时后机体产生某种反应 E，且有

$$E = x^2(a-x)t^2e^{-t}$$

其中 a 为常量（可允许给予的最大药量）。上述式中有三个变量。而且变量 E 随着变量 x 和 t 的变化而变化，当 x、t 在一定范围 $(0\leqslant x\leqslant a,\ t\geqslant 0)$ 内任意取定一对数值时，E 的对应值就随之唯一确定。我们说变量 E 是变量 x 和 t 的二元函数。

例 4 平行四边形面积 S 与相邻两边 x、y 及其夹角 θ 的关系为：

$$S = xy\sin\theta$$

此式中 S 随 x、y 及 θ 三个变量的变化而变化，当 x、y 及 θ 在一定范围$(x>0,\ y>0,\ 0<\theta<\pi)$内任意取定一组值时，$S$ 的对应值就随之唯一确定。这是一个三元函数。

定义 设有三个变量 x、y 和 z，如果变量 x、y 在允许的范围内任意取定一对值时，变量 z 按照一定的规律，总有唯一确定的值与它们对应，则变量 z 称为变量 x、y 的二元函数，记作

$$z = f(x, y)$$

其中 x、y 称为**自变量**，而 z 称为**因变量**。

类似地，可以定义三元函数等。二元及二元以上的函数统称为**多元函数**。在多元函数中，主要研究二元函数，因为三元以上

的函数及其微分法与二元函数是完全类似的。

与一元函数相仿，二元函数 $z=f(x, y)$ 的自变量 x、y 的允许值范围称为函数 z 的**定义域**。

例 5 确定函数 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的定义域。

解 要使等式右边有意义，自变量 x、y 必须满足不等式

$$1-x^2-y^2\geqslant 0$$

即
$$x^2+y^2\leqslant 1$$

所以，函数 z 的定义域 D 是 xoy 平面上中心在原点，半径为1的圆周及其内部点的全体（图 6-4），采用集合的表示方法，记作

$$D=\{(x, y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 1\}$$

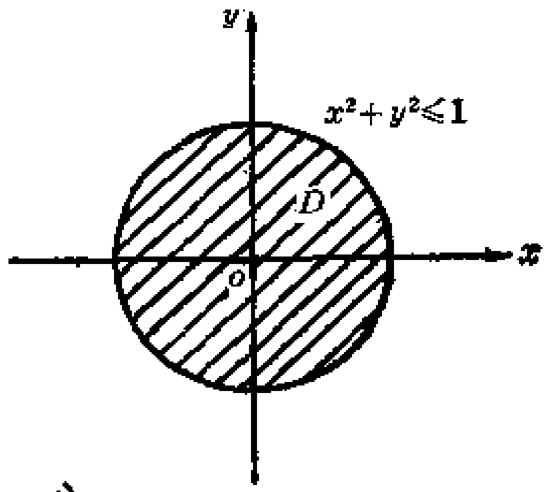


图 6-4

例 6 确定函数

$$z=\frac{1}{\sqrt{x-y+1}}+\ln(-x-y)$$

的定义域。

解 要使函数 z 有意义，x、y 必须同时满足不等式

$$x-y+1>0 \text{ 及 } -x-y>0$$

即直线 $y=x+1$ 的下半个平面与直线 $y=-x$ 的下半个平面的公共部分（不包含直线），如图 6-5 所示，也可记作

$$D=\{(x, y)\,|\,x-y+1>0,\ -x-y>0\}$$

二元函数的定义域常常是 xoy 平面上由一条或几条曲线所围成的区域，围成区域的曲线称为**区域的边界**，包括整个边界在内的区域称为**闭区域**，不包括边界任何一点的称为**开区域**。例 5 和例 6 中的区域 D 分别是闭区域和开区域的例子。

设二元函数 $z=f(x, y)$；$P(x_0, y_0)$ 为其定义域 D 中任一点，将 $x=x_0$，$y=y_0$ 代入 $z=f(x, y)$，算出函数 z 的对应值 $f(x_0, y_0)$，即为函数 z 在点 $P(x_0, y_0)$ 的**函数值**。

例 7 求函数 $z=f(x, y)=\dfrac{10x}{x^2+y^2}$ 在点 $(1, 2)$ 的函数值。

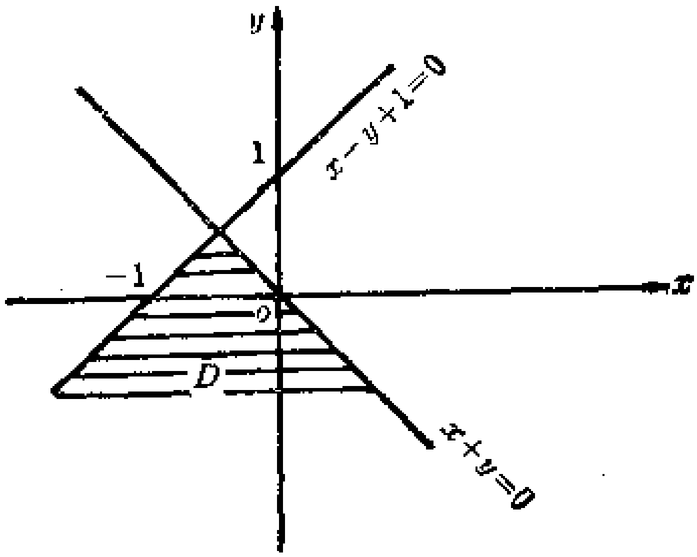


图 6-5

解 $f(x, y)$在点(1, 2)的函数值为：

$$f(1, 2)=\frac{10\cdot 1}{1^2+2^2}=2$$

现在考察二元函数的几何意义。

通常，二元函数 $z=f(x, y)$ 的定义域 D 是平面 xoy 上的一个区域，D 内任一点 $P(x_0, y_0)$，必对应于 $z_0=f(x_0, y_0)$，而三个数 x_0，y_0，z_0 确定了空间一点 $M(x_0, y_0, z_0)$。当 x、y 在定义域 D 内取一切可能的值时，点 $M(x, y, z)$ 的轨迹形成一个空间曲面．因此，二元函数 $z=f(x, y)$ 在空间直角坐标系中一般表示一个曲面(图 6-6)．

例如：函数 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 表示的曲面称为球心在原点 o，半径为 R 的**球面**。

函数 $z=x^2+y^2$ 表示的曲面称为**椭圆抛物面**(图 6-7)。

函数 $z=-x^2+y^2$ 表示的曲面称为**双曲抛物面**或**马鞍形曲面**(图 6-8)。

隐函数 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 表示的曲面称为**椭球面**(图 6-9)。

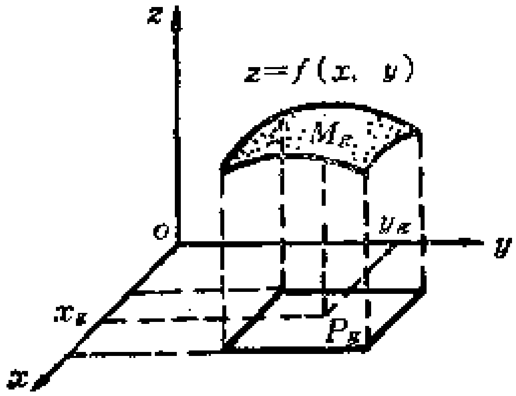


图 6-6

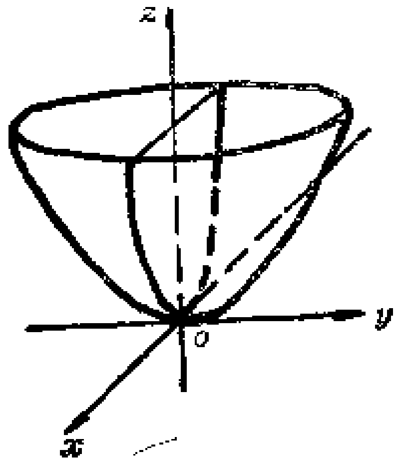


图 6-7

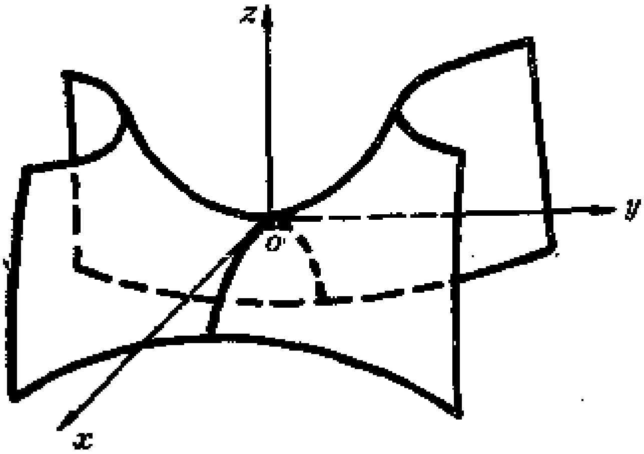


图 6-8

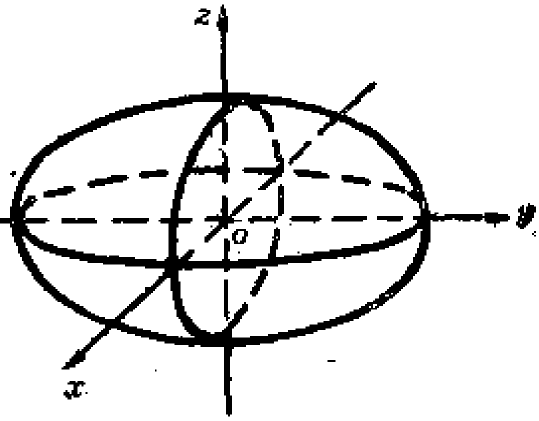


图 6-9

三、二元函数的极限与连续性

与一元函数的情况相类似，二元函数的极限是研究当自变量 $x\to x_0$，$y\to y_0$，即点 $P(x, y)\to P_0(x_0, y_0)$ 时，对应的函数值 $f(x, y)$ 的变化趋势。

定义 设二元函数 $z=f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某一邻近区域内有定义，如果 $P(x, y)$ 沿任何方向趋于定点 $P_0(x_0, y_0)$ 时，函数 $f(x, y)$ 趋于常数 A，则称 A 是 $f(x, y)$ 在点 P_0 的极限，记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=A$$

或

$$\lim_{\rho\to 0} f(x, y)=A$$

这里，$\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$.

上述极限定义实际上是一元函数极限定义的推广，所以有关一元函数的极限运算法则，同样可以推广到二元函数中来。

定义 设二元函数 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的邻近区域内有定义，且

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=f(x_0, y_0)$$

则称 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ **连续**。

如果函数 $f(x, y)$ 在定义域 D 内的每点都连续，则称 $f(x, y)$ 在 D 上**连续**。

初等函数在其定义域内连续。

二元函数的间断点比较复杂，例如函数 $z_1=\dfrac{xy}{x+y}$ 和 $z_2=\ln(1-x^2-y^2)$ 的间断点分别是 xoy 平面上的直线 $x+y=0$ 和 xoy 平面上圆周 $x^2+y^2=1$ 的点集。

习 题 6-1

1．求点 $P(-6, 5, -4)$ 到各坐标轴及各坐标平面的距离。

2．在 yoz 平面上求与已知点 $A(3, 1, 2)$，$B(4, -2, -2)$，$C(0, 5, 1)$ 等距离的点。

3．确定并画出下列函数的定义域：

(1) $z=\sqrt{xy}$；　　(2) $z=\sqrt{x-y+1}$；

(3) $z=\ln(y^2-4x+8)$；　(4) $u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}$ $(0<r<R)$。

4．求二元函数 $z=\dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 在点 $(0, 1)$，$(2, 4)$ 的函数值。

5．设 $f(u, v)=u^v$，求 $f(xy, x+y)$。

6．设 $f(x, y)=x^2+y^2-xy\,\mathrm{tg}\dfrac{x}{y}$，求 $f(tx, ty)$。

7．求函数 $u=\ln\dfrac{1}{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$ 的间断点。

8．求函数 $z=\ln(1+x^2-y^2)$ 的不连续区域。

第二节　偏导数与全微分

一、偏　导　数

对于多元函数，我们同样需要讨论它的变化率。以二元函数 $z=f(x, y)$，在考虑 z 对自变量 x 的变化率时，就固定自变量 y（看作常量），这时 z 就是自变量 x 的一元函数．同样，若固定自变量 x，就可讨论 z 对自变量 y 的变化率。

定义　设函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的邻近区域内有定义，当 y 固定在 y_0，而 x 在 x_0 处有增量 Δx 时，相应的函数增量（称为对 x 的偏增量）为：

$$f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0)$$

如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限值为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 对 x 的**偏导数**，记为

$$f'_x(x_0, y_0),\ \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\ \text{或}\quad \left.z'_x\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$$

类似的，可以定义 $z=f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 时 y 的偏导数：

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=f'_y(x_0,y_0)$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

偏导数的概念可以推广到二元以上的函数。

如果函数 $z=f(x, y)$ 在区域 D 内每一点都有对 x（或 y）的偏导数，则称 $z=f(x, y)$ 在区域 D 内有对 x（或 y）的**偏导函数**，简称**偏导数**，记为

$$f'_x(x, y),\ \frac{\partial z}{\partial x},\ z'_x;$$

或

$$f'_y(x, y),\ \frac{\partial z}{\partial y},\ z'_y.$$

求多元函数的偏导数并不需要新的方法，因为对某一自变量

求偏导数时，只有这个自变量在变动，其余的自变量都视为常量，所以一元函数的求导法则和求导公式都是适用的。

例 1 求 $z=x^3+3xy-y^2+4x+4y$ 在点 (1, 2) 的偏导数。

解
$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2+3y+4$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=3x-2y+4$$
$$f'_x(1,\ 2)=3\times1^2+3\times2+4=13$$
$$f'_y(1,\ 2)=3\times1-2\times2+4=3$$

例 2 求 $z=yx^y$ 的偏导数。

解
$$\frac{\partial z}{\partial x}=y^2x^{y-1}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^y+yx^y\ln x$$

例 3 已知理想气体的状态方程 $pV=RT$(R 为常数)，求证
$$\frac{\partial p}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p}=-1$$

证 因为
$$p=\frac{RT}{V},\quad \frac{\partial p}{\partial V}=-\frac{RT}{V^2};$$
$$V=\frac{RT}{p},\quad \frac{\partial V}{\partial T}=\frac{R}{p};$$
$$T=\frac{pV}{R},\quad \frac{\partial T}{\partial p}=\frac{V}{R};$$

所以，
$$\frac{\partial p}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p}=-\frac{RT}{V^2}\cdot\frac{R}{p}\cdot\frac{V}{R}=-1$$

由此例可见，偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 或 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 是一个整体记号，不能看作比的形式。

二、高阶偏导数

二元函数 $z=f(x,\ y)$ 的偏导数 $f'_x(x,\ y)$，$f'_y(x,\ y)$ 一般仍然是 x，y 的函数，若它们的偏导数仍存在，则称 $f'_x(x,\ y)$，$f'_y(x,\ y)$ 的偏导数为函数 $z=f(x,\ y)$ 的**二阶偏导数**。二元函数的二阶偏导

数共有四个，分别记为：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x,\ y)=z''_{xx}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,\ y)=z''_{xy}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x,\ y)=z''_{yx}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}(x,\ y)=z''_{yy}$$

其中$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$称为$z=f(x,\ y)$的**二阶混合偏导数**。

同样可以定义更高阶的偏导数。

例 4 求函数$z=xe^{xy}$的二阶偏导数.

解

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{xy}+xye^{xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^2e^{xy}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=ye^{xy}+y(e^{xy}+xye^{xy})$$
$$=(2y+xy)e^{xy}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^3e^{xy}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=xe^{xy}+x(e^{xy}+xye^{xy})$$
$$=(2x+x^2y)e^{xy}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=2xe^{xy}+x^2ye^{xy}$$
$$=(2x+x^2y)e^{xy}$$

在本例中，可以看到两个二阶混合偏导数相等，即$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$。可以证明，若$z''_{xy}$，$z''_{yx}$在区域$D$内连续，则在该区域内它们必相等，即$z''_{xy}$，$z''_{yx}$二阶混合偏导数与求导的先后次序无关。

三、全　微　分

在一元函数中，如果 $y=f(x)$ 在点 x 可导，则

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+o(\Delta x)$$

$f'(x)\Delta x$ 是 Δy 的线性主部，称为函数在点 x 的微分，记作

$$dy=f'(x)\Delta x$$

在二元函数里也有类似的概念。

定义　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的邻近区域内有定义，且 x 有增量 Δx，y 有增量 Δy，则

$$\Delta z=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y)$$

称为 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 的**全增量**。

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $p(x,y)$ 具有偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$，如果 $\Delta z=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy+o(\rho)$ $(\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2})$，则称 $\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$ 为函数 $f(x,y)$ 在点 p 的**全微分**，记作

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

其中 $\frac{\partial z}{\partial x}dx$，$\frac{\partial z}{\partial y}dy$ 分别称为函数 z 对 x、y 的**偏微分**。因此，全微分等于诸偏微分之和。

对于三元可微函数 $u=f(x,y,z)$，类似有：

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz$$

二元函数 $y=f(x,y)$ 在一点可导，是指有两个偏导数存在。而函数在一点可微，是指有全微分存在。偏导数存在而且连续是全微分存在的充分条件。可见，对于二元函数，可导与可微是两个不同的概念，这是有别于一元函数的。

例 5　求函数 $z=e^{xy}$ 在点 $(2,1)$ 的全微分。

解

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=2\\y=1}}=\left.ye^{xy}\right|_{\substack{x=2\\y=1}}=e^2$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=2\\y=1}}=xe^{xy}\Big|_{\substack{x=2\\y=1}}=2e^2$$

所以，$z=e^{xy}$ 在点(2, 1)的全微分为：

$$dz=e^2dx+2e^2dy$$

例6 求$u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$的全微分。

解 因为 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{-z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

所以

$$du=\frac{-1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(xdx+ydy+zdz)$$

例7 有一圆柱体，受压后它的底半径由 20cm 增大到 20.05 cm，高度由 100 cm 减少到 99 cm，求此圆柱体体积变化的近似值。

解 设底半径、高和体积分别为 r、h 和 V，有 $V=\pi r^2h$。用全微分 dV 来近似代替全增量 ΔV，即

$$\Delta V\approx dV=\frac{\partial V}{\partial r}\Delta r+\frac{\partial V}{\partial h}\Delta h$$

$$=2\pi rh\Delta r+\pi r^2\Delta h$$

将 $r=20$, $h=100$, $\Delta r=0.05$, $\Delta h=-1$，代入上式，得

$$\Delta V\approx 2\pi\times 20\times 100\times 0.05+\pi\times 20^2\times(-1)$$

$$=-200\pi\approx -628.3(\mathrm{cm}^3)$$

所以，圆柱体在受压后，体积约减少 628.3cm³。

习 题 6-2

1. 求下列函数的偏导数：

(1) $z=x^3y-y^3x$；　　(2) $z=\sqrt{xy}$；

(3) $z=\sin(xy)+\cos^2(xy)$；

(4) $z=x^{-y}$。

2．求下列函数在指定点的偏导数：

(1) $z=\frac{x}{x+y}$ 在点(2,1)；

(2) $f(x,y)=xe^{y}$在点(2,1)。

3．求下列函数的二阶偏导数：

(1) $z=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$；

(2) $z=e^{xy}+ye^{x}+xe^{y}$。

4．设$z=\frac{y}{x}(x\neq 0)$，验证 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$。

5．验证$z=e^{x}\cos y$满足$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$。

6．设$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，求证：

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{2}{r}$$

7．求下列函数的全微分：

(1) $z=(x^3-2y)^2+xy$；

(2) $z=\frac{x^2}{y^2+\sin xy}$；

(3) $u=\sin(x^2+y^2+z^2)$。

8．当圆锥体形变时，它的底半径R由30cm增加到30.1 cm时，高H由60cm减少到59.5cm，试求体积变化的近似值。

9．测得一块三角形土地的两边边长分别为63±0.1 m和78±0.1m，两边的夹角为60°±1°，试求三角形面积的近似值，并求其绝对误差。

第三节　多元复合函数的求导法则

设$z=f(u,v)$，其中$u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$，则称函数$z=f[u(x,y),v(x,y)]$是x、y的**复合函数**。

定理　如果函数$u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$，在点(x,y)有连续偏导数，且函数$z=f(u,v)$在对应点(u,v)也有连续的偏导数，则复合函数$z=f[(u(x,y),v(x,y)]$在点(x,y)有对x及对y的连续偏导数，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

证略。

对多元复合函数求导，初学时，可根据函数关系画一如图6-10所示的简图，借以认清变量间的层次及其联系；比如，欲求 z 对 x 的偏导数，就看图中从 z 经中间变量 u, v 到 x 有几条线，沿每条线如同一元复合函数那样求导，然后相加即得。

例 1 $z=u^2+v^2$，而 $u=2x+y$，$v=x-2y$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$。

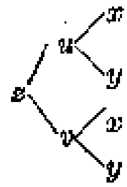


图 6-10

解 结合图6-10有

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\\&=2u\cdot2+2v\cdot1\\&=4(2x+y)+2(x-2y)\\&=10x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y}&=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\\&=2u\cdot1+2v\cdot(-2)\\&=2(2x+y)-4(x-2y)\\&=10y\end{aligned}$$

如果直接计算，因为

$$\begin{aligned}z&=u^2+v^2=(2x+y)^2+(x-2y)^2\\&=5x^2+5y^2\end{aligned}$$

所以，
$$\frac{\partial z}{\partial x}=10x,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=10y.$$

结果相同。

若 $z=f(u, v, w)$，而 $u=u(x, y)$，$v=v(x, y)$，$w=w(x, y)$，见图6-11，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}$$

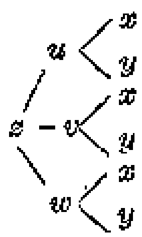


图 6-11

特别地，复合函数的中间变量有多个，但自变量只有一个的情形，$z=f(u,v)$，而 $u=u(t)$，$v=v(t)$，见图 6-12，则

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}$$

由于 $z=f[u(t),v(t)]$ 只有一个自变量，所以把 $\frac{dz}{dt}$ 称为**全导数**.

例 2 设函数 $z=\frac{y}{x}$，$x=e^t$，$y=-2e^{2t}+1$，求 $\frac{dz}{dt}$.

解
$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt}&=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}\\&=-\frac{y}{x^2}\cdot e^t+\frac{1}{x}\cdot(-4e^{2t})\\&=\frac{2e^{2t}-1}{e^{2t}}\cdot e^t+\frac{1}{e^t}(-4e^{2t})\\&=-2e^t-e^{-t}\end{aligned}$$

例 3 设 $z=uv+\sin t$，而 $u=e^t$，$v=\cos t$，求 $\frac{dz}{dt}$.

解 变量之间的关系见图 6-13：

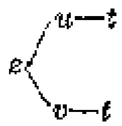


图 6-12

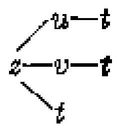


图 6-13

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt}&=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}+\frac{\partial z}{\partial t}\\&=ve^t-u\sin t+\cos t\\&=e^t\cos t-e^t\sin t+\cos t\\&=e^t(\cos t-\sin t)+\cos t\end{aligned}$$

例 4 直圆锥的高以 10cm/s 的速度递减，底半径以 5cm/s 的速度递增，求当高为 100cm，底半径为 50cm 那一瞬间，圆锥体积

的变化率。

解 设在时刻 t，圆锥底半径为 R，高为 h，则圆锥的体积为：

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2h$$

按题意，$\frac{dR}{dt}=5,\frac{dh}{dt}=-10$，则圆锥体积的变化率为：

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt}&=\frac{\partial V}{\partial R}\cdot\frac{dR}{dt}+\frac{\partial V}{\partial h}\cdot\frac{dh}{dt}\\&=\frac{2}{3}\pi Rh\cdot 5+\frac{1}{3}\pi R^2(-10)\end{aligned}$$

当 $R=50$, $h=100$ 时，

$$\begin{aligned}\left.\frac{dV}{dt}\right|_{\substack{R=50\\h=100}}&=\frac{2}{3}\pi\cdot 50\cdot 100\cdot 5+\frac{1}{3}\pi\cdot 50^2\cdot(-10)\\&=26180\end{aligned}$$

即当 $R=50\text{cm}$, $h=100\text{ cm}$ 时，圆锥体积以 $26180\text{ cm}^3/s$ 的速度递增。

关于隐函数的求导，与一元函数的情形相仿，举例说明如下：

例 5 设$e^z-xyz=0$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$。

解 此方程确定稳函数 $z=f(x, y)$，两边对 x 求导，有

$$e^z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-yz-xy\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

所以，
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz}{e^z-xy}$$

同理可得
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz}{e^z-xy}$$

习 题 6-3

1．设 $z=x^2y-xy^2$，而 $x=u\cos v, y=u\sin v$，求 $\frac{\partial z}{\partial u}$，$\frac{\partial z}{\partial v}$。

2．设 $z=e^{x-2y}$，而 $x=\sin t, y=t^3$，求 $\frac{dz}{dt}$。

3．设 $z=\operatorname{arctg}(x,y)$ 而 $y=e^x$，求$\frac{dz}{dx}$。

4．设 $xy-\ln y=0$，求 y'。

5. 设 $\sin y + ze^{x} - xy^2 = 0$，求$\frac{\partial z}{\partial x}$和$\frac{\partial z}{\partial y}$。

6. 验证函数 $z = \operatorname{tg}^{-1}\frac{x}{y}$, $x = u + v$, $y = u - v$，满足 $\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{u - v}{u^2 + v^2}$。

7. 设 $2\sin(x + 2y - 3z) = x + 2y - 3z$，试证：$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$。

第四节　多元函数的极值

定义　设函数 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的邻近区域内有定义，且对点 (x_0, y_0) 附近的任一点 (x, y) 都满足不等式

$$f(x, y) < f(x_0, y_0) \text{ 或 } f(x, y) > f(x_0, y_0)$$

则称函数在点 (x_0, y_0) 有**极大值**或**极小值** $f(x_0, y_0)$。极大值、极小值统称为**极值**。使函数取得极值的点称为**极值点**。

例如，$z = 1 - x^2 - y^2$，在点 $(0, 0)$ 处，$z = 1$；而在其它点处，$z < 1$。故在原点函数有极大值 1。

又如，$z = \sqrt{x^2 + y^2}$，在点 $(0, 0)$ 处，$z = 0$；而在其它点处，$z > 0$。故在原点函数有极小值0。

定理 1　（极值存在的必要条件）　设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 可微且有极值，则

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \ f'_y(x_0, y_0) = 0$$

证　设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 有极大值，则对 (x_0, y_0) 附近任一点 (x, y)，都有

$$f(x, y) < f(x_0, y_0)$$

取 $y = y_0$，有

$$f(x, y_0) < f(x_0, y_0)$$

$f(x, y_0)$ 可看作 x 的一元函数，按一元函数极值的必要条件，在 (x_0, y_0) 处必有

$$f'_x(x_0, y_0) = 0$$

同理可证，$f'_y(x_0, y_0) = 0$。

$f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 有极小值的情况也可仿此证明。

把同时满足 $f'_x(x_0, y_0)=0$ 和 $f'_y(x_0, y_0)=0$ 的点称为**驻点**，要注意的是可微函数的极值点一定是驻点，但驻点不一定是极值点。例如，在原点(0, 0)，函数 $z=y^2-x^2$ 的两个偏导数等于零，但该函数在点(0, 0)没有极值。

定理 2 （极值存在的充分条件） 设函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的邻近区域内连续且有一阶及二阶连续偏导数，又 $f'_x(x_0, y_0)=0$，$f'_y=(x_0, y_0)=0$，若令 $f''_{xx}(x_0, y_0)=A$，$f''_{xy}(x_0, y_0)=B$，$f''_{yy}(x_0, y_0)=C$，则

(1) 当 $B^2-AC<0$ 时，函数在点 (x_0, y_0) 处有极值，且当 $A<0$ 时，有极大值 $f(x_0, y_0)$；当 $A>0$ 时，有极小值 $f(x_0, y_0)$。

(2) 当 $B^2-AC>0$ 时，函数在点 (x_0, y_0) 处无极值。

(3) 当 $B^2-AC=0$ 时，函数在点 (x_0, y_0) 处不能确定是否有极值。

证略。

求二元函数 $z=f(x, y)$ 极值的步骤可归纳如下：

1. 求 $z=f(x, y)$ 的一、二阶偏导数；

2. 解方程组

$$\begin{cases} f'_x(x, y)=0 \\ f'_y(x, y)=0 \end{cases}$$

求得各驻点；

3. 对每一驻点 (x_0, y_0)，求出 $A=f''_{xx}(x_0, y_0)$，$B=f''_{xy}(x_0, y_0)$，$C=f''_{yy}(x_0, y_0)$，应用定理 2，由 B^2-AC 的符号判断驻点是否为极值点；

4. 求出极值点处的函数值。

例 1 求函数 $f(x, y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值。

解 $f'_x=3x^2+6x-9$，$f'_y=-3y^2+6y$，

$f''_{xx}=6x+6$，$f''_{yy}=-6y+6$，

$y''_{xx}=0$，

解方程组
$$\begin{cases} 3x^2+6x-9=0 \\ -3y^2+6y=0 \end{cases}$$

解得点(1, 0), (1, 2), (−3, 0), (−3, 2) 为驻点，然后分别求出各驻点对应的 A、B、C 值，确定 B^2-AC 的符号进行判定，见表 6-1。

表 6-1

驻　点	A	B	C	B^2-AC	判　定
(1, 0)	12	0	6	−	极小值 −5
(1, 2)	12	0	−6	+	无极值
(−3, 0)	−12	0	6	+	无极值
(−3, 2)	−12	0	−6	−	极大值 31

同一元函数类似，二元函数的最大值、最小值不仅可能在区域 D 内，也可能在区域 D 的边界上取得，故应先求出函数在区域 D 内的所有极值以及在区域边界上的最大值和最小值，然后从比较中找出最大者和最小者，有时也可由问题的实际意义作出判断。

前面讨论的极值问题，对自变量只有定义域的限制，没有附加其它条件，称为**无条件极值**问题。但实际工作中会遇到有附加条件的极值问题，称为**条件极值**问题。

条件极值问题通常可转化为无条件极值问题来解决，试看下例。

例　求在抛物线 $y=x^2$ 上找一点，使它到直线 $x+y+1=0$ 的距离最短。

解　设所求的点为 (x, y)，这点到直线 $x+y+1=0$ 的距离为：

$$f(x, y)=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y+1)$$

由于这点在抛物线上，将 $y=x^2$ 代入上式，便将问题转化为求下列一元函数的极值：

$$G(x)=\frac{x+x^2+1}{\sqrt{2}}$$

欲距离最短，必须有 $G'(x)=0$，即

$$\sqrt{\frac{1}{2}}(1+2x)=0$$

得 $x=-\frac{1}{2}$.

因为 $y=x^2$, 故 $y=\frac{1}{4}$.

从而得唯一的驻点 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$, 此即为所求的点.

习 题 6-4

1. 求函数 $f(x,y)=x^2+xy+y^2+x-y+1$ 的极值.

2. 求函数 $f(x,y)=4(x-y)-x^2-y^2$ 的极值.

3. 求本章第一节例 3 中所述函数

$$E=x^2(a-x)t^2e^{-t} \quad (a\text{ 为常量})$$

取得最大值(最大反应)的药量和时间.

4. 三个正数之和为 12, 问三数为何值时才能使三数之积为最大?

5. 建造一个长方形水池, 池底和池壁的总面积为 108m², 问水池的尺寸如何, 能使容积最大?

6*. 有一块宽 24cm 的铁板, 把它的两边折起来做成一个断面为等腰梯形的水槽, 问怎样折法才能使断面的面积为最大?

7*. 求函数 $z=xy$ 在条件 $x+y=1$ 下的极值.

8*. 求函数 $z=x^2+y^2$ 在条件 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 下的极值.

*第五节 最小二乘法

一、最小二乘法的经验公式

实际问题中, 两个变量间的函数关系往往是未知的, 通过实验得到的是若干对数据, 怎样依据这些数据建立函数关系的最佳的解析表达式, 即经验公式呢? 最小二乘法是精度较高的方法.

假定进行 n 次观察, 得到 n 对数据 (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\cdots$, (x_n, y_n), 在平面直角坐标系中, 表现为 n 个点(称为**散点图**), 如果这 n 个点明显呈直线趋势分布(图 6-14), 则可用直线型经验公式去拟

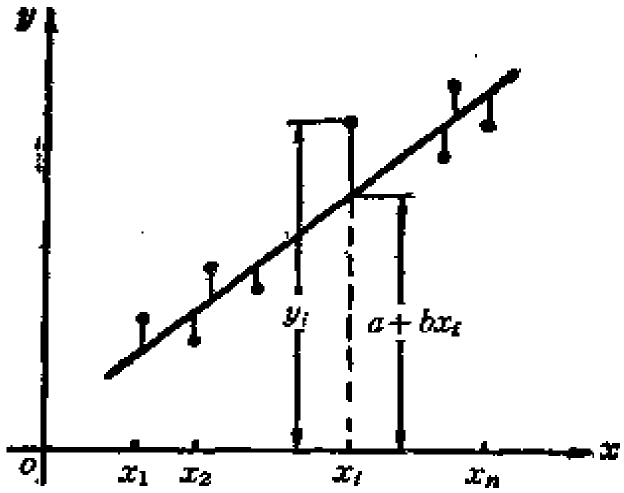


图 6-14

合，故设

$$y=a+bx \tag{1}$$

问题归结为如何确定斜率 b 和截距 a 的值，使得直线 $y=a+bx$ 与 n 个数据点吻合得最好，也就是要求观察值 y_i 与计算值 $a+bx$ 的离差 $y_i-(a+bx_i)$ 总和最小，但离差有正有负，为避免求和时的相互抵消，我们用离差平方和

$$Q=\sum_{i=1}^{n}[y_i-(a+bx_i)]^2 \tag{2}$$

来衡量直线与 n 个数据点的吻合程度。Q 值越小，吻合越佳。因此，要求出使 Q 值最小的 a, b 值。这种以离差平方和最小而确定经验公式的方法称为**最小二乘法**。使 Q 达到最小值的必要条件是：

$$\frac{\partial Q}{\partial a}=0,\text{及}\quad \frac{\partial Q}{\partial b}=0$$

由上式有

$$\begin{cases}-2\sum_{i=1}^{n}[y_i-(a+bx_i)]=0\\ -2\sum_{i=1}^{n}[y_i-(a+bx_i)]x_i=0\end{cases}$$

整理后，得

$$\begin{cases}na+b\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}y_i\\ a\sum_{i=1}^{n}x_i+b\sum_{i=1}^{n}x_i^2=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\end{cases} \tag{3}$$

方程组(3)称为**正规方程组**，解此方程组可得

$$b=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2} \tag{4}$$

$$a=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i-b\sum_{i=1}^{n}x_i\right)=\bar{y}-b\bar{x} \tag{5}$$

将 a, b 代入方程(1)，便得所要求的直线型经验公式。

例1 测得某克山病区10名健康儿童头发与全血中的硒含量，见表6-2，试用最小二乘法建立由发硒 x 推算血硒 y 的经验公式。

表 6-2

发 硒 x	74	66	88	69	91	73	66	96	58	73
血 硒 y	13	10	13	11	16	9	7	14	5	10

解 先作散点图，即在平面直角坐标系内作出10个数据点，结果表明数据点呈明显的直线分布趋势，故选用直线型经验公式(1)。然后按(4)式和(5)式依次计算 b 和 a 值。为此，把计算中要用到的中间结果，先列成表6-3。

表 6-3

i	x_i	y_i	x_i^2	x_iy_i
1	74	13	5476	962
2	66	10	4356	660
3	88	13	7744	1144
4	69	11	4761	759
5	91	16	8281	1456
6	73	9	5329	657
7	66	7	4356	462
8	96	14	9216	1344
9	58	5	3364	290
10	73	10	5329	730
$\sum_{i=1}^{10}$	754	108	58212	8464

由表6-3，有

$$\sum_{i=1}^{10}x_i=754,\ \sum_{i=1}^{10}y_i=108,\ \sum_{i=1}^{10}x_i^2=58212,\ \sum_{i=1}^{10}x_iy_i=8464$$

代入公式(4)和(5)，可得

$$b=0.2358,\ a=-6.9803$$

故所求的直线型经验公式为：

$$y=0.2358\,x-6.9803$$

二、曲线的直线化及其应用

在许多实际问题中，两变量之间的依赖关系不是线性的，但其中有些类型可以化为线性关系来研究，这就是曲线直线化的问题。医学上常见的幂函数 $y=ax^b$ 型和指数函数 $y=ae^{bx}$ 型的经验公式问题，可先转化为直线型，再按最小二乘法确定参数 a 和 b，从而使问题得到解决，现举例如下：

例2 通过动物实验研究维生素K饲量(x)与血凝剂浓度(y)的关系，获得实验数据见表6-4，求 x 与 y 之间的经验公式。

表 6-4

x	1.6	2.2	3.0	4.4	6.0	7.2	10.0	11.4
y	500	162	135	46.8	38.9	20.9	12.0	8.9
X	0.20	0.34	0.48	0.64	0.78	0.86	1.00	1.05
Y	2.70	2.21	2.13	1.67	1.59	1.32	1.08	0.95

解 先由实验数据作出散点图，发现数据点呈幂函数曲线的形状，故采用幂函数 $y=ax^b$ 型经验公式。

将 $y=ax^b$ 两边取对数，有

$$\lg y=\lg a+b\lg x$$

令 $Y=\lg y$，$X=\lg x$，上式便转化为线性方程

$$Y=\lg a+bX$$

计算 X 与 Y 值见表 6-4 的下面两行，如将横轴取为 X，纵轴取为 Y，以 (X, Y) 为点作图，则点呈直线分布趋势。对 (X, Y) 数据用最小二乘法，可求得 $b=-1.93$，$\lg a=3.00$，即 $a=1000$，故有

$$Y=3.00-1.93X$$

经验公式为：

$$y=1000x^{-1.93}$$

例 3 研究单分子化学反应速度时得到如表 6-5 所示数据，其中 t 表示实验开始的时间，y 表示当时在混合物中的物质的量，求经验公式 $y=f(t)$。

表 6-5

t	3	6	9	12	15	18	21	24
y	57.6	41.9	31.0	22.7	16.6	12.2	8.9	6.5

解 将实验所得数据在直角坐标系中作散点图，发现数据点呈递减的指数函数曲线形状。由化学反应速度的理论知道，经验公式应该是指数函数

$$y=ke^{-mt}$$

两边取对数，得

$$\lg y=(-m\lg e)t+\lg k \quad (k>0)$$

令 $-m\lg e=a$，$\lg k=b$，则有

$$\lg y=at+b$$

这样 $\lg y$ 就是 t 的线性函数了。用 $(t_i, \lg y_i)$ 在直角坐标系上作图或用数据 (t_i, y_i) 在半对数坐标纸上作图，这些点的连线接近于一条直线。用最小二乘法求得

$$a=-0.045,\ b=1.8964$$

因为 $$-m\lg e=a,\ \lg e=0.4343$$

故可得 $$m=0.1036$$

因为 $$\lg k=b=1.8964，故得$$

$$k=78.78$$

于是，所求的经验公式为：

$$y=78.78e^{-0.1036t}$$

习 题 6-5

1. 经研究，肺泡气体内氧分压与外界气压有着密切的关系，现测得数据如表 6-6 所示。

表 6-6

外界气压 x(10mmHg)	5	6	8	11	13
氧分压 y(mmHg)	5	7	10	16	22

试用最小二乘法求外界气压 x 与肺泡气体内氧分压 y 的经验公式。

2. 在生化检验中，某人为了绘制血清谷丙转氨酶活性测定的工作曲线，测得酶活性单位与光密度之间的数据，见表 6-7。

表 6-7

酶活性单位 x	100	200	300	400
光 密 度 y	0.102	0.202	0.290	0.385

试用最小二乘法求出经验公式。

3. 对某品种小白鼠作中子照射研究，得到小白鼠死亡率的数据如表 6-8所示。

表 6-8

照射后星期 T	40	50	60	70	80	100	110	120
死亡率 P(%)	12	17	22	32	43	76	92	96

作出 $\lg P$ 对 $\lg T$ 的散点图，并求 $P=aT^b$ 型经验公式。

4. 对一癫痫病人一次静脉注射 300mg苯妥英纳，测得血药浓度 C 与时

表 6-9

t(h)	5	10	15	20	30	40	50
C(μg/ml)	4.70	3.65	3.05	2.40	1.45	0.95	0.61

间t的数据如表6-9所示，求$C=C_0e^{-kt}$型经验公式。

5．以不同剂量的中子照射大肠杆菌，所得实验数据如表6-10所示，

表 6-10

剂量 $D(10^4\mathrm{r})$	0.55	0.10	2.20	3.30	4.40	6.60	8.80
存 活 率 q	0.80	0.66	0.58	0.48	0.37	0.23	0.13

求$q=e^{-kD}$型经验公式。

第六节 二重积分

一、二重积分的概念

一元函数$y=f(x)$在区间$[a, b]$上的定积分$\int_a^b f(x)dx$是一类和式的极限：

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

类似地，对于二重积分有如下的定义。

定义 设$z=f(x, y)$在闭区域D上有定义，将区域D分成n个小区域，(ξ_i, η_i)是第i个小区域上的任一点，$\Delta\sigma_i$是第i个小区域的面积(图6-15)，作和式

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i \tag{1}$$

如果当小区域任意划分及点(ξ_i, η_i)任意选取，各小区域直径的最大值λ趋于零时，和式(1)的极限总是存在，则称此极限为二元函数$z=f(x, y)$在区域D上的**二重积分**，记作

$$\iint_D f(x, y)dxdy=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i \tag{2}$$

其中$f(x, y)$称为**被积函数**，D称为**积分区域**，和式(1)称为**积分和**。

不妨假定$f(x, y)\geqslant 0$，由图6-15可以看出，乘积$f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$

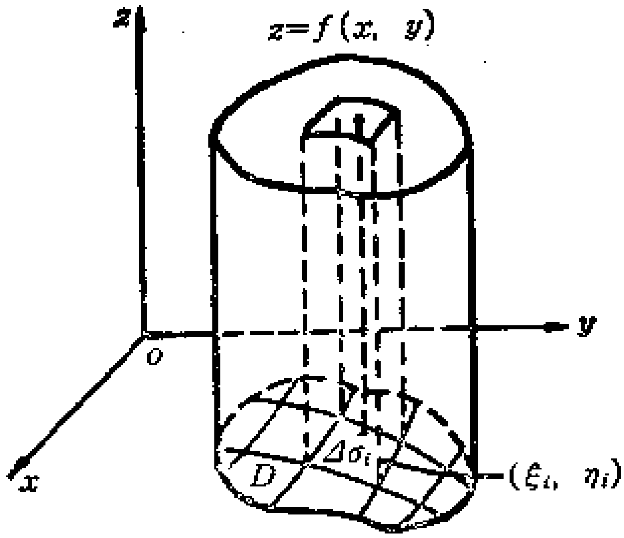


图 6-15

表示以 $\Delta\sigma_i$ 为底面，$f(\xi_i, \eta_i)$ 为高的小柱体的体积，而积分和(1)表示以区域 D 为底，曲面 $z=f(x, y)$ 为顶的曲顶柱体体积 V 的近似值，当 n 越大，λ 越接近于零时，积分和与 V 的差就越小，所以二重积分 $\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy$ 就表示以区域 D 为底，曲面 $z=f(x, y)$ 为顶的曲顶柱体的体积。

二、二重积分的性质

二重积分有与定积分类似的性质，现叙述于下：

性质 1 常数因子可以提到二重积分号外面，即

$$\iint\limits_D kf(x, y)\,dxdy = k\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy \qquad (k\ 为常数)$$

性质 2 两个(或有限个)函数代数和的二重积分等于各函数的二重积分的代数和，即

$$\iint\limits_D [f(x, y) \pm g(x, y)]\,dxdy$$

$$= \iint\limits_D f(x, y)\,dxdy \pm \iint\limits_D g(x, y)\,dxdy$$

性质 3 如将闭区域 D 分成两个子区域 D_1, D_2，则

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_{D_1} f(x,y)dxdy+\iint_{D_2} f(x,y)dxdy$$

利用性质3，可以将形状复杂的区域 D，由有限条曲线分为有限个简单区域，然后进行计算。这个性质表示二重积分对于积分区域具有可加性。

性质4 闭区域 D 的面积 σ，等于在该区域上被积函数为1的二重积分，即

$$\sigma=\iint_D dxdy$$

三、二重积分的计算

设闭区域 D 是由曲线 $y=\varphi_1(x)$，$y=\varphi_2(x)$ $(\varphi_1(x)\leqslant\varphi_2(x))$，$x=a$，$x=b(a\leqslant b)$ 围成(图6-16)。

先计算截面面积，为此，在区间 $[a,b]$ 上任取一点 x_0，作平行于 yoz 面的平面 $x=x_0$，去截曲顶柱体，所得截面是一个以区间 $[\varphi_1(x_0),\varphi_2(x_0)]$ 为底，曲线 $z=f(x_0,y)$ 为曲边的曲边梯形(图6-16中的阴影部分)，设截面积为 $s(x_0)$，则

$$s(x_0)=\int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x_0,y)dy$$

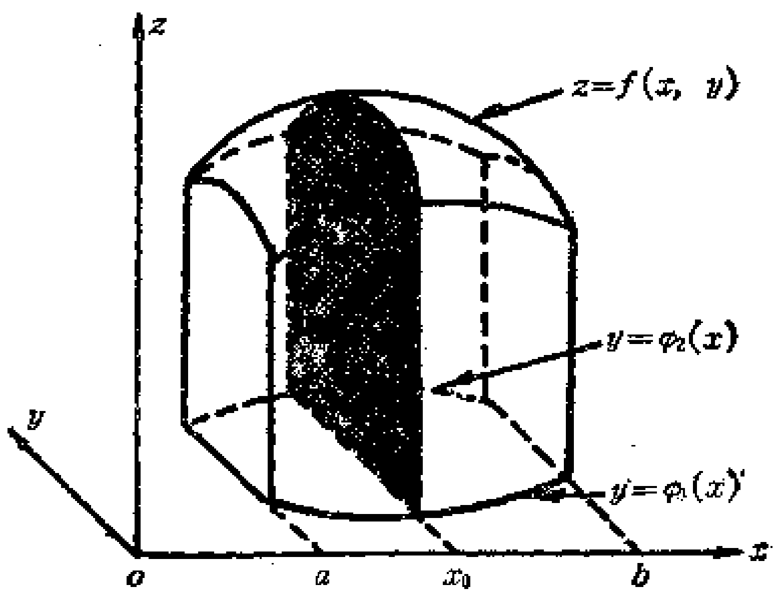


图 6-16

一般地，过区间$[a, b]$上任一点x且平行于yoz面的平面截曲顶柱体所得截面的面积为：

$$s(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy$$

由于x的变化范围是从a到b，由此，曲顶柱体的体积为：

$$V=\int_a^b s(x)\,dx=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy\right]dx$$

这种二次积分也常写成：

$$\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy$$

于是
$$\iint_D f(x, y)\,dxdy=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy$$
$$=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy\right]dx \tag{3}$$

同理，若积分区域D可表示为：

$$\Phi_1(y)\leqslant x\leqslant\Phi_2(y),\quad c\leqslant y\leqslant d$$

则有

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy=\int_c^d dy\int_{\Phi_1(y)}^{\Phi_2(y)} f(x, y)\,dx \tag{4}$$

(3)和(4)式都是将二重积分化为先对其中一个变量积分，后对另一个变量积分的二次积分公式。虽然在上述讨论中曾假定$f(x, y)\geqslant 0$，但利用(3)或(4)式计算二重积分时，并不受这个条件的限制。

例 1 计算$\iint\limits_D\left(1-\dfrac{x}{4}-\dfrac{y}{3}\right)dxdy$，其中$D$为：$-2\leqslant x\leqslant 2$，$-1\leqslant y\leqslant 1$(图 6-17)。

解 如果先对y后对x积分，则

$$\iint_D\left(1-\frac{x}{4}-\frac{y}{3}\right)dxdy$$
$$=\int_{-2}^{2} dx\int_{-1}^{1}\left(1-\frac{x}{4}-\frac{y}{3}\right)dy$$

$$=\int_{-2}^{2}\left[\left(1-\frac{x}{4}\right)y-\frac{y^2}{6}\right]_{-1}^{1}dx$$
$$=\int_{-2}^{2}\left(2-\frac{x}{2}\right)dx$$
$$=\left[2x-\frac{x^2}{4}\right]_{-2}^{2}=8$$

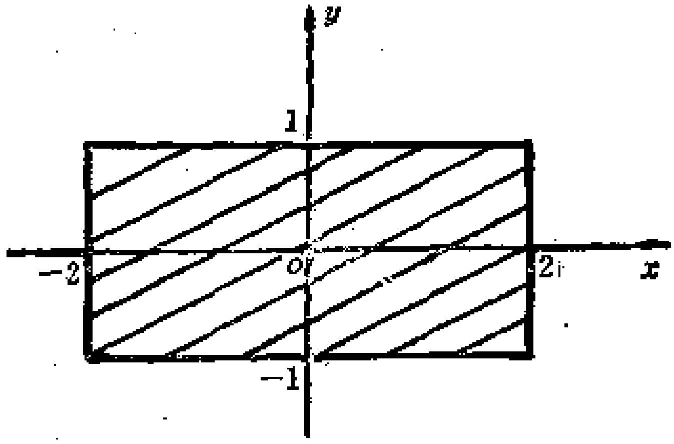


图 6-17

如果先对 x 后对 y 积分，则

$$\iint\limits_D\left(1-\frac{x}{4}-\frac{y}{3}\right)dxdy$$
$$=\int_{-1}^{1}dy\int_{-2}^{2}\left(1-\frac{x}{4}-\frac{y}{3}\right)dx$$
$$=\int_{-1}^{1}\left[x-\frac{x^2}{8}-\frac{xy}{3}\right]_{-2}^{2}dy$$
$$=\int_{-1}^{1}\left(4-\frac{4}{3}y\right)dy$$
$$=4\left[y-\frac{y^2}{6}\right]_{-1}^{1}=8$$

此例说明，这时积分次序可以自由选择。

例2 计算 $\iint\limits_D xydxdy$，其中 D 由直线 $x=1$, $x=2$, $y=x$, $y=2x$ 所围成，见图 6-18。

解 积分区域 D 可表示为：

$$1\leqslant x\leqslant 2,\ x\leqslant y\leqslant 2x.$$

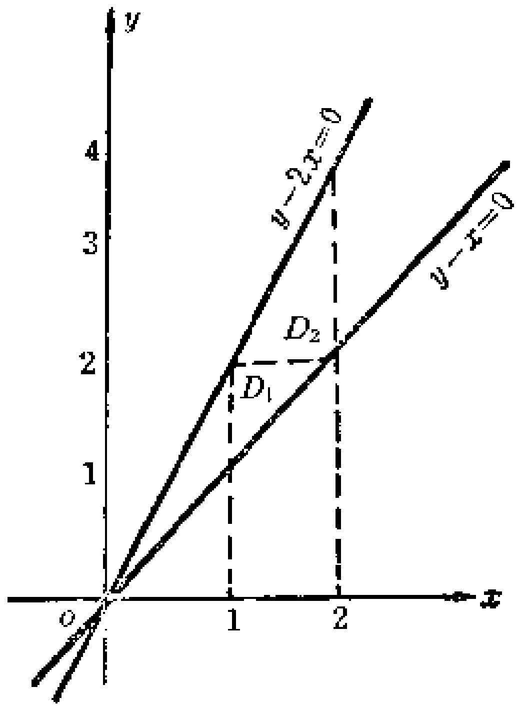


图 6-18

如先对 y 后对 x 积分，则

$$\iint\limits_D xydxdy=\int_1^2 xdx\int_x^{2x} ydy$$

$$=\int_1^2 x\left[\frac{1}{2}y^2\right]_x^{2x}dx$$

$$=\int_1^2 \frac{3}{2}x^3dx=\frac{45}{8}=5\frac{5}{8}$$

如果改变积分次序，先对 x 后对 y 积分，需将 D 分为两个区域 D_1 和 D_2(图 6-14)。

D_1：$1\leqslant y\leqslant 2,\ 1\leqslant x\leqslant y$

D_2：$2\leqslant y\leqslant 4,\ \frac{y}{2}\leqslant x\leqslant 2$

$$\iint\limits_D xydxdy=\int_1^2 ydy\int_1^y xdy+\int_2^4 ydy\int_{\frac{1}{2}y}^2 xdx$$

$$=\int_1^2\left(\frac{y^3}{2}-\frac{y}{2}\right)dy+\int_2^4\left(2y-\frac{y^3}{8}\right)dy$$

$$=1\frac{1}{8}+4\frac{1}{2}=5\frac{5}{8}$$

习 题 6-3

1. 画出积分区域，并计算下列二重积分：

(1) $\iint\limits_D xe^{xy}dxdy$，其中 D 为矩形： $0\leqslant x\leqslant 1, -1\leqslant y\leqslant 0$；

(2) $\iint\limits_D xy^2dxdy$，其中 D 为 $x^2+y^2=4$ 与 y 轴所围成的右半区域；

(3) $\iint\limits_D (x^2-y^2)dxdy$，其中 D 为：$0\leqslant y\leqslant \sin x, 0\leqslant x\leqslant \pi$。

2. 更换下列二次积分的积分次序：

(1) $\int_0^1 dy\int_0^y f(x,y)dx$；

(2) $\int_0^2 dx\int_x^{2x} f(x,y)dy$；

(3) $\int_{-5}^1 dx\int_{\frac{x^2-1}{4}}^{1-x} f(x,y)dy$。

3. 利用二重积分计算 $y^2=x, y^2=4x$ 与 $x=4$ 所围成的图形的面积。

第七章　概率论初步

概率论是研究随机现象的数量规律的一个数学分支，它的基本理论和方法，不仅在工业、农业、军事、生物科学和医学领域有广泛的应用，而且也是学习医学统计方法的基础，本章将介绍概率论的基本知识。

第一节　随机事件及其运算

一、随 机 事 件

自然界和人类社会中存在着两类不同的现象：一类是确定性现象。例如，在标准大气压下，纯水加热到 100℃ 时必然沸腾，生物体一定会死亡等等。这种在一定的条件下必然会发生的结果称为**必然事件**，通常用 U 表示；反之，在一定条件下，必然不会发生的结果称为**不可能事件**，通常用 V 表示。

另一类是随机现象。例如，妇女怀孕可能是男孩，也可能是女孩，在受孕前不能预先知道；对同年龄不同人的身高，在测量前也是不能预先知道的。这种现象就个别的试验或观察而言，时而会出现这种结果，时而会出现那种结果，具有偶然性。

这种有偶然性的现象是否也有内在规律呢？可以发现，在相同条件下，进行大量试验和观察后，偶然现象也是呈现某种规律的。例如，根据各个国家各个时期的人口统计资料，可以发现新生婴儿中男孩和女孩的比例约为 1:1，人的高度虽然各不相同，但通过大量的统计，把一定范围内的同年龄、同性别人的高度按所占的比例画出“直方图”，就可以连成一条与铜钟纵剖面相似的曲线（如图 7-1）。这种规律称为统计规律。

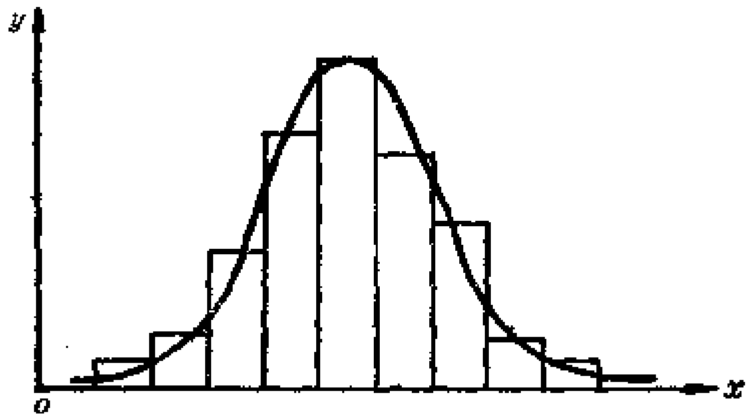


图 7-1

为了研究随机现象的规律性，一般要进行大量的观察、试验或实验，统称为**随机试验**(random test)，简称**试验**.

随机试验必须同时具有三个特点：(1)能够在相同的条件下重复进行；(2)试验的可能结果是明确知道的，并且不止一个；(3)每次试验之前，不能断定在该次试验中将会出现哪一个结果。

随机试验的结果称为**随机事件**(random event)，简称**事件**，通常用大写字母 A, B, C 等表示。概率论中的事件概念与集合论中的集合有对应关系，必然事件 U 对应集合论中的全集，不可能事件 V 对应集合论中的空集 $\varnothing$。

例 1 进行掷硬币试验，其可能结果有两个，即出现正面向上与反面向上，显然，这是随机试验。记 $A=\{$出现正面$\}$，即在掷硬币后，硬币出现正面向上，就说 A 事件发生了；反之若掷后硬币出现反面向上，就说 A 事件没有发生。

随机试验的各个最简单结果都称为**基本事件**。它与组成一个集合的各个元素相对应。

由若干个基本事件复合而成的事件称为**复合事件**。

例 2 通过临床试验，评价某药的疗效，假定把疗效分为痊愈、明显好转、有些好转和无效四级，分别用 A_1, A_2, A_3, A_4 表示。那么，治疗结果若是痊愈，则为事件 A_1 发生；若是无效，则为事件 A_4 发生。A_1, A_2, A_3, A_4 都是随机试验（药物疗效）的最简单的结果，是四个基本事件。设 $B=\{$用该药治疗结果有效$\}$，则

事件 B 是由 A_1, A_2, A_3 构成的复合事件。

二、事件的关系和运算

1. 事件的包含

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 A **含于**事件 B，或称事件 B **包含**事件 A，记为 $B \supset A$ 或 $A \subset B$(图 7-2)。

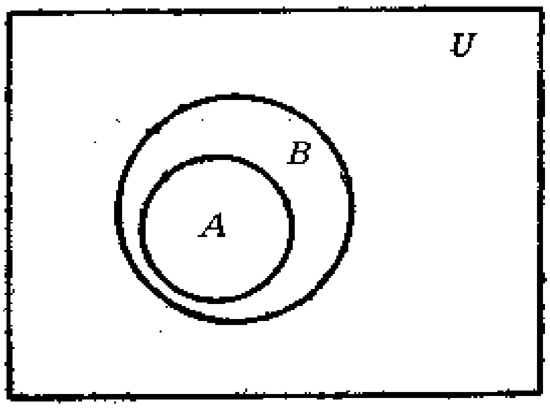


图 7-2

例 3 对肝癌病人进行根治手术，设 $B=\{$至少存活 5 年$\}$，$A=\{$存活了 10 年$\}$，则事件 $A \subset B$。

2. 事件的相等

如果事件 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称事件 A 与 B **相等**，记作 $A=B$。即事件 A 发生必然导致事件 B 发生，且事件 B 发生必然导致事件 A 发生。

3. 事件的并(或和)

如果用 C 表示"事件 A 与 B 中至少有一个发生"这一事件，则称 C 为 A 与 B 的**并**或**和**，记为 $C=A \cup B$，或 $C=A+B$(图7-3)。

从图 7-3 中可以看出，事件 $A \cup B$ 通常包含三个部分：(1) A 发生而 B 不发生；(2) B 发生而 A 不发生；(3) A 和 B 都发生。

事件的和可推广到有限多个事件的情况，如 A 表示"事件 A_1, A_2, …, A_n 中至少有一个发生"的事件，则事件 A 就是 A_1, A_2, …, A_n 的和，记作

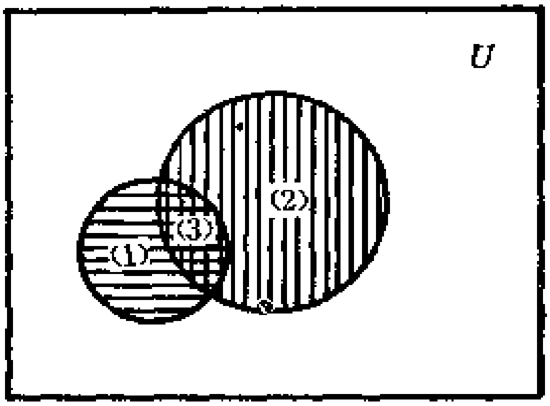


图 7-3

$$A=\sum_{i=1}^{n}A_i=A_1+A_2+\cdots+A_n$$

或

$$A=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$$

基本事件的全体称为**基本事件集**，一般用 E 来表示．基本事件集 E 也是一个事件，而且是一个必然事件．设一个随机试验的全部基本事件为 $E_1, E_2, \cdots, E_n$，则有

$$E=E_1+E_2+\cdots+E_n$$

4. 事件的交（或积）

如果 D 表示"事件 A 与 B 同时发生"这一事件，则称 D 为 A 与 B 的交或积，记为 $D=A\cap B$ 或 $D=A\cdot B$(图 7-4)．

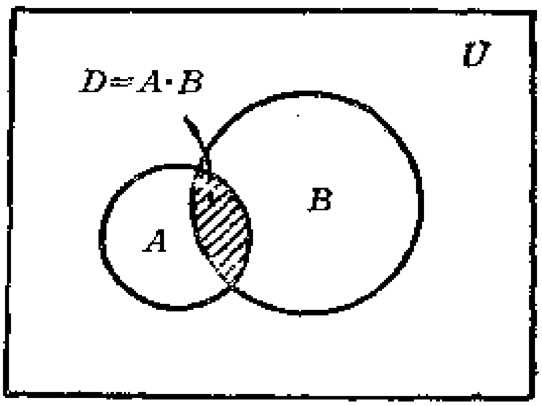


图 7-4

如果事件 A 表示"$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生"这一事件，则 A 就是 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积，记为

$$A = A_1 A_2 A_3 \cdots A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i$$

或

$$A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

5. 事件的差

如果用 F 表示"事件 A 发生而事件 B 不发生"这一事件，则称 F 为 A 与 B 之差，记为 $F = A - B$(图 7-5)。

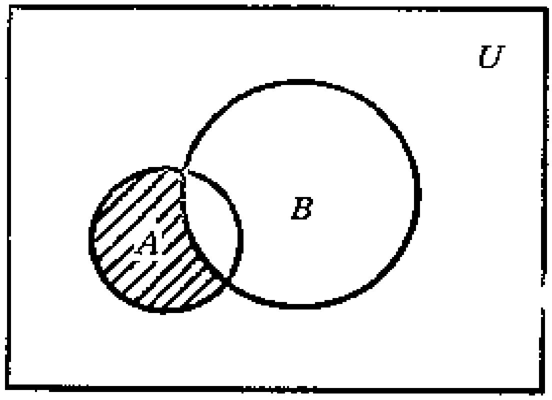


图 7-5

6. 互不相容事件

如果事件 A 发生，则事件 B 必定不发生；反之，事件 B 发生，则事件 A 必定不发生，即事件 A 和 B 不能同时发生，则称事件 A 和 B 是**互不相容的**。由此可见，$AB = \varnothing$。

7. 对立事件(或逆事件)

必然事件 U 与事件 A 之差 $U - A$，这一事件称为 A 的**对立事件(或逆事件)**，记为 $\overline{A}$，它表示"A 不发生"这一事件(图 7-6)。显然 A 与 $\overline{A}$ 互不相容，且

$$A + \overline{A} = U, \text{ 及 } \overline{\overline{A}} = A$$

例 4 设 A, B, C 是三个事件，则

(1) 事件 A 发生，事件 B 不发生可表示为：

$A - B$ 或 $A\overline{B}$

(2) 事件 A 发生，事件 B 与 C 不发生可表示为：

$A - B - C$ 或 $A(\overline{B + C})$ 或 $A\overline{B}\,\overline{C}$

(3) 事件 A, B, C, 都不发生可表示为：

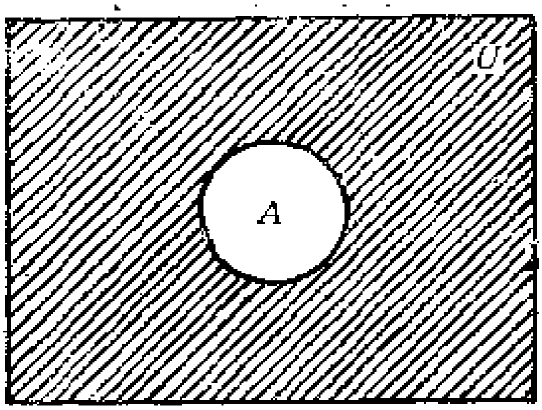


图 7-6

$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ 或 $(\overline{A+B+C})$

(4) 事件 A, B, C, 都发生可表示为：

ABC

(5) 事件 A, B, C, 至少有一个不发生可表示为：

$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$ 或 $\overline{ABC}$

(6) 事件 A, B, C, 恰好发生一个可表示为：

$A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C$

(7) A, B 发生，C 不发生可表示为：

$AB\overline{C}$ 或 $AB-C$

例 5 设事件 A_1, A_2, A_3 分别表示电阻 R_1, R_2, R_3 损坏的事件，事件 B 表示图 7-7 的电路从 a 端到 b 端发生断路的事件，试用 A_1, A_2, A_3 表示 B。

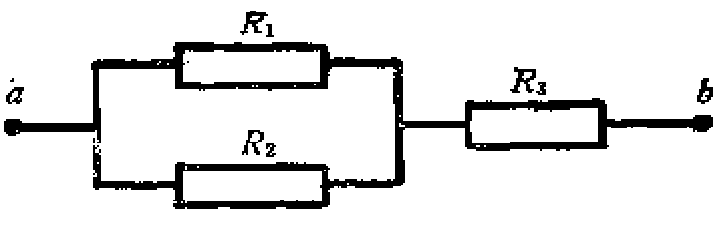


图 7-7

解 事件 B 表示从 a 端到 b 端发生断路，要使事件 B 发生，一种情况是事件 A_3 发生，另一种情况，当 A_3 不发生时，只有当 A_1

与 A_2 同时发生，事件 B 才能发生，所以

$$B=A_3+A_1A_2$$

习　题　7-1

1．设 A,B,C 表示随机事件，当它们是什么样的关系时，下列等式成立：

(1) $AB=A$;　　　　(2) $A+B=A$;

(3) $A-B=A$;　　　　(4) $A\overline{C}+B=A$;

(5) $A\overline{B}+\overline{A}C=A$;　　　(6) $BC+A\overline{C}=ABC$.

2．一个口袋中有 100 个红球，4 个黑球，每次随机地摸一个球，并不放回，直至取到红球为止，设 A_i 表示第 i 次摸到黑球(即 $\overline{A}_i$ 表示第 i 次摸到红球)，$i=1,2,\cdots$，试用A_i来表示这个随机试验的各种情况．

3．一个口袋中有 20 个红球，30 个黑球，随机地摸三次，每次摸一个球，摸到后记下球的颜色，又放回口袋中去(即有放回地摸)，记 $A_i=\{$第 i 次摸到红球$\}$，$i=1,2,3$，试考虑下列问题：

(1) $\overline{A}_i$ 表示什么?

(2) 用 A_1,A_2,A_3 表示第一次取到红球，后二次取到黑球．

(3) 用 A_1,A_2,A_3 表示在三次摸球中，只有一次是摸到红球，其余二次摸到黑球．

(4) $\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$ 与 $\overline{A}_1A_2\overline{A}_3$ 是互不相容的吗?

4．一个口袋中有 40 个黑球，60 个红球，有放回地摸球，每一次摸一个，记 $A_i=\{$第 i 次摸到红球$\}$，试用 A_i 表示第五次摸球时，才第二次摸到红球的这一事件．

5．设事件 A 是由 20 个基本事件构成，事件 B 由 10 个基本事件构成，事件 C 是用事件 A 和 B 来表示，问在下列情况下，事件 C 是由多少个基本事件构成：

(1) 事件 $A\supset B$ 且 $C=A+B$;

(2) 事件 A 与 B 互不相容，$C=A+B$;

(3) 事件 AB 是由 5 个基本事件构成，$C=A\overline{B}$;

(4) 事件 AB 是由 5 个基本事件构成，$C=A+B$.

6．若 A,B,C,D 是四个事件，试用这四个事件表示下列各事件：(1) 这四个事件至少发生一个；(2) 这四个事件恰好发生两个；(3) A,B 都发生而 C,D 都不发生；(4) 这四个事件都不发生；(5) 这四个事件中至多发生一个．

第二节　概率的概念与计算

一、概率的概念

为了确切地反映随机事件发生的可能性大小，需要有一个数量指标，并且这个数量指标至少应满足以下两个要求：

(1) 它应是事件本身所固有，不随人们主观意志而改变的一种客观量度，可以在相同条件下通过大量的重复试验作出估计和检验。

(2) 它必须符合一般常情，例如事件发生可能性大的，它的值就大；事件发生可能性小的，它的值就小；必然事件的值必定最大；不可能事件的值最小(宜等于零)。

我们把事件发生的可能性大小的数量指标称为事件 A 的**概率**(probability)记为 $P(A)$。

1. 概率的统计定义

频率的概念是大家熟悉的。在重复进行的 n 次试验中，事件 A 出现 m 次，则 $\frac{m}{n}$ 就是事件 A 的**频率**。

在概率论的发展史上，曾记载过几位数学家作过千万次掷硬币的试验，他们的试验记录如表 7-1 所示。

表 7-1

试验者	投掷次数 n	出现正面的次数 m	频率 $=\frac{m}{n}$
De Morgan	2048	1061	0.5181
Buffon	4040	2048	0.5069
Pearson	12000	6019	0.5016
Pearson	24000	12012	0.5005

记 $A=\{$硬币出现正面$\}$，$f(A)$表示事件 A 出现的频率，则 Buffon 得到

$$f(A)=\frac{2048}{4040}=0.5069\approx\frac{1}{2}$$

Pearson 得到

$$f(A)=\frac{12012}{24000}=0.5005\approx\frac{1}{2}$$

由此可见，尽管频率 $f(A)$ 由于试验次数 n 的不同可以各不相同，但只要 n 相当大，频率将很接近于某个稳定值，这种频率的稳定性，正是随机事件发生可能性大小的客观反映，因此随机事件 A 的概率可以通过频率来度量。

定义 1 在一组条件 S 下，重复作 n 次试验，事件 A 发生 m 次，当试验次数 n 足够大时，如果频率 $\frac{m}{n}$ 稳定地在某一数值 p 的附近摆动，随着试验次数的增大，这种摆动的幅度趋于减小，则称数值 p 为随机事件 A 在条件组 S 下发生的**概率**，记作 $P(A)=p$。

上述定义称为**概率的统计定义**。

医学统计中所说的患病率、死亡率、治愈率等都是频率。当统计例数相当多时，可以把它们看成相应的概率。

2. 概率的古典定义

按统计定义去确定一个随机事件的概率，一般需做大量次数的试验，但在某些情况下，并不需要做多次试验，而可以根据问题本身所具有的某种“对称性”直接计算其概率。这类随机试验须具有下列特征：

(1) 随机试验的基本结果（即基本事件）只有有限个，不妨设为 n 个，记为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$。

(2) 每个基本事件发生的可能性是相等的，即有

$$P(A_1)=P(A_2)=\cdots=P(A_n)$$

具有上述特征的基本事件组称为**等概率基本事件组**.

定义 2 对于某一随机试验，如果全体基本事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是有限的，且 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 发生的可能性相等，则对任意一个随机事件 A（如果 A 是 m 个基本事件的和）的概率为：

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{A\text{ 中所含的基本事件数}}{\text{基本事件的总数}}$$

这就是**概率的古典定义**，又称**古典概型**，由于它简单且直观，同时又概括了许多实际问题，因此在概率论中有着重要地位。

例 1 袋中装有一个白球和一个黑球，从中任取一球，取出后记下是白球还是黑球，放回袋中，共取 3 次，求下列情况的概率：

(1) 3 次都是白球；

(2) 第一次是白球，后二次是黑球；

(3) 有一次是白球，其余二次是黑球。

解 从袋中任取一球，其结果不是白球就是黑球，如果放回袋中任意连取 3 次，基本事件总数为 $2^3=8$，根据古典概型计算概率。

(1) 设 $A=\{3\text{ 次都是白球}\}$，则

$$P(A)=\frac{1}{8}$$

(2) 设 $A=\{\text{第一次是白球，后二次是黑球}\}$，则

$$P(A)=\frac{1}{8}$$

(3) 设 $A=\{\text{有一次是白球，其余二次是黑球}\}$，则

$$P(A)=\frac{3}{8}$$

二、概率的性质与计算

不论是由概率的统计定义还是古典定义，均可推知，对于任一随机事件 A，其概率具有下述几个性质：

性质 1 对任意事件 A，$0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

性质 2 如果 U 是必然事件，则 $P(U)=1$，
如果 V 是不可能事件，则 $P(V)=0$；

性质 3 如果 A，B 互不相容，则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

一般地，若 A_1，A_2，…，A_n 两两互不相容，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

性质 3 称为**概率的可加性**，相应的公式称为**概率的加法公式**。

性质 4 对任一随机事件 A，有

$$P(\overline{A})=1-P(A)$$

证 因为 $A\cup\overline{A}=U$，$A\overline{A}=V$

所以 $1=P(U)=P(A\cup\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})$

即 $$P(\overline{A})=1-P(A)$$

性质 5 如果 $A\supset B$，则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$

证 因为当 $A\supset B$ 时，有

$$A=B\cup(A-B)$$

且 $$B\cap(A-B)=V$$

所以 $$P(A)=P(B)+P(A-B)$$

即 $$P(A-B)=P(A)-P(B)$$

性质 6 对任意的两个事件 A，B，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

证 因为 $A\cup B=A\cup(B-AB)$

且 $$A\cap(B-AB)=V$$

所以 $$P(A\cup B)=P(A)+P(B-AB)$$

又因为 $AB\subset B$，从而由性质 5 得

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

对于任意的三个事件 A，B，C，不难推广为

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)$$
$$-P(BC)-P(CA)+P(ABC)$$

性质 6 称为概率的**一般加法公式**。

例 2 现有 10 只同型号、同批生产的三极管，其中 8 只是正品，2 只是次品，现按下列两种方法抽取，求事件“从 10 只中任意抽取 3 只，取得 2 只是正品，1 只是次品”发生的概率：

(1) 每次抽取 1 只，测试后放回，然后再抽取下一只（即有放

回地抽样)；

(2) 每次抽取 1 只，测试后不放回，在剩下的三极管中再抽取下一只(即不放回抽样)。

解 (1) 设 $A_i=\{$第 i 次取到正品$\}$

那么 $\overline{A}_i=\{$第 i 次取到次品$\}$

$A=\{$取到 2 只正品，1 只次品$\}$

即 $A=A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3$

由于事件 $A_1A_2\overline{A}_3$，$A_1\overline{A}_2A_3$，$\overline{A}_1A_2A_3$两两互不相容，所以 $P(A)=P(A_1A_2\overline{A}_3)+P(A_1\overline{A}_2A_3)+P(\overline{A}_1A_2A_3)$.

由于是有放回地抽取，所以每次抽时，均有 10 种可能取法，因而任取 3 次的基本事件总数为 10^3，取到正品，每次均有 8 种取法，取到次品有 2 种取法，$A_1A_2\overline{A}_3$ 的基本事件数为 $8^2\times2$，因此

$$P(A_1A_2\overline{A}_3)=\frac{8^2\times2}{10^3}$$

同理 $$P(A_1\overline{A}_2A_3)=P(\overline{A}_1A_2A_3)=\frac{8^2\times2}{10^3}$$

故 $$P(A)=3P(A_1A_2\overline{A}_3)=\frac{3\times8^2\times2}{10^3}$$

(2) 由于是不放回抽样，第一次抽有 10 种取法，第二次抽有 9 种取法，第三次抽有 8 种取法，因而任取 3 次的基本事件总数为 $10\times9\times8$，$A_1A_2\overline{A}_3$ 的基本事件数为 $8\times7\times2$，因此

$$P(A_1A_2\overline{A}_3)=\frac{8\times7\times2}{10\times9\times8}$$

同理 $$P(A_1\overline{A}_2A_3)=P(\overline{A}_1A_2A_3)=\frac{8\times7\times2}{10\times9\times8}$$

故 $$P(A)=3P(A_1A_2\overline{A}_3)=\frac{3\times8\times7\times2}{10\times9\times8}$$

例 3 在 10 万张彩票中，有 1 千张是有奖彩票，某人买了 100 张彩票，问他获奖的概率是多少？

解 设 $A=\{$获奖$\}$，则 $\overline{A}=\{$不获奖$\}$

$$P(A)=1-P(\overline{A})$$

$$=1-\frac{C_{99000}^{100}}{C_{100000}^{100}}$$

$$=0.63415$$

习　题　7-2

1. 袋中有红、黄、白色球各 1 个，每次任取 1 个，有返回地抽3次，求下列事件的概率：

$A=${三个都是红的}；　　$B=${三个都是黄的}；

$C=${三个都是白的}；　　$D=${颜色相同}；

$E=${颜色全不同}；　　$F=${颜色不全同}；

$G=${没有红色}；　　$H=${没有黄色}；

$I=${没有白色}；　　$J=${没有红色，且没有黄色}；

$K=${没有红色或没有黄色}；

$L=${全是红色或全是黄色}．

2. 某产品 40 件，其中有次品 5 件，现从中任取 2 件，问其中至少有一件次品的概率是多少？

3. 从 6 双不同的手套中任取 4 只，问其中恰有一双配对的概率是多少？

4. 由盛有号码 $1,2,\cdots,N$ 的球的箱子中，有放回地摸了 n 个球，依次记下其号码，试求这些号码严格上升排列的概率．

5. 100片药片中有 5 片失效，现从中任取 0 片，求：

(1) 其中有一片失效的概率；

(2) 至多有一片失效的概率．

6. 5只细菌随机地出现在 3 个试管的溶液中，求第一个试管的溶液中

(1) 没有细菌的概率；

(2) 只有一只细菌的概率；

(3) 至少有 2 只细菌的概率．

第三节　条件概率与事件的独立性

一、条件概率

先研究一个简单的例子．

例　设某产品在盒中共有 10 只，已知其中有 3 只是次品，从

盒中取二次，每次任意取1只，作不放回抽样，设

$$A=\{第一次取到次品\},$$
$$B=\{第二次取到次品\}.$$

当第一次取到1只次品后，盒里还剩9只产品，其中还有2只是次品，这时B发生的概率为$\frac{2}{9}$，因为这时是在A已经发生的条件下求B发生的概率，故称它为在A发生的条件下B发生的条件概率，记为$P(B|A)$，即有

$$P(B|A)=\frac{2}{9}$$

定义1 如果A,B是条件组S下的两个随机事件，$P(A)\neq 0$，则称

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)} \tag{1}$$

为在事件A发生的前提下事件B发生的**条件概率**（conditional probability）。

二、概率乘法公式

由条件概率定义可知，对任意两个事件A，B，若$P(A)\neq 0$，则有

$$P(AB)=P(A)P(B|A) \tag{2}$$

若$P(B)\neq 0$，则有

$$P(AB)=P(B)P(A|B) \tag{3}$$

称上两式为**概率的乘法公式**.

例1 盒中装有16个球，其中6个是玻璃球，另外10个是金属球．而玻璃球中有2个是红色的，4个是蓝色的，金属球中有3个是红色的，7个是蓝色的，现从盒中任取一球，问取到蓝色玻璃球的概率是多少？

解 记 $A=\{取到蓝色球\}$，

$B=\{取到玻璃球\}$.

先将盒中球的分配情况列表如表7-1所示。

表 7-1

	玻璃	金属	
红	2	3	5
蓝	4	7	11
	6	10	16

由概率的古典定义得

$$P(A)=\frac{11}{16},\quad P(B|A)=\frac{4}{11}$$

然后，利用概率的乘法公式得

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B|A)$$

$$=\frac{11}{16}\times\frac{4}{11}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$$

三、事件的独立性

定义 2 设 A, B 是两个随机事件，如果

$$P(B|A)=P(B) \tag{4}$$

则称事件 A 与事件 B **相互独立**.

定理 1 设 A, B 是两个随机事件，且 $P(A)\neq 0$，则事件 A，B 相互独立的充分必要条件是

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

证 若 A, B 相互独立，故

$$P(B|A)=P(B)$$

由概率的乘法公式得

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(A)P(B)$$

反之，若 $P(AB)=P(B)P(A)$，由(1)式得

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)P(A)}{P(A)}=P(B)$$

故 事件 A, B 相互独立.

定理 2 设事件 A, B 相互独立，则下列各对事件也相互独

立：

$$(\overline{A}, B), (A, \overline{B}), (\overline{A}, \overline{B})$$

证明从略。

定义 3 对于三个事件 A, B, C，若下列四个等式同时成立，则称它们相互独立：

$$P(AB) = P(A)P(B),$$
$$P(AC) = P(A)P(C),$$
$$P(BC) = P(B)P(C),$$
$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C).$$

注意：由于前面三个等式不能推出第四个等式；反之，第四个等式也不能推出前面三个等式，所以，A, B, C 相互独立，一定要四个等式同时成立。

定义 4 设 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，若对于所有可能的组合($1 \leqslant i < j < k < \cdots \leqslant n$)，有

$$P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j),$$
$$P(A_iA_jA_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k),$$
$$\vdots$$
$$P(A_1, A_2, \cdots, A_n) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n),$$

则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立。

例 2 一个口袋中有 n 个红球，m 个黑球，现不放回地任摸一个，问第一个人和第二个人摸到红球的概率各是多少？

解 设 $A_i = \{$第 i 个人摸到红球$\}$，$i = 1, 2$

$$P(A_1) = \frac{n}{n+m}, \quad P(\overline{A}_1) = \frac{m}{n+m}$$

因为 $$A_2 = A_2(A_1 + \overline{A}_1) = A_1A_2 + \overline{A}_1A_2$$

所以
$$\begin{aligned} P(A_2) &= P(A_1A_2) + P(\overline{A}_1A_2) \\ &= P(A_2|A_1)P(A_1) + P(A_2|\overline{A}_1)P(\overline{A}_1) \\ &= \frac{n-1}{n+m-1}\cdot\frac{n}{n+m} + \frac{n}{n+m-1}\cdot\frac{m}{n+m} \\ &= \frac{n}{n+m}\left(\frac{n-1+m}{n+m-1}\right) = \frac{n}{n+m} \end{aligned}$$

说明第一个人与第二个人摸到红球的概率是相同的。正如在日常生活中，遇到的抽签问题，先抽签与后抽签抽到的概率相同。

例 3 在血吸虫病防治中，常通过粪检来确诊受检者是否患有血吸虫病，但这种诊断法常有假阴性(但没有假阳性)。假如对一个血吸虫病患者作粪检的阳性率为 0.6，问通过多少次重复检查，方可达到 99% 的阳性正确率?

解 设 n 为检查结果为阳性时的检查次数，

且 $A_i=\{$第 i 次检查结果为阴性$\}$，

$B=\{$第 n 次检查结果为阳性$\}$。

那么 $P(B)=1-P(\bar{B})=1-P(A_1A_2\cdots A_n)$

由于每次检查均是独立的，即 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立，故

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$$

由已知粪检的阳性率为 0.6，推知假阴性率为 $1-0.6=0.4$，因此

$$P(B)=1-(0.4)^n$$

由题意知，$1-(0.4)^n\geqslant 0.99$

即 $$(0.4)^n\leqslant 0.01$$

故 $$n\geqslant\frac{\ln 0.01}{\ln 0.4}=5.026$$

即 $$n\geqslant 6$$

四、全概率公式和逆概率公式

定理 3(全概率公式) 如果事件组 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 满足：

(1) $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 互不相容，且 $P(A_i)>0$ $(i=1, 2, \cdots, n)$；

(2) $A_1+A_2+\cdots+A_n=U$；

则对任一事件 B，有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$$

证 因为 $B=BU=BA_1+BA_2+\cdots+BA_n$，

且 $BA_1, BA_2, \cdots, BA_n$ 互不相容，所以

$$\begin{aligned}P(B) &= P(BA_1)+P(BA_2)+\cdots+P(BA_n)\\ &= P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)+\cdots\\ &\quad +P(B|A_n)P(A_n)\\ &= \sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)\end{aligned}$$

例 4 某医院采用Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ治疗方案医治某种癌症，在该癌症患者中采用这四种方案的百分比分别为 10%，20%，25%，45%，其有效率分别为 0.90，0.94，0.95，0.97，问到该医院接受治疗的任一癌症患者，治疗有效的概率为多少？

解 令

$A_i=\{$采用第 i 种治疗方案$\}$，$(i=1, 2, 3, 4)$

$B=\{$治疗有效$\}$。

由全概率公式可得

$$\begin{aligned}P(B) &= \sum_{i=1}^{4}P(A_i)P(B|A_i)\\ &= 0.90\times0.10+0.94\times0.20\\ &\quad +0.95\times0.25+0.97\times0.45\\ &= 0.952\end{aligned}$$

定理 4 设事件组 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，满足定理 3 中(1)，(2)两个要求，则对任一事件 B 有

$$P(A_j|B)=\frac{P(A_j)P(B|A_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)}\qquad (j=1, 2, \cdots, n)$$

这就是**逆概率公式**.

证 由全概率公式得

$$\begin{aligned}P(A_j|B) &= \frac{P(A_jB)}{P(B)}\\ &= \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(B|A_i)P(A_i)}\end{aligned}$$

逆概率公式也称**贝叶斯**(Bayes)**公式**.

例 5 从以往生产记录表明，当机器调试好时，产品的合格率为 90%，当机器发生某一故障时，其合格率为 30%。每天早上机

器开动时，机器处于良好状态的概率为 80%，试求某日早上第一件产品是合格品时，机器处于良好状态的概率为多少？

解 设 $A=\{$产品合格$\}$，

$B=\{$机器处于良好状态$\}$。

已知 $P(A|B)=0.9$，$P(A|\overline{B})=0.3$，$P(B)=0.8$，

根据逆概率公式

$$P(B|A)=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B)+P(A|\overline{B})P(\overline{B})}$$
$$=\frac{0.9\times0.80}{0.9\times0.80+0.3\times0.2}=0.923$$

即第一个产品是合格时，机器处于良好状态的概率为 0.923。

例 6 设患有某种癌症的病人，使用诊断此种癌症的某种试验，反应为阳性的概率为 0.95，而未患有癌症的人，使用此种试验反应为阴性的概率为 0.95，现对一人群进行癌症普查，若患有癌症的概率为 0.005，从人群中任抽 1 人，经做试验反应为阳性，而此人确患有癌症的概率是多少？

解 令 $A=\{$试验反应为阳性$\}$，

$C=\{$患有癌症$\}$。

由题意得 $P(A|C)=0.95$，

$P(\overline{A}|\overline{C})=0.95$，推得 $P(A|\overline{C})=0.05$

$P(C)=0.005$， 推得 $P(\overline{C})=0.995$

用逆概率公式得

$$P(C|A)=\frac{P(A|C)P(C)}{P(A|C)P(C)+P(A|\overline{C})P(\overline{C})}$$
$$=\frac{0.95\times0.005}{0.95\times0.005+0.05\times0.995}$$
$$=0.0876$$

五、贝努里概型

有这样一类试验，只有两个可能的结果。例如抛掷一枚硬币的试验，其结果不是正面向上就是反面向上两种；有的化验检查的

结果不是阴性就是阳性；药物毒性试验时，受试动物不是死亡就是存活等等。

如果将上述试验独立地重复进行 n 次，那么，我们关心的某个结果出现 k 次的概率怎么计算呢？

一般地，如果试验 E 只有两个可能的结果：A 和 $\overline{A}$，并且 $P(A)=p$，$P(\overline{A})=1-p=q$（其中，$0<p<1$），把 E 独立地重复 n 次，这样的试验称作 **n 重贝努里（Bernoulli）试验**，有时简称为**贝努里试验**或**贝努里概型**。

在 n 重贝努里试验中，事件 A 可能出现 0，1，2，…，n 次，现在要求事件 A 恰好出现 $k(0\leqslant k\leqslant n)$ 次的概率 $P_n(k)$。

设 $B_k=\{$在 n 重贝努里试验中，事件 A 正好出现 k 次$\}$，

$A_i=\{$在第 i 次试验中，出现事件 $A\}$，

$\overline{A}_i=\{$在第 i 次试验中，出现事件 $\overline{A}\}$，

$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$.

不妨先具体地设在第 1，2，…，k 次试验中出现 A，在第 $k+1$，…，n 次试验中出现 $\overline{A}$，那么由独立性有

$$\begin{aligned}&P(A_1A_2\cdots A_k\overline{A}_{k+1}\cdots\overline{A}_n)\\&=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_k)P(\overline{A}_{k+1})\cdots P(\overline{A}_n)\\&=p^kq^{n-k}\end{aligned}$$

类似地，只要某 k 次试验出现 A，而其余的 $n-k$ 次试验出现 $\overline{A}$ 的概率都是

$$p^kq^{n-k}$$

在 n 次试验中，有 k 次试验出现 A，而其余的 $n-k$ 次试验出现 $\overline{A}$，共有 C_n^k 种方式，且所对应的事件都是互不相容的，因此由概率的加法公式即得所求的概率为：

$$P(B_k)=C_n^kp^kq^{n-k}$$

即
$$P_n(k)=C_n^kp^kq^{n-k}\qquad(0\leqslant k\leqslant n)$$

例 7 假如血吸虫病患者粪便虫卵镜检的阳性率为 $p=0.75$，阴性率为 $q=0.25$，试问粪检三次，检得一次阳性，二次阳性，三次都是阳性及三次都是阴性的概率各是多少？

解 因为每次粪检结果不是阳性就是阴性，各次粪检是相互独立的，所以粪检三次是三重贝努里试验。

设 $A_i=\{$粪检 i 次阳性$\}$，

$\overline{A}_i=\{$粪检 i 次阴性$\}$，$(i=1, 2, 3)$。

则
$$P(A_1)=C_3^1pq^2=3(0.75)(0.25)^2=0.140625$$
$$P(A_2)=C_3^2p^2q=3(0.75)^2(0.25)=0.421875$$
$$P(A_3)=C_3^3p^3q^0=(0.75)^3=0.421875$$
$$P(\overline{A}_3)=C_3^0p^0q^3=(0.25)^3=0.015625$$

习 题 7-3

1．“对立”与“互不相容”有何异同，试举例说明．

2．一个工人看管 3 台机床，在 1 小时内，机床不需要工人照管的概率，第一台为 0.8，第二台为 0.9，第三台为 0.7，求在 1 小时内，3 台机床中最多有 1 台需要工人照管的概率．

3．某机械零件的加工由两道工序组成，第一道工序的废品率为 0.015，第二道工序的废品率为 0.02，假定两道工序出废品是彼此无关的，求产品的合格率．

4．加工某一零件共需经过四道工序，设第一、二、三、四道工序的次品率分别是 2%，3%，5%，3%，假定各道工序之间互不影响，求加工出来的零件的次品率．

5．某工厂中，机器 B_1，B_2，B_3 分别生产产品总数的 25%，35%，40%，它们生产的产品分别有 5%，4%，2% 的次品，将它们产品混在一起，今随机地取一只产品，发现是次品，问这一次品是由 B_1，B_2，B_3 生产的概率分别是多少？

6．甲乙两个篮球运动员，投篮命中率分别为 0.7 及 0.6，每人各投2次，求两人进球数相等的概率．

7．对飞机进行三次独立的射击，第一次射击的命中率为 0.4，第二次为 0.5，第三次为 0.7．对飞机击中一次而被击落的概率为 0.2，击中二次而被击落的概率为 0.6，若飞机被击中三次则必然被击落，求射击三次而击落飞机的概率．（假定三次射击是在未能判定飞机被击落之前完成的）．

8．设事件 A，B 相互独立，且 $P(A)>0$，$P(B)>0$，证明 A 与 B 不可能互不相容．

第四节　随机变量及其概率分布

一、随机变量的概念

许多随机试验的结果表现为数量，例如测量某一年龄人群的身高、体重、心率、脉搏等。但也有些随机试验的结果只表现为某种属性，例如，人的性别“男”或“女”，临床化验结果“阳性”或“阴性”，对于这些非数量的结果可将其数量化，比如，可用“0”表示“女”，用“1”表示“男”；用“0”表示“阴性”，用“1”表示“阳性”。这样，任何一个随机试验的结果都可用一个变量来刻划，称这种变量为**随机变量**. 由此可见，随机变量实际上是试验结果和实数之间的一个对应关系。

定义 1　若对于一个随机试验的每一个可能结果 ω，都有唯一的实数 $\xi(\omega)$ 与之对应，则称 $\xi(\omega)$ 为**随机变量** (random variable)，简记为 ξ。

例 1　假如对某一病患者进行三次粪便虫卵镜检，镜检结果可能检得一次阳性，或二次阳性，或三次都是阳性，或三次都是阴性。

令　“$\xi=0$”表示镜检结果三次都是阴性；

“$\xi=1$”表示镜检结果一次阳性；

“$\xi=2$”表示镜检结果二次阳性；

“$\xi=3$”表示镜检结果三次都是阳性。

则镜检结果就可用随机变量 ξ 来表示了。

许多随机变量是连续变化的，例如“测量某地某日的气温变化”，“某中学 15 岁男生的身高（或体重）”，“某年龄男子的血压”等等，它们的取值可以充满某个区间（不是有限个或可列个值）。

通常讨论两类随机变量，如果随机变量所有可能取的值是有限个或可列个，便称为**离散型随机变量**；否则便称为**非离散型随机变量**。

二、离散型随机变量及其分布

设离散型随机变量 ξ 可能取的值为 $x_k(k=1, 2, \cdots)$，而 ξ 取值 x_k 的概率为 p_k，即

$$P(\xi=x_k)=p_k \qquad (k=1, 2, \cdots)$$

或写成如表 7-2 所示。

表 7-2

ξ	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_k	$\cdots$
P	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_k	$\cdots$

表 7-2 称为离散型随机变量 ξ 的**概率分布表**（**或分布列**），简称 ξ **的概率分布**（**或分布**）。

根据概率分布的定义，任一离散型随机变量的分布列都具有下列两个性质：

性质 1 随机变量 ξ 取任何值时，其概率都为非负数，即

$$p_k \geqslant 0 \qquad (k=1, 2, \cdots)$$

性质 2 随机变量 ξ 取所有可能的值时，相应的概率之和等于1，即

$$\sum_k p_k=1$$

下面介绍几种常见的概率分布。

1. 二点分布

定义 3 如果随机变量 ξ 的分布如下：

$$P(\xi=1)=p \qquad (0<p<1)$$
$$P(\xi=0)=q=1-p$$

则称 ξ 服从以 p 为参数的**二点分布**(two—point distribution)(亦称**(0—1)分布**)。

在贝努里试验的情况下，随机变量 ξ 只能取 0 或 1 两个值，它的分布列如表 7-3 所示。

表 7-3

ξ	0	1
P	$1-p$	p

$(0<p<1)$

这时，ξ 是服从二点分布的随机变量。显然，二点分布具有概率分布的两个性质。

例 2 在 100 只大白鼠中，有 95 只是雄性的，5 只是雌性的，现从中随机抽取 1 只，则取得雄性大白鼠的概率为 95%，取得雌性大白鼠的概率为 5%，试写出其分布列。

解 现定义随机变量 ξ 如下：

$$\xi=\begin{cases}1, & \text{当取得雄性的大白鼠}\\ 0, & \text{当取得雌性的大白鼠}\end{cases}$$

于是随机变量 ξ 服从二点分布，其分布列如表 7-4 所示。

表 7-4

ξ	0	1
P	0.05	0.95

例 3 从一批产品中，随机抽取一个进行质量检查，若规定合格品为“1”，不合格品为“0”，现有 $(m+n)$ 个产品，其中 m 个是合格产品，n 个是不合格产品，求随机抽取一个产品其检查结果的分布列。

解 设 ξ 表示随机抽取一个产品其检查结果的随机变量，显然，ξ 服从二点分布，其分布列如表 7-5 所示。

表 7-5

ξ	0	1
P	$\frac{n}{m+n}$	$\frac{m}{m+n}$

或
$$P(\xi=0)=\frac{C_n^1}{C_{m+n}^1}=\frac{n}{m+n}$$
$$P(\xi=1)=\frac{C_m^1}{C_{m+n}^1}=\frac{m}{m+n}$$
显然，它满足分布列的两个性质。

2. 二项分布

定义 4 如果随机变量ξ的概率分布为：
$$P(\xi=k)=C_n^k p^k q^{n-k} \quad (k=0,1,\cdots,n) \tag{1}$$
其中$0<p<1$，$q=1-p$，则称ξ服从参数为n，p的**二项分布**(binomial distribation)，记作$\xi\sim B(n,p)$。

在$n=1$的情况下，(1)式变为：
$$P(\xi=k)=p^k q^{1-k} \quad (k=0,1)$$
这就是二点分布。

利用二项式定理，不难证明按(1)式给出的概率值满足：
$$\sum_{k=0}^{n} p_k=\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k}=(p+q)^n=1^n=1$$

例 4 设用手术根治某种癌症的有效率为0.8，现有10例癌症患者用手术治疗，求7例以上治疗有效的概率为多少？

解 设ξ为用手术治疗有效的随机变量，则ξ服从二项分布，故有
$$P(\xi=7)=C_{10}^7(0.8)^7(0.2)^3=0.201$$
$$\begin{aligned}P(\xi>7)&=\sum_{k=8}^{10}C_{10}^k(0.8)^k(0.2)^{10-k}\\&=C_{10}^8(0.8)^8(0.2)^2+C_{10}^9(0.8)^9(0.2)+C_{10}^{10}(0.8)^{10}\\&\approx0.6777\end{aligned}$$

3. 泊松分布

定义 5 如果随机变量ξ的概率分布为：
$$P(\xi=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \quad (k=0,1,2,\cdots) \tag{2}$$
其中$\lambda>0$，则称ξ服从参数为λ的**泊松分布**(Poisson distribution)。

例 5 放射性物质在某一段时间内放出的粒子数ξ是服从泊

松分布的，Rutherford 和 Geiger 观察了放射性物质放出的 α 粒子个数的情况，一共做了 2608 次观察，每次观察时间是 7.5s，结果见表 7-6。

表 7-6

放射粒子数 ξ	观察到的次数 m_k	频率 $p_k=\frac{m_k}{N}$	按泊松分布($\lambda=3.87$)计算之概率 p_k
0	57	0.022	0.021
1	203	0.078	0.081
2	383	0.147	0.156
3	525	0.201	0.201
4	532	0.204	0.195
5	408	0.156	0.151
6	273	0.105	0.097
7	139	0.053	0.054
8	45	0.017	0.026
9	27	0.010	0.011
≥10	16	0.006	0.007
总 计	2608	0.999	1.000

由表 7-6 可见，取 $\lambda=3.87$，按(2)式算出的概率 $P(\xi=k)$ 与相应的频率相当接近。

法国数学家泊松于 1837 年发现二项分布在一定条件下的极限分布为泊松分布，我们给出下述定理，但不加以证明。

泊松定理 设随机变量 $\xi_n(n=1, 2, \cdots)$ 服从二项分布，即

$$P(\xi_n=k)=C_n^k p_n^k(1-p_n)^{n-k} \quad (k=0, 1, \cdots, n)$$

其中 p_n 是与 n 有关的概率，且当 n 充分大时，有 $np_n=\lambda$（一个正的常数），则有

$$\lim_{n\to\infty}P(\xi_n=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

泊松定理表明，当 n 较大且 p 较小(实际应用中要求 $n\geq 10$，$p<0.10$)时，有如下近似公式：

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

其中 $\lambda = np$。

例 6 400ml 某微生物溶液中含微生物的浓度为 0.5 只/ml，现从中抽出 1ml 溶液来检验，问含 3 只及 3 只以上微生物的概率是多少？

解 400ml中共有微生物 $0.5 \times 400 = 200$只，如把这 400ml看成 400 个 1ml，则每一只微生物落入抽检的 1ml 溶液中的概率 $p = \frac{1}{400}$，不落入其中的概率$q = \frac{399}{400}$，200 只微生物相当于进行了 $n = 200$ 次试验。

如用二项分布来计算，则所求的概率为：

$$P(\xi \geqslant 3) = \sum_{k=3}^{200} C_{200}^k \left(\frac{1}{400}\right)^k \left(\frac{399}{400}\right)^{200-k}$$

显然，用上式计算是相当麻烦的，现利用泊松分布作近似计算，这里 $\lambda = np = 0.5$，则有

$$\begin{aligned} P(\xi \geqslant 3) &= 1 - P(\xi < 3) \\ &= 1 - P(\xi = 0) - P(\xi = 1) - P(\xi = 2) \\ &\approx 1 - e^{-0.5} - 0.5e^{-0.5} - \frac{1}{2}(0.5)^2 e^{-0.5} \\ &= 1 - 0.9856 = 0.0144 \end{aligned}$$

可见，在浓度为 0.5 只/ml 的条件下，抽检 1ml 溶液，多于 3 只微生物的可能性很小，倘若所抽检的 1ml 中确实多于 3 只微生物，我们就有根据认为微生物溶液的浓度可能大大超过 0.5 只/ml。

在生物学、医学、工业中的稀有事件以及社会生活对公用事业的各种要求等问题中，服从泊松分布的随机变量是常见的，例如，在显微镜下观察涂片每格内的某种细菌数，某段时间内某种稀有的非传染性疾病在规定人群数内的发病例数，工业铸件的疵点数，布匹上的疵点数，电话局交换台在单位时间内的电话呼唤次数等等，大多服从泊松分布的。

三、连续型随机变量及其分布

由于连续型随机变量的取值是不可列的，它可以取某个区间中的一切值，故不能用分布列加以描述。

对于连续型随机变量，考察随机变量取某个孤立的值"$\xi=a$"的概率是没有意义的，通常求的是"$a<\xi<b$"的概率，为此，引进如下定义：

定义 6 对于随机变量ξ，如果存在非负可积函数$p(x)$，$-\infty<x<+\infty$，使对任意实数a, $b(a<b)$，都有

$$P(a<\xi<b)=\int_a^b p(x)\,dx$$

则称$p(x)$为ξ的**概率密度函数**(probability density function)，简称**概率密度**或**密度**。

容易理解，作为概率密度$p(x)$，具有下列性质：

性质1 $p(x)\geqslant 0$

性质2 $\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)\,dx=P(-\infty<\xi<+\infty)=P(U)=1$

下面介绍几个常见的连续型分布。

1. 均匀分布

定义 7 如果随机变量ξ的概率密度为：

$$p(x)=\begin{cases}\lambda, & \text{当 } a\leqslant x\leqslant b\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

则称ξ在区间$[a, b]$上服从**均匀分布**(uniform distribution)。

由
$$\int_{-\infty}^{\infty}p(x)\,dx=1,$$

可知
$$\lambda=\frac{1}{b-a}$$

例 7 设随机变量ξ在区间$[a, b]$上服从均匀分布，试求ξ落在区间(c, d)内的概率，这里$a\leqslant c<d\leqslant b$。

解 按概率密度的定义，有

$$P(c<\xi<d)=\int_c^d p(x)\,dx=\lambda(d-c)$$

上式表明，ξ 取值于$[a, b]$中任一小区间的概率与该小区间的长度成正比，而与该小区间的具体位置无关，这就是均匀分布的概率意义。

2. 指数分布

定义 8 如果随机变量 ξ 的概率密度为：

$$p(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & 当\ x\geqslant 0\\ 0, & 当\ x<0\end{cases}$$

则称 ξ 服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的**指数分布** (exponential distribution)。

例 8 设随机变量 ξ 服从指数分布，对任何 $0<a<b$，试求 ξ 落在区间(a, b)内的概率。

解 按概率密度的定义，有

$$\begin{aligned}P(a<\xi<b)&=\int_a^b p(x)\,dx=\lambda\int_a^b e^{-\lambda x}dx\\&=\int_{\lambda a}^{\lambda b}e^{-t}dt\\&=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}\end{aligned}$$

由此可得 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)\,dx=\int_0^{+\infty}p(x)\,dx=1$

3. 正态分布

定义 9 如果随机变量 ξ 的概率密度为：

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}\quad(-\infty<x<+\infty)\tag{8}$$

则称 ξ 服从参数为 μ, $\sigma^2(\sigma>0)$ 的**正态分布** (normal distribution)，记作 $\xi\sim N(\mu, \sigma^2)$。

性质 概率密度 $p(x)$ 的图形呈钟形，在 $x=\mu$ 时，曲线处于最高点，以直线 $x=\mu$ 为对称轴，在 $x=\mu\pm\sigma$ 处有拐点，当 $x\to\pm\infty$ 时，曲线以 x 轴为其渐近线(图 7-8)，当 σ 大时，曲线平缓，当σ小时，曲线陡峭(图 7-9)。

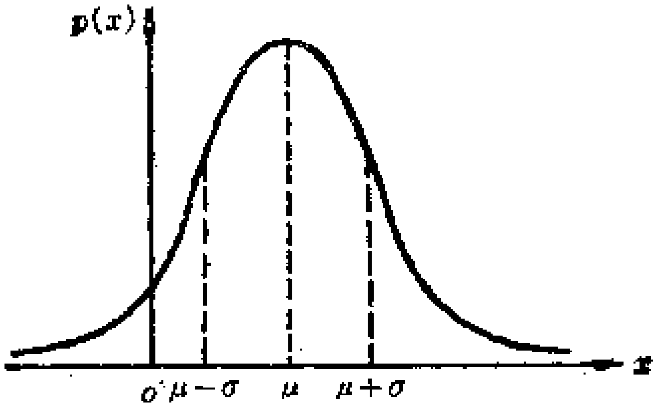


图 7-8

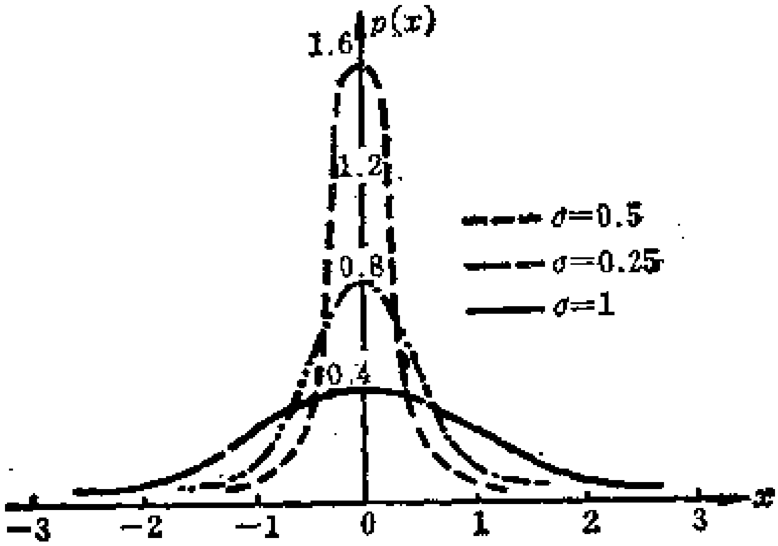


图 7-9

参数 $\mu=0$，而 $\sigma^2=1$ 的正态分布，即 $N(0,1)$，称为**标准正态分布**(standard normal distribution)，它的密度函数为：

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

正态曲线下的总面积等于1，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=1$$

从理论研究和包括医学在内的许多科学实践表明，不少随机

变量是服从或近似服从正态分布的，故正态分布在概率统计的理论与应用中占有特别重要的地位。

为了计算服从正态分布的随机变量的概率，需要引进分布函数的概念。

假设连续型随机变量 ξ 的密度函数为 $p(x)$，则定义其分布函数为：

$$F(x)=P(-\infty<\xi<x)$$
$$=\int_{-\infty}^{x} p(x)\,dx \qquad (4)$$

对于服从标准正态分布的随机变量 ξ，其分布函数特记为 $\Phi(x)$，根据分布函数概念，ξ 落在 $(-\infty, x)$ 中的概率为：

$$\Phi(x)=P(-\infty<\xi<x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$\Phi(x)$ 的数值在图象上就是从 $-\infty$ 到 x 为止标准正态分布曲线下的面积(图 7-10)。

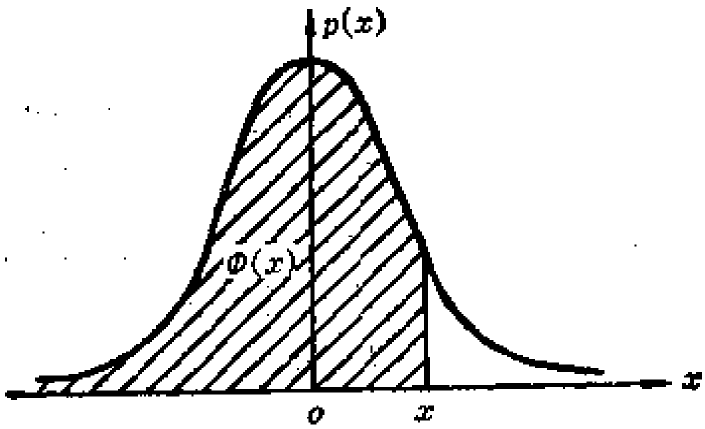


图 7-10

例 9 设 ξ 服从标准正态分布 $N(0,1)$，求 $P(0.5<\xi<1.5)$。

解 从图 7-11 可见，从 $-\infty$ 到 $x=1.5$ 的曲边梯形面积，减去从 $-\infty$ 到 $x=0.5$ 的曲边梯形面积，即 $x=0.5$ 和 $x=1.5$ 所夹的曲边梯形面积，所以

$$P(0.5<\xi<1.5)=P(-\infty<\xi<1.5)-P(-\infty<\xi<0.5)$$
$$=\Phi(1.5)-\Phi(0.5)$$

查正态分布表，有

$$\Phi(1.5)=0.93319$$
$$\Phi(0.5)=0.69146$$

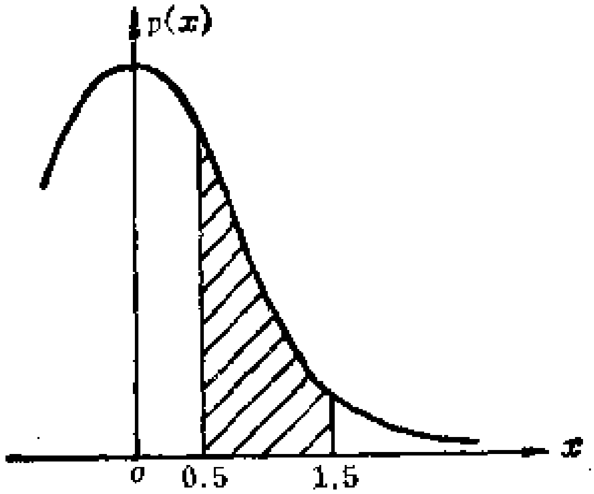


图 7-11

所以 $P(0.5<\xi<1.5)=0.93319-0.69146=0.24173$

由此例可知，如果 ξ 服从 $N(0, 1)$，则

$$P(x_1<\xi<x_2)=\Phi(x_2)-\Phi(x_1)$$

例 10 设 ξ 服从 $N(0, 1)$，求 $P(-2.0<\xi<1.0)$。

解 虽然正态分布表中没有列出 x 为负数时 $\Phi(x)$ 的值，但由于标准正态分布曲线的对称性(图 7-12)，可利用下列关系式：

$$\Phi(x)=1-\Phi(-x) \tag{5}$$

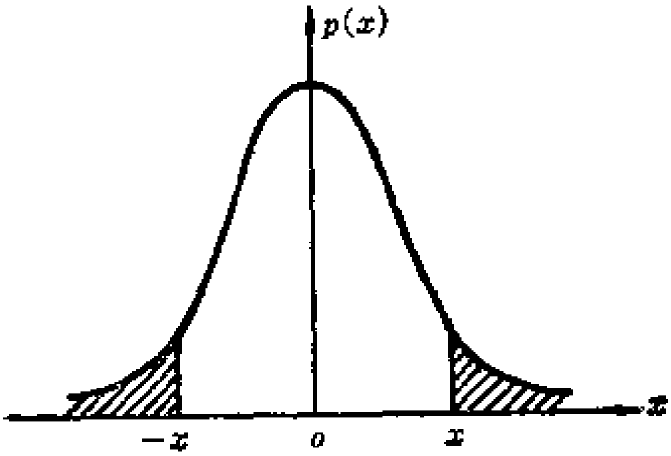


图 7-12

所以
$$
\begin{aligned}
&P(-2.0<\xi<1.0)\\
&=\Phi(1.0)-\Phi(-2.0)\\
&=\Phi(1.0)-[1-\Phi(2.0)]\\
&=0.84134-1+0.97725\\
&=0.81859
\end{aligned}
$$

例 11 设 $\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$，求 $P(\mu-\sigma<\xi<\mu+\sigma)$。

解 根据概率密度函数定义，有

$$P(\mu-\sigma<\xi<\mu+\sigma)=\int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx,$$

作变量代换，令 $t=\frac{x-\mu}{\sigma}$，有

$$
\begin{aligned}
P(\mu-\sigma<\xi<\mu+\sigma)&=\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\\
&=\Phi(1)-\Phi(-1)\\
&=\Phi(1)-[1-\Phi(1)]\\
&=2\Phi(1)-1\\
&=2\times0.8413-1=0.6826
\end{aligned}
$$

此例表明，当 $\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$ 时，有

$$P(|\xi-\mu|<\sigma)=0.6826$$

同理可得

$$P(|\xi-\mu|<2\sigma)=0.9546$$
$$P(|\xi-\mu|<3\sigma)=0.9974$$

由此可知，服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 的随机变量 ξ 之值，基本上落在 $(\mu-2\sigma,\mu+2\sigma)$ 之间，几乎不在 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ 之外取值。

例 12 设 $\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$，求 $P(a<\xi<b)$。

解 $P(a<\xi<b)=\int_a^b\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$

令 $\frac{x-\mu}{\sigma}=t$，则有

$$P(a<\xi<b)=\int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sigma}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

由此可见，利用标准正态分布函数值表，就能计算服从一般正态分布的随机变量在任何一个区间取值的概率。

习 题 7-4

1．一批产品共100件，其中2件是次品，从中抽取3件进行质量检查，求其中次品数的分布列（不返回的抽样）．

2．某类电灯泡使用时数在1000小时以上的概率为0.2，求3只灯泡在使用1000小时以后最多只有一只坏的概率．

*3．一批零件中有9个正品、3个废品，安装机器时，从这批零件中任取一个，如果每次取出的废品不再放回，而再重取一个零件，直到取得正品时为止，求在取得正品以前已取出的废品数的概率分布．

4．从一副扑克牌中发出5张，求其中黑桃张数的概率分布．

5．假定人在一年365日中的任一日出生的概率是一样的，试问：在一个730人的单位中，至少有两人生于元旦的概率为多少？

6．某地胃癌的发病率为0.01%，现普查5万人，其中没有胃癌患者的概率是多少？胃癌患者等于5人的概率是多少？

7．设随机变量ξ的概率密度为：

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{c}{\sqrt{1-x^2}}, & |x|\leqslant 1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

求：(1) 常数c；

(2) ξ落在区间$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$内的概率．

8．设随机变量ξ的概率密度为：

$$p(x)=\begin{cases}cx, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0 & 其它\end{cases}$$

求：(1) 常数c；

(2) ξ落在区间(0.3，0.7)内的概率．

*9．随机变量ξ的概率密度为：

$$p(x)=ce^{-|x|},\quad (-\infty<x<+\infty)$$

求：(1) 常数c；

(2) ξ 落在区间 $(0,1)$ 内的概率.

10. 设 $\xi \sim N(1, 0.6^2)$，求：$P(\xi>0)$ 和 $P(0.2<\xi<1.8)$。

11. 设 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$，对 $p(\mu-k\sigma<\xi<\mu+k\sigma)=0.95, 0.90, 0.99$ 时，试分别找出相应的 k 值（查表），又问，当 k 为何值时，有 $p(\xi>\mu-k\sigma)=0.95$？

第五节　随机变量的数字特征

概率分布或概率密度虽然能完整地描述随机变量的分布规律，但在实际问题中，它们不易确定，而有时只需求得关于随机变量分布状况（如集中程度和离散程度）的少数几个特征数值就够了。这些刻划随机变量分布状况的某种特征的数量指标，称为随机变量的**数字特征**。在各种数字特征中，数学期望与方差是最常用的。

一、数学期望及其性质

1. 离散型随机变量的数学期望

例 1　设射手甲与乙在同样条件下进行射击，其命中的环数是一随机变量，分别有如表 7-7 和表 7-8 所示的分布列。

表 7-7

$\xi_甲$	10	9	8	7	6	5	0
P	0.5	0.2	0.1	0.1	0.05	0.05	0

表 7-8

$\xi_乙$	10	9	8	7	6	5	0
P	0.1	0.1	0.1	0.1	0.2	0.2	0.2

其中 0 环表示脱靶，试问：应如何评定甲、乙射击技术的优劣？

解　从分布列看出，甲命中10环的概率是0.5，即甲发出100粒

子弹，约有50粒子弹命中10环，同理，约有20粒命中9环，约有10粒命中8环和7环，约有5粒命中6环和5环，没有脱靶的，用通常的平均数来说，甲命中的环数为：

$$\frac{1}{100}(10\times50+9\times20+8\times10+7\times10+6\times5+5\times5+0\times0)$$
$$=10\times0.5+9\times0.2+8\times0.1+7\times0.1+6\times0.05+5\times0.05$$
$$=8.85(\text{环})$$

乙命中的环数为：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{100}(10\times10+9\times10+8\times10+7\times10+6\times20\\&\qquad+5\times20+0\times20)\\&=10\times0.1+9\times0.1+8\times0.1+7\times0.1+6\times0.2\\&\qquad+5\times0.2+0\times0.2)\\&=5.6(\text{环})\end{aligned}$$

从平均命中环数看，甲射手的射击水平高于乙射手。

对一般离散型随机变量的数学期望给出如下定义。

定义1 设ξ为一离散型随机变量，它取值$x_1, x_2, \cdots$，对应的概率为$p_1, p_2, \cdots$，如果级数$\sum\limits_{i=1}^{\infty}x_ip_i$的和存在，则称这个和数为$\xi$的**数学期望**(mathematical expectation)或**均值**，记作$E(\xi)$。

(1) 二点分布的数学期望

设ξ服从如表7-9所示的二点分布。

表 7-9

ξ	1	0
P	p	q

按数学期望的定义，有

$$E(\xi)=1\times p+0\times q=p \tag{1}$$

(2) 二项分布的数学期望

设ξ服从二项分布$B(n, p)$，即

$$P(\xi=k)=C_n^k p^k q^{n-k} \quad (k=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$$

按数学期望的定义，有

$$E(\xi)=\sum_{k=0}^{n} kp(\xi=k)=\sum_{k=1}^{n} kC_n^k p^k q^{n-k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{kn!}{k!\,(n-k)!}p^k q^{n-k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{np\cdot(n-1)!}{(k-1)!\,[(n-1)-(k-1)]!}p^{k-1}q^{(n-1)-(k-1)}$$

$$\text{令}\ \underline{\underline{k'=k-1}}\ \ np\sum_{k'=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{k'!\,[(n-1)-k']!}p^{k'}q^{(n-1)-k'}$$

$$=np(p+q)^{n-1}=np \tag{2}$$

(3) 泊松分布的数学期望

设 ξ 服从泊松分布，即

$$P(\xi=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

可以证明

$$E(\xi)=\sum_{k=0}^{\infty} k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\lambda \tag{3}$$

2. 连续型随机变量的数学期望

定义 2 设 ξ 为一连续型随机变量，其概率密度为 $p(x)$，如果积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx$ 存在，则称这个积分值为 ξ 的**数学期望**或**均值**，仍记作 $E(\xi)$。

(1) 均匀分布的数学期望

设 ξ 有概率密度 $p(x)$，

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

按连续型随机变量数学期望的定义，有

$$E(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx=\int_a^b x\frac{1}{b-a}dx$$

$$=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_a^b=\frac{1}{2}\,\frac{b^2-a^2}{b-a}$$

$$=\frac{1}{2}(b+a) \tag{4}$$

它恰是区间$[a, b]$的中点，与$E(\xi)$的概率意义相符。

(2) 指数分布的数学期望

设ξ有概率密度$p(x)$,

$$p(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geqslant 0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

按连续型随机变量数学期望的定义，则有

$$E(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)dx=\lambda\int_0^{+\infty}xe^{-\lambda x}dx$$

$$=\frac{1}{\lambda}\left[(-te^{-t})\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-t}dt\right]$$

$$=\frac{1}{\lambda} \tag{5}$$

(3) 正态分布的数学期望

设$\xi\sim N(\mu, \sigma^2)$，可以证明：

$$E(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}\ dx=\mu \tag{6}$$

表明正态分布的参数μ恰是该分布的数学期望(或均值)。

3. 数学期望的性质

性质1 $E(c)=c$ (c为常数)

证 因为把常量c看作只可能取一个值的随机变量，是个离散型随机变量，则有

$$P(\xi=c)=1$$

按数学期望定义

$$E(c)=c\cdot P(\xi=c)=c$$

性质2 $E(k\xi)=kE(\xi)$

证 当$k=0$时，显然成立，当$k\neq 0$时，这里只给出ξ是离散型的证明(ξ是连续型的随机变量，留给读者证明)。

设ξ的概率分布如表7-10所示。

则随机变量$k\xi$的概率分布如表7-11所示。

表 7-10

ξ	x_1	x_2	$\cdots$	x_m	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_m	$\cdots$

表 7-11

$k\xi$	kx_1	kx_2	$\cdots$	kx_m	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_m	$\cdots$

于是
$$\begin{aligned}E(k\xi) &= kx_1p_1 + kx_2p_2 + \cdots + kx_mp_m + \cdots \\ &= k(x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_mp_m + \cdots) \\ &= kE(X)\end{aligned}$$

性质 3 $E(\xi+b) = E(\xi)+b$ （b 为常数）

证明留给读者完成。

性质 4 $E(k\xi+b) = kE(\xi)+b$ （k, b 为常数）

上述性质可由性质 2 和 3 直接推出。

性质 5 对任意 k 个随机变量 ξ_1, ξ_2, $\cdots$, ξ_k, 如果它们的数学期望都存在，分别为 $E(\xi_1)$, $E(\xi_2)$, $\cdots$, $E(\xi_k)$, 则有

$$E(\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_k) = E(\xi_1)+E(\xi_2)+\cdots+E(\xi_k)$$

性质 6 设 ξ_1, ξ_2 是两个相互独立的随机变量，它们的数学期望分别为 $E(\xi_1)$和 $E(\xi_2)$, 则有

$$E(\xi_1\cdot\xi_2) = E(\xi_1)\cdot E(\xi_2)$$

性质 7 设 ξ 的密度是 $p(x)$, η 是 ξ 的函数，即 $\eta = f(\xi)$, 如果 $E(\eta) = E[f(\xi)]$存在，则有

$$E(\eta) = E[f(\xi)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)p(x)dx$$

当 ξ 是离散型随机变量时，也有类似的公式，设 ξ 的概率分布是

$$P(\xi = x_i) = p_i \qquad (i=1, 2, \cdots)$$

则有 $$E(\eta)=E[f(\xi)]=\sum_i f(x_i)p_i$$

二、方差及其性质

随机变量的数学期望刻划了随机变量平均取值的大小，即中心位置之所在，是随机变量的重要数字特征；另一个重要数字特征是刻划随机变量的离散程度；即与平均值的偏离程度，这就是随机变量的**方差**(Variance)。

1. 离散型随机变量的方差

例 2 设有甲、乙两个女声小合唱队，都由五名队员组成，她们的身高(单位：m)如表 7-12 所示。

表 7-12

甲　队	1.63	1.62	1.59	1.60	1.59
乙　队	1.80	1.60	1.50	1.50	1.60

不难算出甲、乙两队的平均身高都是 1.60m，但乙队身高波动大于甲队，从身高来看，甲队比乙队整齐。

定义 3 设 ξ 为一离散型随机变量，其概率分布为：

$$P(\xi=x_k)=p_k \quad (k=1,\ 2,\ \cdots)$$

如果级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}[x_k-E(\xi)]^2p_k$ 的和存在，则称这个和数为 ξ 的**方差**，记作 $D(\xi)$，而称 $\sqrt{D(\xi)}$ 为 ξ 的**标准差**(standard deviation)。

2. 连续型随机变量的方差

定义 4 设 ξ 为一连续型随机变量，其概率密度是 $p(x)$，如果积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(\xi)]^2p(x)dx$ 存在，则称这个积分值为 ξ 的**方差**，记作 $D(\xi)$，而称 $\sqrt{D(\xi)}$ 为 ξ 的**标准差**。

由方差的定义及随机变量函数的数学期望公式可知，ξ 的方差就是 $\eta=[\xi-E(\xi)]^2$ 的数学期望，即

$$D(\xi)=E[\xi-E(\xi)]^2$$

例 3 设 ξ 为随机变量，试证

$$D(\xi)=E(\xi^2)-[E(\xi)]^2$$

证 根据方差定义及数学期望的性质，有

$$\begin{aligned}D(\xi)&=E[\xi-E(\xi)]^2\\&=E[\xi^2-2\xi E(\xi)+(E(\xi))^2]\\&=E(\xi)^2-[2E(\xi)]E(\xi)+[E(\xi)]^2\\&=E(\xi^2)-[E(\xi)]^2\end{aligned}$$

上式常被用来计算随机变量的方差。

3. 几个常用分布的方差

(1) 二点分布的方差

设 ξ 服从(0—1)分布，其分布列如表 7-13 所示。

表 7-13

ξ	0	1
P	q	p

$(0<p<1, q=1-p)$

则 ξ^2 也服从(0—1)分布，它的分布列如表 7-14 所示。

表 7-14

ξ^2	0	1
P	q	p

于是 $$E(\xi^2)=1\times p+0\times q=p$$

而 $$E(\xi)=p$$

所以 $$\begin{aligned}D(\xi)&=E(\xi^2)-[E(\xi)]^2=p-p^2\\&=p(1-p)=pq\end{aligned}$$

(2) 二项分布的方差

设 ξ 服从二项分布 $B(n, p)$，则

$$\begin{aligned}E(\xi^2)&=\sum_{k=0}^{n}k^2C_n^k p^k q^{n-k}\\&=\sum_{k=1}^{n}k^2\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k}\end{aligned}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}[(k-1)+1]\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}p^k q^{n-k}$$

$$=\sum_{k=2}^{n}(k-1)\frac{n(n-1)(n-2)!}{(k-1)!(n-k)!}p^2\cdot p^{k-2}\cdot q^{(n-2)-(k-2)}$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}p^k q^{n-k}$$

$$\underline{\underline{\text{令 } k'=k-2}}\ n(n-1)p^2\sum_{k'=0}^{n-2}\frac{(n-2)!}{k'!(n-2-k')!}p^{k'}\cdot q^{(n-2)-k'}+E(\xi)$$

$$=n(n-1)p^2+np$$

于是

$$D(\xi)=E(\xi^2)-[E(\xi)]^2$$

$$=n(n-1)p^2+np-n^2p^2$$

$$=npq$$

(3) 泊松分布的方差

设 ξ 服从泊松分布，则

$$D(\xi)=E(\xi^2)-[E(\xi)]^2$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}k^2\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}-\lambda^2$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{\lambda^k}{(k-1)!}e^{-\lambda}-\lambda^2$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}[(k-1)+1]\frac{\lambda^k}{(k-1)!}e^{-\lambda}-\lambda^2$$

$$=\lambda\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda}$$

$$+\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda}-\lambda^2$$

$$=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda$$

可见泊松分布的方差与数学期望相等，均为泊松分布中的参数 λ，这是泊松分布的一个重要特点。

(4) 均匀分布的方差

设 ξ 服从均匀分布，则

$$E(\xi^2)=\frac{1}{b-a}\int_a^b x^2dx=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}=\frac{1}{3}(b^2+ab+a^2)$$

于是

$$D(\xi)=\frac{1}{3}(b^2+ab+a^2)-\frac{1}{4}(b+a)^2$$

$$=\frac{1}{12}(b-a)^2$$

(5) 指数分布的方差

设ξ服从指数分布，则

$$E(\xi^2)=\lambda\int_0^{\infty}x^2e^{-\lambda x}dx$$

$$=\frac{1}{\lambda^2}\int_0^{\infty}t^2e^{-t}dt=\frac{2}{\lambda^2}$$

于是
$$D(\xi)=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}$$

$$=\frac{1}{\lambda^2}$$

(6) 正态分布的方差

设ξ服从正态分布$\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$，则

$$D(\xi)=E[\xi-E(\xi)]^2$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

令 $\frac{x-\mu}{\sigma}=t$，得

$$D(\xi)=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t^2\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left[-te^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}\right.$$

$$\left.+\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right]$$

$$=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{2\pi}=\sigma^2$$

4. 方差的性质

由数学期望的性质，当k，b，c为常数时不难证明，方差具有如下几个重要性质：

性质 1 $D(c)=0$；

性质 2 $D(k\xi)=k^2D(\xi)$；

证 由于$D(\xi)=E[\xi-E(\xi)]^2$且$E(k\xi)=kE(\xi)$，故有

$$D(k\xi)=E[k\xi-E(k\xi)]^2$$

$$=E[k\xi-kE(\xi)]^2$$
$$=k^2E[\xi-E(\xi)]^2$$
$$=k^2D(\xi)$$

性质 3 $D(\xi+b)=D(\xi)$;

性质 4 $D(k\xi+b)=k^2D(\xi)$;

性质 5 设 ξ_1 与 ξ_2 是两个相互独立的随机变量，则

$$D(\xi_1\pm\xi_2)=D(\xi_1)+D(\xi_2)$$

证 因 ξ_1 与 ξ_2 相互独立，故有

$$E(\xi_1\cdot\xi_2)=E(\xi_1)\cdot E(\xi_2),$$

而
$$\begin{aligned}D(\xi_1\pm\xi_2)&=E(\xi_1\pm\xi_2)^2-E^2(\xi_1\pm\xi_2)\\&=E(\xi_1^2)\pm2E(\xi_1)E(\xi_2)+E(\xi_2^2)\\&\quad-E^2(\xi_1)\mp2E(\xi_1)E(\xi_2)-E^2(\xi_2)\\&=E(\xi_1^2)-E^2(\xi_1)+E(\xi_2^2)-E^2(\xi_2)\\&=D(\xi_1)+D(\xi_2)\end{aligned}$$

习　　题 7-5

*1. 对习题 7-4 第 3 题中的随机变量，求其数学期望和方差.

2. 对习题 7-4 第 7 题中的随机变量，求其数学期望和方差.

3. 对习题 7-4 第 8 题中的随机变量，求其数学期望和方差.

*4. 对习题 7-4 第 9 题中的随机变量，求其数学期望和方差.

5. 甲、乙两工人每天生产出现的次品数分别为 X、Y，已知 X、Y 的概率分布如表 7-15 所示.

表　7-15

X	0	1	2	3
p	0.7	0.1	0.1	0.1
Y	0	1	2	3
p	0.5	0.2	0.2	0.1

试问谁的技术水平较高？为什么？

第八章　行列式与矩阵

行列式与矩阵是线性代数的重要组成部分，也是线性代数在各个领域中应用的必要工具。本章仅介绍行列式和矩阵的基本概念和基本运算。

第一节　行　列　式

一、行列式的概念

1．二阶行列式

设有两个未知量 x,y 的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y=b_2 \end{cases} \tag{1}$$

利用消去法，消去 y 得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x=b_1a_{22}-a_{12}b_2$$

同样，消去 x 得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})y=a_{11}b_2-b_1a_{21}$$

当 $D=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq0$ 时，有唯一解：

$$x=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad y=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \tag{2}$$

为了便于记忆，引入下面的记号：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

称为**二阶行列式**，它含有两行、两列。行列式中的数称为**行列式的元素**，等号右边称为**行列式的展开式**。

如果将上述二阶行列式中的 a_{11}、a_{21} 依次换成 b_1、b_2，则得

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-a_{12}b_2$$

同样，将 a_{12}，a_{22} 依次换成 b_1、b_2，则得

$$D_2=\begin{vmatrix}a_{11} & b_1\\ a_{21} & b_2\end{vmatrix}=a_{11}b_2-b_1a_{21}$$

那么，

$$x=\frac{\begin{vmatrix}b_1 & a_{12}\\ b_2 & a_{22}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}}=\frac{D_1}{D},\quad y=\frac{\begin{vmatrix}a_{11} & b_1\\ a_{21} & b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}}=\frac{D_2}{D}$$

上述即为应用二阶行列式解二元线性方程组。

2. 三阶行列式

对于给定三个未知量 x_1，x_2，x_3 的线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases}\tag{3}$$

也可应用三阶行列式，把(3)式的解表示为：

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D},\ (\text{当 } D\neq 0).$$

其中D是线性方程组中未知量 x_1，x_2，x_3 前的系数排列成的三阶行列式：

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

如果把行列式 D 中第 1，2，3 列分别换成常数 b_1，b_2，b_3，便得到行列式 D_1，D_2，D_3，即

$$D_1=\begin{vmatrix}b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},\ D_2=\begin{vmatrix}a_{11} & b_1 & a_{13}\\ a_{21} & b_2 & a_{23}\\ a_{31} & b_3 & a_{33}\end{vmatrix},$$

$$D_3=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & b_3\end{vmatrix}$$

一般地，由 n 行和 n 列元素所组成的行列式，称为 **n阶行列**

式，记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

它表示所有可能取自不同的行和不同的列的 n 个元素乘积的代数和。

类似于二元、三元线性方程组，应用克莱姆法则可以解 n 元线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{4}$$

方程组(4)的系数 $a_{ij}(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$构成的行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \multicolumn{2}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为**方程组的系数行列式**。

定理（克莱姆法则） n 元线性方程组(4)当其系数行列式$D\neq 0$时，有且仅有唯一解：

$$x_j=\frac{D_j}{D}\ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{5}$$

其中 $D_j(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$是将系数行列式 D 中第 j 列元素 $a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{nj}$ 对应地换为方程组的常数项 $b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n$ 后得到的行列式。

证略。

二、行列式的性质

将行列式 D 的行与列互换后得到的行列式，称为 D 的**转置行列式**，记为 D'. 即如果

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

则

$$D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21}\cdots a_{n1} \\ a_{12} & a_{22}\cdots a_{n2} \\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots \\ a_{1n} & a_{2n}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 1 行列式与其转置行列式相等。即 $D=D'$。

读者可以验证，$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

性质 2 交换行列式的两行(列)，行列式变号。

例如：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$$

性质 3 若行列式有两行(列)的对应元素相同，则此行列式为零。

证 将行列式相同的两行(列)对换，行列式本身并没有改变，但其值由性质 2 有

$$D=-D$$

所以

$$D=0$$

性质 4 把行列式中某一行(列)的所有元素乘上某数 k，等于以 k 乘此行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots\ \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots\ \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots \\ a_{i1} & a_{i2}\cdots a_{in} \\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论　若行列式中有一行（列）元素全是零，则行列式等于零。

性质5　若行列式有两行(列）的对应元素成比例，则行列式等于零。

证　因为由性质4可将行列式中成比例的两行(列)的比例系数提到行列式外面，则余下的行列式有两行(列)对应元素相同，再由性质3可知，此行列式等于零，所以原行列式等于零。

性质6　若行列式中的某一行(列）的每一个元素都写成两个数的和，则这个行列式可以拆成两个行列式的和，即

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\
\vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots \\
b_{i1} & b_{i2} \cdots b_{in} \\
\vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn}
\end{vmatrix}
+
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\
\vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots \\
c_{i1} & c_{i2} \cdots c_{in} \\
\vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

性质7　将行列式某一行(列）的所有元素同乘以数 k 后加到另一行(列)的对应位置的元素上，行列式的值不变。

证　假设把行列式第 j 行的 k 倍加到第 i 行上去，由性质5和性质6有

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots \\ a_{i1} & a_{i2}\cdots a_{in} \\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots \\ a_{j1} & a_{j2}\cdots a_{jn} \\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots \\ a_{j1} & a_{j2}\cdots a_{jn} \\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots \\ a_{j1} & a_{j2}\cdots a_{jn} \\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots \\ a_{i1} & a_{i2}\cdots a_{in} \\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots \\ a_{j1} & a_{j2}\cdots a_{jn} \\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}
$$

例 1 计算行列式

$$
D=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & -6 & 3 \\ -5 & 10 & 4 \end{vmatrix}
$$

解 这个行列式的第一列与第二列对应元素成比例，由性质 5，得 $D=0$。

三、行列式的计算

若能将三阶以上的行列式，降阶为三阶或二阶行列式，就能计算任意阶的行列式，这必须介绍代数余子式概念。

设 D 是一个 n 阶行列式，

$$
D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}
$$

在 D 中划掉元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列后，得到的 $n-1$ 阶行列式，称为元素 a_{ij} 的**余子式**，记为 M_{ij}。将 M_{ij} 乘上 $(-1)^{i+j}$，则称 $(-1)^{i+j}M$ 为 a_{ij} 的**代数余子式**. 记为 A_{ij}，即 $A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$. 例如，下面的四阶行列式：

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 0 & 1 & 2\\ 3 & -1 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 0 & -5\end{vmatrix}$$

元素 a_{23} 的余子式为：

$$M_{23}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 3 & -1 & 0\\ 1 & 2 & -5\end{vmatrix}$$

代数余子式为：

$$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 3 & -1 & 0\\ 1 & 2 & -5\end{vmatrix}$$

定理 1 一个 n 阶行列式 D，如果其中第 i 行(列)所有元素除 a_{ij} 外都是零，则这个行列式的值等于 a_{ij} 与它的代数余子式的乘积. 即

$$D=a_{ij}\cdot A_{ij}$$

证明略。

为了说明行列式的计算过程，我们用记号 r_i 与 c_i 分别表示行列式中的第 i 行与第 i 列。

例如

$$\begin{array}{r}\\ r_2\rightarrow\\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\ 3 & 0 & 4\\ -4 & 1 & 5\end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} & & \uparrow\\ & & c_3\end{array}$$

r_2 表示行列式中的第 2 行，c_3 表示第 3 列。

例 2 计算

$$D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$$

解

$$D \overset{\substack{r_4-r_3 \\ r_3-r_2}}{\underset{r_2-r_1}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b & 3a+2b+c \\ 0 & a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix}$$

$$=a\begin{vmatrix} a & a+b & a+b+c \\ a & 2a+b & 3a+2b+c \\ a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_3-r_2}{\underset{}{\overline{\overline{r_2-r_1}}}}\ a\begin{vmatrix} a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b \\ 0 & a & 3a+b \end{vmatrix}$$

$$=a^2\begin{vmatrix} a & 2a+b \\ a & 3a+b \end{vmatrix}=a^4$$

定理 2 n 阶行列式 D 等于它的任意一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积的和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \tag{6}$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj} \tag{7}$$

$$(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

证 利用性质 6, 有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+\cdots+0 & \cdots & 0+0+\cdots+a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$
=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots \\ a_{i1} & 0\ \cdots\ 0 \\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots \\ 0 & a_{i2}\cdots\ 0 \\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}
$$

$$
+\cdots+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots \\ 0 & 0\ \cdots a_{in} \\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}
$$

$$
=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}
$$

类似地，可证明(7)式。

例3 计算

$$
D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}
$$

解 为了方便起见，按第二行展开行列式 D，这里 $a_{21}=1$，$a_{22}=0$，$a_{23}=1$，$a_{24}=2$，且

$$
A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}=-3
$$

$$
A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix}=-63
$$

$$
A_{24}=(-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=21
$$

所以 $D=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}+a_{24}A_{24}$

$$
=1\times(-3)+0+1\times(-63)+2\times 21
$$

$= -24$

例 4 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3 \\ x_1 \qquad + x_3 + 2x_4 = -1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 \qquad = 1 \\ x_1 + 2x_2 \qquad - 5x_4 = 1 \end{cases}$$

解 由上例的方程组的行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -24 \neq 0$$

所以可以应用克莱姆法则，由于

$$D_1 = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -2,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 4,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 14,$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

方程组的唯一解为：

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{1}{12},\qquad x_2=\frac{D_2}{D}=-\frac{1}{6},$$
$$x_3=\frac{D_3}{D}=-\frac{7}{12},\qquad x_4=\frac{D_4}{D}=-\frac{1}{4}.$$

例 5 如图 8-1 所示，设血液经血管分支点流动的流率为 z，经两条血管离开分支点的流率分别为 x 和 y，则有 $z=x+y$。

假定各条血管距分支点一定距离的压强分别为 p_z，p_x 及 p_y。在分支点的压强为 p，并且降压（对分支点的压强差）与流率成正比，则得

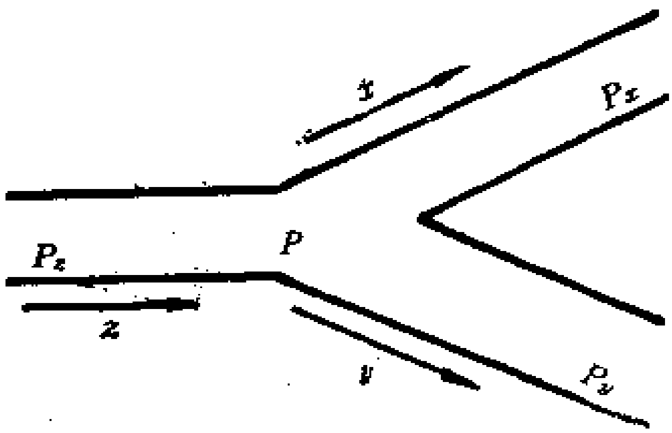


图 8-1

$$\begin{cases} x+y=z \\ zR_z=p_z-p \\ xR_x=p-p_x \\ yR_y=p-p_y \end{cases}$$

其中 R_z，R_x，R_y 分别为三条血管相应的比例系数。

如果血管端点的压强 p_x，p_1，p_z 可以测得，那么我们通过解下列线性方程组，便可求出 x，y，z 及 p：

$$\begin{cases} x+y-z \qquad\qquad\quad =0 \\ \qquad\qquad\quad R_z z+p=p_z \\ -R_x x \qquad\qquad\quad +p=p_x \\ \qquad -R_y y \qquad\quad +p=p_y \end{cases}$$

为此，先求系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & R_z & 1\\ -R_x & 0 & 0 & 1\\ 0 & -R_y & 0 & 1\end{vmatrix}$$

$$=-(R_xR_y+R_yR_z+R_zR_x)$$

类似地可求出 D_1, D_2, D_3, D_4, 最后可得

$$x=\frac{D_1}{D}=\frac{R_y(p_z-p_x)-R_z(p_x-p_y)}{R_xR_y+R_yR_z+R_zR_x}$$

$$y=\frac{D_2}{D}=\frac{R_z(p_x-p_y)-R_x(p_y-p_z)}{R_xR_y+R_yR_z+R_zR_x}$$

$$z=x+y=\frac{R_y(p_z-p_x)-R_x(p_y-p_z)}{R_xR_y+R_yR_z+R_zR_x}$$

$$P=\frac{R_xR_yp_z+R_yR_zp_x+R_zR_xp_y}{R_xR_y+R_yR_z+R_zR_x}$$

定义 在 n 阶行列式中，对角线以下(上)的元素都为0的行列式叫做**上(下)三角行列式**，如果对角线上的元素不全为零，而其余元素全为零的行列式叫做**对角行列式**.

对于一个三角形行列式(即对角线某一侧的元素全为零)，我们连续利用定理2，不难得到其值等于对角线上 n 个元素的乘积。即

$$\begin{vmatrix}a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn} \tag{8}$$

或

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn} \tag{9}$$

例6 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a & a \\ 1 & x & a & \cdots & a & a \\ 1 & a & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a & a & \cdots & x & a \\ 1 & a & a & \cdots & a & x \end{vmatrix}$$

解 将第一行乘以(-1)加到其它各行，得

$$D=\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x-a \end{vmatrix}$$

$$=(x-a)^{n-1}$$

习 题 8-1

1．计算下列行列式的值：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 1 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 1 & x & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ 1 & x & x & 1 & \cdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x & x & x & \cdots & 2 \\ 1 & x & x & x & \cdots & 1 \end{vmatrix}$

2．用行列式性质证明：

(1) $\begin{vmatrix} ab & ac & ae \\ bd & -cd & ed \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}=4abcdef$

(2) $\begin{vmatrix} a_1+kb_1 & b_1+c_1 & c_1 \\ a_2+kb_2 & b_2+c_2 & c_2 \\ a_3+kb_3 & b_3+c_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} = 0$

3．解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3 \\ x_1 \qquad\quad + x_3 + 2x_4 = -1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 \qquad\quad = 1 \\ x_1 + 2x_2 \qquad\quad - 5x_4 = 1 \end{cases}$

第二节　矩阵的概念和运算

一、矩阵的概念

定义 1　由 $m\times n$ 个元素，排列 m 行 n 列的一张表

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}$$

称为一个 **$m\times n$ 矩阵**。有时，把矩阵 A 简写为 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$。

当 $m=n$ 时，A 称为 **n 阶方阵**(或 n 阶矩阵)。

当 $n=1$ 时，

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}_{m\times 1}，称为**列矩阵**(或列向量)。$$

当 $m=1$ 时，$A=[a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}]_{1\times n}$，称为**行矩阵**(或行向量)。

所有元素都是零的矩阵称为**零矩阵**，以 $\mathbf{0}$ 记之。

一个 n 阶方阵 A，如果除主对角线元素外其余元素都是零，则称**对角矩阵**，形式为

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

主对角线上元素，$a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}=1$ 的对角矩阵称为**单位矩阵或幺阵**，记作 E，即

$$E=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

二、矩阵的运算

1．矩阵的加法和数与矩阵的乘法

定义 2 两个 m 行 n 列矩阵 $A=[a_{ij}]$和 $B=[b_{ij}]$对应位置的元素相加得到的 m 行 n 列矩阵，称为**矩阵 A 与矩阵 B 的和**，记作 $A+B$，即

$$\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}=A+B \tag{1}$$

定义 3 把矩阵 $A=[a_{ij}]$的各元素变号得到的矩阵，称为A的**负矩阵**.记作 $-A$．即

$$若\ A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$则\ -A=\begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{bmatrix}$$

由矩阵加法及负矩阵可以定义矩阵的减法：两个 m 行 n 列矩阵 A 和 B 的差，规定为 $A+(-B)$，记作 $A-B$。即 $A-B=A+(-B)$。

例如 $$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}+\left\{-\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1-1 & 2-1 \\ 0-0 & 1-0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由此可见，两个 $m\times n$ 的矩阵相减，实际上是每一个对应元素相减。

定义 4 以数 λ 乘矩阵 $A=[a_{ij}]$的每一个元素所得到的矩阵，称为数 λ 与矩阵 A 的积，记作 λA，即

$$\lambda A=\begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2}$$

注意：数乘矩阵时，该数要乘矩阵的每一个元素；而数乘行列式，只要将该数乘行列式的某一行或某一列。

设 A、B、C、0 都是 $m\times n$ 矩阵，λ、k 是数，则矩阵的加减法及数乘满足以下运算规律：

(1) $A+B=B+A$,

(2) $(A+B)+C=A+(B+C)$,

(3) $A+0=A$,

(4) $A+(-A)=0$,

(5) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$,

(6) $(k+\lambda)A=kA+\lambda A$,

(7) $(k\lambda)A=k(\lambda A)$.

例 1 已知

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & 3 & -2 & 1\\ 4 & 0 & 3 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}4 & 3 & 2 & -1\\ 5 & -3 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -5 & 0\end{pmatrix}$$

求 $3A-2B$.

解

$$3A-2B=\begin{pmatrix}-3 & 6 & 9 & 3\\ 0 & 9 & -6 & 3\\ 12 & 0 & 9 & 6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8 & 6 & 4 & -2\\ 10 & -6 & 0 & 2\\ 2 & 4 & -10 & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-3-8 & 6-6 & 9-4 & 3+2\\ 0-10 & 9+6 & -6-0 & 3-2\\ 12-2 & 0-4 & 9+10 & 6-0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-11 & 0 & 5 & 5\\ -10 & 15 & -6 & 1\\ 10 & -4 & 19 & 6\end{pmatrix}.$$

例 2 已知

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2 & 0\\ 1 & 5 & 7 & 9\\ 2 & 4 & 6 & 8\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}7 & 5 & -2 & 4\\ 5 & 1 & 9 & 7\\ 3 & 2 & -1 & 6\end{pmatrix}$$

且 $A+2X=B$, 求 X.

解

$$X=\frac{1}{2}(B-A)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}7-3 & 5+1 & -2-2 & 4-0\\ 5-1 & 1-5 & 9-7 & 7-9\\ 3-2 & 2-4 & -1-6 & 6-8\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & 6 & -4 & 4\\ 4 & -4 & 2 & -2\\ 1 & -2 & -7 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3 & -2 & 2\\ 2 & -2 & 1 & -1\\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{7}{2} & -1\end{pmatrix}$$

定义 5 设 $A=[a_{ij}]$是一个 $m\times s$ 矩阵，$B=[b_{ij}]$是一个 $s\times n$ 矩阵，则规定矩阵 A 与矩阵 B 的乘积是一个 $m\times n$ 矩阵 $C=[c_{ij}]$，其中

$$\begin{aligned} c_{ij} &= a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj} \\ &= \sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{kj} \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \end{aligned} \tag{3}$$

并记作 $C=AB$。

这个定义说明，只有矩阵 A(左矩阵)的列数等于矩阵 B(右矩阵)的行数，AB 才能相乘，而且AB（$=C$)这个矩阵中第 i 行第 j 列的元素，等于矩阵 A 的第 i 行元素与矩阵 B 的第 j 列对应元素乘积的和。并且矩阵 C 的行数等于矩阵 A 的行数，矩阵 C 的列数等于矩阵 B 的列数。

例 3 某地区有四个工厂 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ，生产甲、乙、丙三种产品，矩阵 A 表示一年中各工厂生产各种产品的数量，矩阵 B 表示各种产品的单位价格（元）及单位利润（元），矩阵 C 表示各工厂的总收入及总利润。

$$A=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{甲} & \text{乙} & \text{丙} \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \text{Ⅰ} \\ \text{Ⅱ} \\ \text{Ⅲ} \\ \text{Ⅳ} \end{array}$$

$$B=\begin{array}{c} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} \text{单位} & \text{单位} \\ \text{价格} & \text{利润} \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \text{甲} \\ \text{乙} \\ \text{丙} \\ \\ \\ \end{array} \qquad C=\begin{array}{c} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \\ c_{41} & c_{42} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} \text{总收入} & \text{总利润} \end{array} \end{array}$$

试计算各工厂的总收入及总利润。

解 各工厂的总收入及总利润可应用矩阵的乘法运算进行计算

$$AB=C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \\ c_{41} & c_{42} \end{pmatrix}$$

总收入 总利润

其中 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j} \quad (i=1, 2, 3, 4; j=1, 2)$

即矩阵 C 中第 i 行第 j 列的元素等于矩阵 A 第 i 行元素与矩阵 B 第 j 列对应元素乘积的和。

例 4 若

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$ 求 AB。

解

$$AB=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 2\times1+3\times2 & 2\times(-2)+3\times(-1) & 2\times(-3)+3\times0 \\ 1\times1+(-2)\times2 & 1\times(-2)+(-2)\times(-1) & 1\times(-3)+(-2)\times0 \\ 3\times1+1\times2 & 3\times(-2)+1\times(-1) & 3\times(-3)+1\times0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 8 & -7 & -6 \\ -3 & 0 & -3 \\ 5 & -7 & -9 \end{pmatrix}$$

矩阵的乘法，在一般情况下不满足交换律。因为 AB 有意义，BA 不一定有意义，即使 AB, BA, 都有意义，AB 与 BA 也不一定相等。

例如， $A=\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}$

则 $$AB=\begin{bmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 4\\ -3 & -6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-16 & -32\\ 8 & 16\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}2 & 4\\ -3 & -6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

显然，$AB\neq BA$。

此例还说明，两个非零矩阵相乘可能是零矩阵。

矩阵乘矩阵满足下列运算规律(假设运算都是可以进行的)：

(1) $(AB)C=A(BC)$；

(2) $A(B+C)=AB+AC$；

(3) $\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$，($\lambda$ 为数)；

(4) $EA=AE=A$。

2. 矩阵的转置

定义 6 将 $m\times n$ 矩阵 A 的行与列互换，得到的 $n\times m$ 矩阵，称为矩阵 A 的**转置矩阵**，记为 A'。即

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

$$A'=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1}\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

转置矩阵有下列性质：

(1) $(A')'=A$；

(2) $(A+B)'=A'+B'$；

(3) $(\lambda A)'=\lambda A'$，(λ 为数)；

(4) $(AB)'=B'A'$。

3. 方阵的行列式

定义 7 由 n 阶方阵 A 的元素所构成的行列式(各元素的位置不变)，叫做**方阵 A 的行列式**，记作 $|A|$。

设 A, B 为 n 阶方阵，λ 为数，则 $|A|$，$|B|$ 及 λ 满足以下运算规律：

(1) $|A'| = |A|$；

(2) $|\lambda A| = \lambda^n |A|$；

(3) $|AB| = |A| \cdot |B|$。

由(3)可知，对于 n 阶方阵 A 和 B，一般地 $AB \neq BA$，但它们的行列式总有 $|AB| = |BA|$。

例 5 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$，$B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$，求 $|AB|$。

解法(1) $AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 17 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$，

所以 $$|AB| = \begin{vmatrix} 11 & 17 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 56$$

解法(2) $$|AB| = |A||B| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= (-8) \cdot (-7) = 56$$

习 题 8-2

1. 设
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix},$$
求 (1) $2A + 3B$；(2) $5A - 7B$；(3) $3AB - 2A$；(4) $A'B$。

2. 计算下列矩阵的乘积：

(1) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$；　(2) $[1 \ \ 2 \ \ 3]\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$；

(3) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}[-1 \ \ 2]$；

(4) $[x_1 \ \ x_2 \ \ x_3]\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$（其中 $a_{ij} = a_{ji}$）。

3. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ 检查下列等式是否成立:

(1) $AB=BA$;

(2) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$;

(3) $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$.

4. 设有两个线性变换

$$\begin{cases} y_1=x_1+2x_2-x_3\\ y_2=3x_1+4x_2\\ y_3=x_1+2x_2+3x_3\end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases} x_1=t_1-t_2\\ x_2=2t_1+t_2\\ x_3=-t_1\end{cases}$$

利用矩阵乘法求出用 t_1, t_2 表示 y_1, y_2, y_3 的线性变换.

第三节　逆矩阵及其求法

设有线性方程组（当 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 不全为常数时，则称线性变换）

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=y_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=y_2\\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=y_n\end{cases} \tag{1}$$

那末线性方程组(1)可用矩阵形式

$$AX=Y \tag{2}$$

表示，其中

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix},$$

$$X=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}, \quad Y=\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

本节要讨论的问题，是否存在一个与矩阵 A 有相同行数和相

同列数的矩阵 B，使 $BA=AB=E$ 成立，若用 B 左乘方程组(2)，便得

$$X=BY$$

这就是求逆矩阵问题。

定义 对于 n 阶方阵 A，如果存在一个 n 阶方阵 B，使 $AB=BA=E$，则称方阵 A 是可逆的，且把方阵 B 叫做方阵 A 的**逆矩阵**，简称**逆阵**，记作 $B=A^{-1}$。

求逆矩阵是以下面三个定理为基础的。

定理1 如果矩阵 A 是可逆的，则 A 的逆矩阵是唯一的。

证 假设 B，C 都是 A 的逆矩阵，则有

$$B=BE=B(AC)=(BA)C=EC=C$$

所以 A 的逆矩阵是唯一的。

定理2 如果矩阵 A 可逆，则 $|A|\neq 0$。

证 如果 A 可逆，则有 A^{-1} 存在，使 $AA^{-1}=E$。

$$|AA^{-1}|=|E|$$

即
$$|A||A^{-1}|=1$$

所以
$$|A|\neq 0$$

定理3 如果 $|A|\neq 0$，则方阵 A 可逆，且

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^* \tag{3}$$

其中 A^* 称为方阵 A 的**伴随矩阵**，它是 $|A|$ 的各个元素的代数余子式所构成的如下方阵：

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

证明略。

例 矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$

因为

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & 0\\2 & -5\end{vmatrix}=-5$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & 0\\-3 & -5\end{vmatrix}=10$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & 1\\-3 & 2\end{vmatrix}=7$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}0 & 1\\2 & -5\end{vmatrix}=2$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 1\\-3 & -5\end{vmatrix}=-2$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 0\\-3 & 2\end{vmatrix}=-2$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{vmatrix}=-1$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 1\\2 & 0\end{vmatrix}=2$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{vmatrix}=1$$

所以

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\A_{12} & A_{22} & A_{32}\\A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 2 & -1\\10 & -2 & 2\\7 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

定义 当 n 阶方阵 A 的行列式 $|A|=0$ 时，A 称为**奇异的**，否则称**非奇异的**。

由定理 2 与定理 3 可知，n 阶方阵 A 为可逆的充分必要条件 A 是非奇异的。

逆矩阵有如下性质：

性质 1 若 A 可逆，则 A^{-1} 也可逆，且 $(A^{-1})^{-1}=A$。

性质 2 若 A 可逆，数 $\lambda\neq 0$，则 λA 可逆，且 $(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}$。

性质 3 两个同阶可逆矩阵 A, B 的乘积是可逆矩阵，且 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$。

因为 $(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=AEA^{-1}=AA^{-1}=E$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB)=B^{-1}(A^{-1}A)B=B^{-1}EB=B^{-1}B=E$$

所以
$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

性质 4 可逆矩阵 A 的转置矩阵 A' 是可逆矩阵，且

$$(A')^{-1}=(A^{-1})'$$

因为
$$A'(A^{-1})'=(A^{-1}A)'=E'=E$$
$$(A^{-1})'A'=(AA^{-1})'=E'=E$$

所以
$$(A')^{-1}=(A^{-1})'$$

例 1 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ -3 & 2 & -5\end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

解 因为
$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ -3 & 2 & -5\end{vmatrix}=2\neq 0$$

所以 A 可逆。
$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 2 & -1\\ 10 & -2 & 2\\ 7 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

于是得

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-5 & 2 & -1\\ 10 & -2 & 2\\ 7 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-\frac{5}{2} & 1 & -\frac{1}{2}\\ 5 & -1 & 1\\ \frac{7}{2} & -1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

例 2 利用逆矩阵解线性方程组：

$$\begin{cases} x_1-2x_2 \quad\quad + \quad x_4=7 \\ 2x_1+3x_2-x_3 \quad\quad =-3 \\ \quad\quad x_2+x_3+\quad 4x_4=3 \\ -x_1 \quad\quad -4x_3+\quad 2x_4=-4 \end{cases}$$

解 令

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

则所给方程组可写成矩阵形式

$$AX=B \tag{4}$$

可以算出，$|A|=148$

$$A^{-1}=\frac{1}{148}\begin{pmatrix} 56 & 40 & -8 & -12 \\ -40 & 19 & 11 & -2 \\ -8 & -11 & 17 & -30 \\ 12 & -2 & 30 & 8 \end{pmatrix}$$

将(4)式两端同时左乘 A^{-1}，有

$$A^{-1}AX=A^{-1}B$$

故方程组的解

$$X=A^{-1}B=\frac{1}{148}\begin{pmatrix} 56 & 40 & -8 & -12 \\ -40 & 19 & 11 & -2 \\ -8 & -11 & 17 & -30 \\ 12 & -2 & 30 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

即 $x_1=2,\quad x_2=-2,\quad x_3=1,\quad x_4=1.$

习 题 8-3

1. 求下列矩阵的逆矩阵：

(1) $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix}3&0&1\\1&2&5\\-1&4&2\end{pmatrix}$

2. 解下列矩阵方程，求出未知矩阵 X：

(1) $X\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&3\\4&3&2\\1&2&5\end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix}1&1&-1\\-2&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix}$

3. 利用逆矩阵解方程组：

(1) $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=1\\2x_1+2x_2+5x_3=2\\3x_1+5x_2+x_3=3\end{cases}$

(2) $\begin{cases}3x_1-2x_2\qquad\quad-x_4=7\\\qquad 2x_2+2x_3+x_4=5\\x_1-2x_2-3x_3-2x_4=-1\\\qquad x_2+2x_3+x_4=6\end{cases}$

第四节　矩阵的初等变换及其应用

一、矩阵的初等变换

定义1　对矩阵施以下列变换，称为**矩阵的初等变换**。

(1) 交换矩阵的两行(列)；

(2) 以一个非零的数 k 乘矩阵的某一行(列)；

(3) 把矩阵的某一行(列)的 λ 倍加到另一行(列)上。

定义2　如果矩阵 A 经过有限次初等变换变成矩阵 B，称**矩阵 A 与矩阵 B 等价**，记作 $A\sim B$。

定义3 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，从 A 中任取 k 行 k 列（$k\leqslant\min(m, n)$），位于这些行和列的相交处的元素，保持它们原来的相对位置所构成的 k 阶行列式，称为**矩阵 A 的一个 k 阶子式。**

例如，
$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
矩阵 A 的第一、三两行，第二，四两列相交处的元素所构成的二阶子式为：
$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

定义4 设 A 为 $m\times n$ 矩阵。如果 A 中不为零的子式最高阶数为 r，即存在 r 阶子式不为零，而任何 $r+1$ 阶子式皆为零，则称 r 为矩阵 A **的秩**，记作 $R(A)=r$。

当 $A=0$ 时，规定 $R(A)=0$。

当 $R(A)=\min(m, n)$时，称矩阵 A 为**满秩矩阵。**

定理1 矩阵经初等变换后，其秩不变。

证明略。

例1 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 8 & 2 \\ 2 & 12 & -2 & 12 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ 的秩。

解 因为矩阵 A 有一个二阶子式
$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 12 \end{vmatrix}\neq 0$$
而所有的三阶子式都等于零。所以 $R(A)=2$。

例2 求矩阵
$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & 6 & -6 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$
的秩。

解 对 A 施行初等变换

$$A \xrightarrow[r_4-3r_1]{\substack{r_2+2r_1 \\ r_3-2r_1}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 9 & 6 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3\leftrightarrow r_4]{r_2\leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 9 & 6 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-3r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4+2r_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

上式中符号"↔"表示两行(列)对调。最后得到一个"阶梯形矩阵",且每一阶梯只有一行，因为不难找出一个非零的三阶行列式，而任何的四阶行列式都是零。由此可知，$R(A)=3$。

二、用初等变换求逆矩阵

设矩阵 A 为 n 阶可逆矩阵，作一个 $n\times 2n$ 的矩阵$[AE]$，E 是 n 阶单位矩阵。然后对矩阵$[AE]$施以行的初等变换，使子块 A 化为 E，则同时子块 E 即化为 A^{-1} 了。

例 3 求矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

的逆矩阵。

解 作 3×6 矩阵$[AE]$，再对它施以行初等变换。

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[r_2-5r_3]{r_1-2r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[r_3\times(-1)]{r_2\times\left(-\frac{1}{2}\right)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}
$$

故

$$
A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}
$$

若将与 A 同阶的单位矩阵E写在矩阵A的下方，只对其施以列的初等变换，直至将 A 化成单位矩阵 E，而下方的单位矩阵 E 便相应地化成了逆矩阵 A^{-1}。

三、用行的初等变换解线性方程组

线性方程组

$$
\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}
$$

其矩阵形式为

$$AX=B \tag{2}$$

我们把方程组的系数与常数项放在一起构成的矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

称为方程组的增广矩阵。

用消元法解线性方程组的过程，实质上就是对该方程组的增广矩阵施以仅限于行的初等变换的过程.对增广矩阵施以(1)、(2)两种初等变换，相当于分别交换两个方程的次序及用非零数 k 乘某一方程的两边，显然不会改变方程的解。对增广矩阵施以初等变换(3)，如将增广矩阵第 i 行 k 倍加到第 j 行，这相当于将原方程组的第 i 个方程乘以 k 加到第 j 个方程，于是第 j 个方程变为：

$$a_{j1}x_1+a_{j2}x_2+\cdots+a_{jn}x_n+k(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n)=b_j+kb_i$$

新方程与原方程同解。因此对增广矩阵施行有限次初等变换后，它所表示的方程组与原方程组同解。所以解线性方程组时，只需写出方程组的增广矩阵的初等变换过程即可。

例 4 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-5x_3+x_4=8 \\ x_1-3x_2-6x_4=9 \\ 2x_2-x_3+2x_4=-5 \\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0 \end{cases}$$

解 对线性方程组的增广矩阵施以行初等变换

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 2 & 1 & -5 & 1 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & -6 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

$$
\xrightarrow[r_4-r_2]{r_1-2r_2}\left(\begin{array}{cccc|c}0&7&-5&13&-10\\1&-3&0&-6&9\\0&2&-1&2&-5\\0&7&-7&12&-9\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[r_4-r_1]{r_1-3r_3}\left(\begin{array}{cccc|c}0&1&-2&7&5\\1&-3&0&-6&9\\0&2&-1&2&-5\\0&0&-2&-1&1\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2+3r_1}\left(\begin{array}{cccc|c}0&1&-2&7&5\\1&0&-6&15&24\\0&0&3&-12&-15\\0&0&-2&-1&1\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[r_2+2r_3]{\substack{r_3+r_4\\ r_1-r_4}}\left(\begin{array}{cccc|c}0&1&0&8&4\\1&0&0&-9&-6\\0&0&1&-13&-14\\0&0&-2&-1&1\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{r_4+2r_3}\left(\begin{array}{cccc|c}0&1&0&8&4\\1&0&0&-9&-6\\0&0&1&-13&-14\\0&0&0&-27&-27\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{r_4\times\left(\frac{-1}{27}\right)}\left(\begin{array}{cccc|c}0&1&0&8&4\\1&0&0&-9&-6\\0&0&1&-13&-14\\0&0&0&1&1\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[\substack{r_2+9r_4\\ r_3+13r_4}]{r_1-8r_4}\left(\begin{array}{cccc|c}0&1&0&0&-4\\1&0&0&0&3\\0&0&1&0&-1\\0&0&0&1&1\end{array}\right)
$$

由此可知所求方程组的解为：

$x_1=3$，$x_2=-4$，$x_3=-1$，$x_4=1$。

由此例可见，用初等变换解线性方程组，只需将增广矩阵中的系数矩阵部分变换成单位矩阵，那末增广矩阵的最后一列常数项即为所求方程组的解。

例 5 求解方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-x_4=1 \\ 3x_1-x_2+5x_3-3x_4=2 \\ -x_1+x_2+2x_3-2x_4=3 \end{cases}$$

解

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-3r_1}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

在增广矩阵的第三行所表示的方程出现 $0=2$ 的矛盾，故原方程组无解。

习 题 8-4

1．利用初等变换，求下列矩阵的逆矩阵：

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

2．求下列线性变换的逆变换：

(1) $\begin{cases} x_1=2y_1+2y_2+y_3 \\ x_2=3y_1+y_2+5y_3 \\ x_3=3y_1+2y_2+3y_3 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x_1=2y_1+y_2-y_3 \\ x_2=2y_1+y_2+2y_3 \\ x_3=y_1-y_2+y_3 \end{cases}$

3．试用逆矩阵和初等变换两种方法，求下列方程组的解：

(1) $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 1 \\ -3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \qquad - x_4 = 7 \\ 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -1 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \end{cases}$

第五节　矩阵的特征值与特征向量

定义1　设 A 是 n 阶方阵，λ 是一个数，如果有 n 行非零的列矩阵 X 使

$$AX=\lambda X \tag{1}$$

成立，则称 λ 为 A 的一个**特征值**，X 称为与特征值 λ 对应的**特征向量**。

将(1)式改写为

$$[A-\lambda E]X=0 \tag{2}$$

(2)式即为 n 元齐次线性方程组

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn}-\lambda)x_n = 0 \end{cases} \tag{3}$$

此方程组存在非零解的充分必要条件为系数行列式等于零，即

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0 \tag{4}$$

定义2　设 A 是 n 阶方阵，含有未知量 λ 的矩阵 $[A-\lambda E]$ 称为 A 的**特征矩阵**，行列式 $|A-\lambda E|$ 称为 A 的**特征多项式**，$|A-\lambda E|=0$ 称为 A 的**特征方程**。

显然，A 的特征值就是特征方程的根，称为**特征根**。若 λ 是 $|A-\lambda E|=0$ 的 n_i 重根，则 λ 称为 A 的 n_i 重特征根。方程 $|A-\lambda E|=0$ 的每一个非零向量，都是对应于 λ 的特征向量。

例 1 求矩阵 $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\5 & -1\end{bmatrix}$的特征值与特征向量。

解 矩阵 A 的特征方程为：

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}3-\lambda & 1\\5 & -1-\lambda\end{vmatrix}=0$$

化简得 $(\lambda-4)(\lambda+2)=0$

所以 $\lambda_1=4$, $\lambda_2=-2$ 是矩阵 A 的两个不同的特征值。

将 $\lambda_1=4$ 代入线性方程组(3)，得

$$\begin{cases}-x_1+\ \ x_2=0\\5x_1-5x_2=0\end{cases}$$

解此方程组取一组解向量 $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$，得对应于 $\lambda_1=4$ 的特征向量为：

$$P_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

同样，以 $\lambda_2=-2$ 代入线性方程组(3)，得

$$\begin{cases}5x_1+x_2=0\\5x_1+x_2=0\end{cases}$$

它的一组解向量是$\begin{bmatrix}1\\-5\end{bmatrix}$，即为对应于 $\lambda_2=-2$ 的特征向量。

$$P_2=\begin{bmatrix}1\\-5\end{bmatrix}$$

例 2 求矩阵

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\-4 & 3 & 0\\1 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

的特征值和特征向量。

解 矩阵 A 的特征方程为：

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-1-\lambda & 1 & 0\\ -4 & 3-\lambda & 0\\ 1 & 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0$$

化简得 $(\lambda-2)(\lambda-1)^2=0$，所以 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=\lambda_3=1$ 是矩阵 A 的特征值，"1"是矩阵 A 的二重特征值。

以 $\lambda_1=2$ 代入线性方程组(3)，得

$$\begin{cases}-3x_1+x_2=0\\ -4x_1+x_2=0\\ -x_1\qquad=0\end{cases}$$

它的一组解向量是 $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，即为对应于 $\lambda_1=2$ 的特征向量

$$P_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

以 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 代入线性方程组(3)，得

$$\begin{cases}-2x_1+\ \ x_2=0\\ -4x_1+2x_2=0\\ \quad x_1+\ \ x_3=0\end{cases}$$

它的一组解向量是 $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$，所以对应于二重特征值 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$。

习　　题 8-5

1．求下列矩阵的特征值和特征向量：

(1) $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 4\end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

2．求下列矩阵的特征值：

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

习 题 答 案

第一章

习 题 1-1

2. (1) $[-1,0),(0,1]$；

(2) $(-\infty,0)$；

(3) $(0,1),(1,+\infty)$；

(4) $(-\infty,+\infty)$；

(5) $\left(k\pi-\dfrac{\pi}{4}-1,k\pi+\dfrac{\pi}{4}-1\right],(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$；

(6) $\left(-\infty,\dfrac{7}{2}\right]$。

3. $[-1,1]$；$[2k\pi,(2k+1)\pi],(k=0,\pm1,\pm2\cdots,)$；$[-a,1-a]$。

4. $f(0)=0,\ f(1)=\dfrac{\pi}{2},\ f(-1)=-\dfrac{\pi}{2},f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\dfrac{\pi}{4}$，

$f(x_0)=\arcsin x_0,f(x_0+h)=\arcsin(x_0+h)$。

6. $f(-2)=-1,f(0)=0,f(2)=4$。

8. $W(m)=\begin{cases}3000+600m,\ 0\leqslant m\leqslant6; \\ 3600+500m,6<m\leqslant12.\end{cases}$

$W(10)=8600(\mathrm{g})$。

9. (1) $y=\sin^2x$；

(2) $y=\sin x^2$；

(3) $y=e^{x^2}$；

(4) $y=e^{2x}$。

10. (1) $y=\sin u,u=2x$；

(2) $y=u^2,u=\cos x$；

(3) $y=u^3,u=\sin v,v=\dfrac{x}{2}$；

(4) $y=u^{\frac{2}{3}},u=1+x$；

(5) $y=\ln u,u=\operatorname{tg}v,v=\dfrac{x}{2}$；

(6) $y=e^u,u=\operatorname{tg}v,\ v=\dfrac{1}{x}$；

(7) $y=\arcsin u, u=\frac{1-x}{1+x}$;

(8) $y=\frac{1}{2}\ln u,\ u=\frac{1-x}{1+x}$;

(9) $y=u^{\frac{1}{2}},\ u=\ln v, v=\frac{1-x}{1+x}$;

(10) $y=\frac{1}{u-1}, u=e^{x}$。

习 题 1-2

1. (1) -1; (2) 0; (3) 1; (4) ∞; (5) $\frac{1}{2}$; (6) 0; (7) -1; (8) 1;
   (9) $\frac{1}{2}$; (10) 2。

2. (1) α; (2) 3; (3) $\frac{2}{5}$; (4) 2; (5) 1; (6) 1; (7) 0; (8) -1。

3. (1) e^{-1}; (2) e^{2}; (3) $\sqrt{e}$; (4) e^{-1}; (5) $e^{-\frac{1}{2}}$; (6) e^{-2}; (7) e; (8) ∞。

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{|x|}$不存在。

5. $\lim\limits_{x\to 0^-}\operatorname{sgn}(x)=-1$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\operatorname{sgn}(x)=1$; $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sgn}(x)$不存在。

6. $\lim\limits_{n\to+\infty} c_{\max}=\frac{a}{1-r}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} c_{\min}=\frac{ar}{1-r}$,

$$a=\alpha-\beta,\ T=\frac{1}{k}\ln\frac{\alpha}{\beta}.$$

习 题 1-3

1. (1) $x\to\infty$时，是无穷小；
   (2) $x\to 1$或$x\to -2$时，是无穷小；$x\to 2$式$x\to\infty$时，是无穷大；
   (3) $x\to 2k\pi+\frac{\pi}{2}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$时，是无穷小；
   (4) $x\to-\infty$时，是无穷小；$x\to+\infty$时，是无穷大。
2. (1) 同阶，不等价；
   (2) 同阶，不等价；
   (3) 等价无穷小；
   (4) 高阶无穷小。
3. (1) 同阶，不等价；
   (2) 高阶无穷小；

(3) 高阶无穷小；

(4) 等价无穷小。

4. (1) 0；(2) 0。

5. (1) ∞；(2) $+\infty$。

习 题 1-4

2. (1) $x=-1$，$x=2$ 为间断点。连续区间为 $(-\infty,-1)$，$(-1,2)$，$(2,+\infty)$；

(2) $x=\frac{k\pi}{2}$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 为间断点。连续区间为 $\left(\frac{k\pi}{2}, \frac{1}{2}(k+1)\pi\right)$。

3. (1) $f(x)$ 在 $[0,2]$ 内连续；

(2) $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 与 $(-1,+\infty)$ 内连续，$x=-1$ 为间断点。

4. $x=0$ 为间断点。

5. $a=\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续。

6. (1) $\sqrt{6}$；　(2) 2；

(3) $\frac{1}{2}$；　(4) $\frac{4}{3}$；

(5) 0；　(6) $\frac{1}{2}$；

(7) $\cos a$；　(8) 1；

(9) e^2；　(10) 1。

第 二 章

习 题 2-1

1. (1) $\bar{v}=210+5\Delta t$(m/s)；$\Delta t=1, 0.1, 0.01$ 时，$\bar{v}=215, 210.5, 210.05$(m/s)；

(2) $v=210$(m/s)。

2. (1) $f'(x_0)$；(2) $-f'(x_0)$；(3) $2f'(x_0)$。

3. (1) $f'(x)=a$；　(2) $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$。

4. (1) $y'=4x^3$；　(2) $y'=-\frac{2}{x^3}$；

(3) $y'=-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$；　(4) $y'=\frac{1}{x\ln 10}$。

5. $\frac{1}{2}$, 1.

6. (2, 4).

7. $a=-1$.

8. 12m/s.

9. 电流强度$I=\frac{dQ}{dt}$, $I(t_0)=\frac{dQ}{dt}\Big|_{t=t_0}$.

习 题 2-2

1. (1) $6x+\frac{2}{x^2}$;　　(2) $2+\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$;

(3) $2x-5x^{-\frac{7}{2}}+3x^{-4}$;　　(4) $\frac{2}{x}$;

(5) $2x\sin x+(x^3+1)\cos x$;　　(6) $\operatorname{tg}x+x\sec^2x-\sec x\operatorname{tg}x$;

(7) $\ln x-\frac{1}{x}+1$;　　(8) $\ln x(\cos x-x\sin x)+\cos x$;

(9) $\frac{a}{a+b}$;　　(10) $-\frac{a(a+b)}{(ax+b)^2}$;

(11) $\frac{2}{(1+x^2)^2}$;　　(12) $\frac{1}{1+\cos x}$;

(13) $10(2x+3)^4$;　　(14) $\frac{1}{x-1}$;

(15) $\omega\cos(\omega t+\varphi)$;　　(16) $\frac{1}{x\ln x}$;

(17) $-\frac{1}{2}\sin x$;　　(18) $2\sin x\cos 3x$;

(19) $x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$;　　(20) $\frac{a^2-2x^2}{2\sqrt{a^2-x^2}}$;

(21) $10x^9-10^x\ln 10$;　　(22) $2e^x(1+x)$;

(23) $2e^{2x}+2xe^{x^2}$;　　(24) $-e^{-at}[a\cos(\omega t+\varphi)+\omega\sin(\omega t+\varphi)]$;

(25) 0;　　(26) $\frac{1}{\sqrt{4-(1-x)^2}}$;

(27) $\frac{2x}{1+x^4}-\frac{1}{1+x^2}$;　　(28) $-\frac{1}{1+x^2}$;

(29) $y'=\begin{cases}-1, & 2n\pi<x<(2n+1)\pi\\ 1, & (2n+1)\pi<x<(2n+2)\pi\end{cases}$ (n为整数);

(30) $y'=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & -1<x<0;\\ -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & 0<x<1.\end{cases}$

2. (1) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; (2) $\frac{2}{x}\operatorname{tg}\frac{1}{x}$;

(3) $\frac{1}{t-t^3}$; (4) $\sqrt{a^2-x^2}$;

(5) $\arcsin\frac{x}{2}$; (6) $\frac{x^2}{1-x^4}$;

(7) $(1+x^2)^{\sin x}\left[\cos\ln(1+x^2)+\frac{2x\sin x}{1+x^2}\right]$;

(8) $\left(\frac{x}{1+x}\right)^x\cdot\left(\ln\frac{x}{1+x}+\frac{1}{1+x}\right)$.

3. (1) $\frac{e^{x+y}-y}{x-e^{x+y}}$; (2) $-\frac{e^y}{1+xe^y}$;

(3) $y'=\frac{x+y}{x-y}$.

4. (1) $2xe^{x^2}(3+2x^2)$; (2) $-\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$;

(3) $-2e^{-t}\cos t$.

5. (1) $e^x(x+n)$; (2) $(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$;

(3) $2^{n-1}\sin\left[2x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right]$.

6. $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x+e^y}$, $y=-\frac{1}{e}x+1$.

7 $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$.

8. 3(m/s), $t=\frac{3}{2}$(s)

习 题 2-5

1. (1) $\xi=\frac{3}{2}$; (2) $\xi=\sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}}$.

4. (1) 2; (2) $-\frac{3}{5}$;

(3) $-\frac{1}{8}$; (4) $-\frac{1}{2}$;

(5) 1; (6) ∞;

(7) $-\frac{1}{2}$; (8) $\frac{1}{2}$;

(9) 0; (10) 1.

习 题 2-4

1. (1) 在$(-\infty,+\infty)$单调减少；

(2) 在$(-\infty,1)$和$(3,+\infty)$单调增加，在$(1,3)$单调减少；

(3) 在$\left(0,\frac{1}{2}\right)$单调减少，在$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$单调增加；

(4) $\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$和$\left(\frac{5\pi}{3},2\pi\right)$单调减少，在$\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right)$单调增加。

2. (1) 极大值 $y(0)=0$，极小值 $y(1)=-1$；

(2) 极小值 $y(0)=0$；

(3) 极小值 $y(-1)=-\frac{1}{2}$，极大值 $y(1)=\frac{1}{2}$；

(4) 极大值 $y(1)=2$。

3. (1) 最大值 $y(4)=80$，最小值 $y(-1)=-5$；

(2) 最大值 $y\left(\frac{3}{4}\right)=1.25$，最小值 $y(-5)=-5+\sqrt{6}$；

(3) 最大值 $y(1)=3$。

4. $a=2$，$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$为极大值。

5. 10^{-7}。

6. $r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$，$h=2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$。

7. $\left(2-\frac{2}{3}\sqrt{6}\right)\pi$。

8. $\frac{\sqrt{2}}{2}a$。

9. (1) 在$(-\infty,2]$内是凸的，在$[2,+\infty)$内是凹的，拐点$\left(2,\frac{2}{e^2}\right)$。

(2) 在$(-\infty,-1]$和$[1,+\infty)$内是凸的，在$[-1,1]$内是凹的，拐点$(-1,\ln 2)$和$(1,\ln 2)$。

11. 28.94 (浓度单位) 1.16 (时间单位)。

习 题 2-5

1. 当 $\Delta x=1$ 时，$\Delta y=18$，$dy=11$；

当 $\Delta x=0.1$ 时，$\Delta y=1.161$，$dy=1.1$；

当 $\Delta x=0.01$ 时，$\Delta y=0.110601$，$dy=0.11$。

2. (1) $\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}dx$； (2) $3\sin(6x+2)\,dx$；

(3) $2x(1+x)e^{2x}dx$；　(4) $-\dfrac{2x}{1+x^4}dx$。

3. (1) $2x+C$；　(2) $\ln(1+x)+C$；

(3) $-\dfrac{1}{2}\cos 2x+C$；　(4) $-\dfrac{1}{2}e^{-2x}+C$；

(5) $2\sqrt{x}+C$；　(6) $-\dfrac{1}{x}+C$。

5. (1) 9.9867；　(2) 0.7954；

(3) 0.5151；　(4) 2.745。

6. (1) 0.141 m，1%；

(2) 0.188 m^2，0.67%。

7. $dv=-\dfrac{c}{(F+a)^2}dF$。

8. (2) $\delta\approx 3.125$ mm。

第 三 章

习 题 3-1

1. (1) $\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{3}{2}x^2+2x+C$；　(2) $\dfrac{1}{3}x^3-3x^2+9x+C$；

(3) $\dfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-2x^{\frac{3}{2}}+C$；　(4) $2x^{\frac{1}{2}}-\dfrac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+\dfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C$；

(5) $x-\operatorname{arctg}x+C$；　(6) $\dfrac{1}{3}x^3+2\operatorname{arctg}x+C$；

(7) $\dfrac{1}{\ln 2}2^x+\dfrac{1}{3}x^3+C$；　(8) $\dfrac{1}{1+\ln 3}3^xe^x+C$；

(9) $2e^x+3\ln|x|+C$；　(10) $e^x-2\sqrt{x}+C$；

(11) $-\cos x+\dfrac{x}{2}+C$；　(12) $\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}\sin x+C$；

(13) $\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}x+C$；　(14) $\sin x-\cos x+C$；

(15) $-(\operatorname{ctg}x+\operatorname{tg}x)+C$；　(16) $\operatorname{tg}x-2x+C$；

(17) $-(\operatorname{ctg}x+x)+C$；　(18) $\arcsin x+C$；

(19) $\dfrac{1}{2}\ln|x|-\dfrac{1}{3x}-\dfrac{1}{8x^2}+C$；　(20) $\ln\left|\dfrac{x}{1+x}\right|+C$。

2. $y=\dfrac{1}{2}x^2-2$。

习 题 3-2

1. (1) -1;　　(2) $\frac{1}{2}$;

(3) $\frac{1}{2}$;　　(4) $-\frac{1}{6}$;

(5) $\frac{1}{2}$;　　(6) -1;

(7) -2;　　(8) $-\frac{1}{2}$;

(9) $\frac{1}{2}$;　　(10) -1.

2. (1) $-\frac{1}{8}(1-2x)^4+C$;　　(2) $\frac{1}{3}\ln|3x+2|+C$;

(3) $\frac{3}{4}(3+2x)^{\frac{2}{3}}+C$;　　(4) $-\frac{1}{a}\cos ax-\frac{1}{6}e^{6x}$;

(5) $-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$;　　(6) $\sqrt{1+x^2}+C$;

(7) $-\ln|1-x^2|+C$;　　(8) $\frac{3}{4}\ln(1+x^4)+C$;

(9) $\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg} x^3+C$;　　(10) $\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}\sin 6x+C$;

(11) $-2\cos\sqrt{t}+C$;　　(12) $\frac{1}{\omega}\sin(\omega t+\varphi)+C$;

(13) $-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x+C$;　　(14) $\frac{1}{2\cos^2 x}+C$;

(15) $-\frac{4}{3}\cos^3\frac{x}{2}+C$;　　(16) $\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{10}\cos 5x+C$;

(17) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{1-\sin 2x}+C$;　　(18) $-2\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{2}\ln|\sin 2x|+C$;

(19) $\frac{1}{6}\operatorname{tg}^6 x+C$;　　(20) $\frac{1}{3}\sec^3 x-\sec x+C$;

(21) $\ln|\operatorname{tg} x|+C$;　　(22) $\frac{1}{2}\ln^2 x+C$;

(23) $\ln\ln\ln x+C$;　　(24) $-\sin\frac{1}{x}+C$;

(25) $2e^{\sqrt{x}}+C$;　　(26) $\ln|2+\sin\theta|+C$;

(27) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+\ln|\cos x|+C$;　　(28) $\frac{1}{5}\sin^5 x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\sin x+C$;

(29) $\operatorname{arctg} e^x+C$;　　(30) $(\operatorname{arctg}\sqrt{x})^2+C$;

(31) $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C$; (32) $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x-4}{x+4}\right|+C$;

(33) $\frac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}\frac{2}{3}\sqrt{3}\,x$; (34) $\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\,x-1}{\sqrt{2}\,x+1}\right|+C$;

(35) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-5}{x-1}\right|+C$; (36) $-2\sqrt{1-x^2}-\arcsin x+C$;

(37) $\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{3}x+\frac{1}{4}\sqrt{9-4x^2}$; (38) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}(x-1)+C$;

(39) $\frac{1}{2}\ln(x^2+9)-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C$;

(40) $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{2}+C$;

(41) $\frac{x}{2}\sqrt{2-4x^2}+\frac{1}{2}\arcsin\sqrt{2}\,x+C$;

(42) $\frac{x+1}{2}\sqrt{8-2x-x^2}+\frac{9}{2}\arcsin\frac{x+1}{3}+C$;

(43) $\ln(x+3+\sqrt{x^2+6x+13})+C$;

(44) $\sqrt{x^2+2x-9}-\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x-9})+C$;

(45) $\frac{1}{3}\ln(3x-1+\sqrt{9x^2-6x+5})+C$;

(46) $\frac{2x-1}{4}\sqrt{x-x^2}+\frac{1}{8}\arcsin(2x-1)+C$;

(47) $\frac{1}{a^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}+C$;

(48) $\sqrt{x^2-9}-3\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2-9}}{3}+C$;

(49) $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}\right)+C$;

(50) $-\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\ln\left(x+1+\sqrt{\frac{1}{2}x^2+2x+1}\right)-\ln x\right]+C$;

(51) $\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}-\arcsin\frac{x}{2}+C$;

(52) $\frac{1}{3}(2+x^2)^{3/2}-2(2+x^2)^{1/2}+C$;

(53) $-\frac{x+1}{3}\sqrt{1-2x}+C$;

(54) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}-3\sqrt[3]{x}+3\ln(1+\sqrt[3]{x})+C$;

(55) $-\frac{1+2x}{10}\sqrt[3]{(1-3x)^2}+C$;

(56) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+\frac{6}{7}x\sqrt[6]{x}+C$;

(57) $-\frac{1}{x}\sqrt{1+x^2}+C$;

(58) $\arcsin x-\sqrt{1-x^2}+C$;

(59) $-\frac{1}{3a^2}\frac{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}{x^3}+C$;

(60) $2\sqrt{1+e^x}+\ln\left(\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right)+C$.

习 题 3-3

1. $-\frac{x}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$;

2. $x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C$;

3. $x\ln|x|-x+C$;

4. $-\frac{1}{2}x^2+x\operatorname{tg}x+\ln|\cos x|+C$;

5. $\frac{1}{4}x^2-\frac{x}{4}\sin 2x-\frac{1}{8}\cos 2x+C$;

6. $x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$;

7. $\frac{x^2}{2}\arcsin x+\frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{4}\arcsin x+C$;

8. $\frac{x^2}{2}\operatorname{arc\,tg}x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}x+C$;

9. $-\frac{1}{x}(\ln|x|+1)+C$;

10. $\frac{x^2}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln|x-1|+C$;

11. $-\frac{1}{2}e^{-2t}\left(t+\frac{1}{2}\right)+C$;

12. $x(\ln|x|)^2-2x\ln|x|+2x+C$;

13. $\frac{1}{5}e^{x}(\sin 2x-2\cos 2x)+C$;

14. $x\ln(1+x^2)-2x+2\operatorname{arc\,tg}x+C$;

15. $\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x-\cos x)+C$;

16. $2e^{\sqrt{1+x}}(\sqrt{1+x}-1)+C$;

17. $x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C$;

18. $\frac{x}{2}[\cos(\ln x)+\sin(\ln x)]+C$;

19. $x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C$;

20. $\frac{1}{2}\sec x\operatorname{tg}x+\frac{1}{2}\ln|\sec x+\operatorname{tg}x|+C$;

21. $\frac{x}{2}\sqrt{2x^2+1}+\frac{\sqrt{2}}{4}\ln(\sqrt{2}x+\sqrt{2x^2+1})+C$;

22. $\frac{x-2}{2}\sqrt{x^2-4x+1}-\frac{3}{2}\ln(x-2-\sqrt{x^2-4x+1})+C$.

习 题 3-4

1. $\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+9x-27\ln|x+3|+C$;

2. $x+\frac{1}{2}\ln(x^2+4)-\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$;

3. $\ln\left|\frac{(x-3)^2}{x+1}\right|+C$;

4. $\frac{1}{2}\ln(x^2+6x+10)-3\operatorname{arctg}(x+3)+C$;

5. $3x+12\ln|x-2|-\frac{2}{x-2}+C$;

6. $\ln\frac{x}{x-1}-\frac{1}{x-1}+C$;

7. $\ln\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$;

8. $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\ln|x^2-1|+C$;

9. $\frac{1}{20}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|-\frac{1}{10}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$;

10. $\frac{1}{5}\ln\frac{(1+2x)^2}{1+x^2}+\frac{1}{5}\operatorname{arctg}x+C$.

第 四 章

习 题 4-1

1. $\frac{b^2-a^2}{2}$.

2. $12.5g$(m).

4. (1) 正；(2) 负；(3) 正；(4) 负。

5. (1) 前者大于后者；(2) 前者大于后者；(3) 后者大于前者；(4) 后者大于前者。

习 题 4-2

1. $f'(0)=1$，$f'\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{5}{4}$.

2. 导数值依次为 $0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1$，函数值依次为 $0, -1+\frac{\sqrt{2}}{2}, -1$。

3. 极小值 $y(0)=0$；拐点 $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}(1-e^{-\frac{1}{2}})\right)$.

4. 1.

5. (1) $2\frac{15}{24}$；　(2) $45\frac{1}{6}$；　(3) $\frac{\pi}{3}$；

 (4) 4；　(5) $1-\frac{\pi}{4}$；　(6) 1.

6. (1) $\ln 5$；　(2) $\frac{1}{6}$；　(3) $\frac{2}{3}$；

 (4) $1+\ln\frac{2}{e+1}$；　(5) $\frac{3}{2}\sqrt{2}$；　(6) $2(2-\operatorname{arctg}2)$；

 (7) $\frac{\pi}{4}$；　(8) $\operatorname{arctg}e-\frac{\pi}{4}$；　(9) $\frac{22}{3}$；

 (10) $\frac{\pi}{2}$；　(11) $2\ln\frac{3}{2}$；　(12) $2\sqrt{3}-2$；

 (13) $2-\frac{\pi}{2}$；　(14) $\ln\left|\frac{2(1-\sqrt{2})}{1-\sqrt{5}}\right|$.

7. (1) 1；　(2) $\frac{\pi}{4}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}$；　(3) $\frac{1}{2}(1-\ln 2)$；

(4) $\frac{1}{4}(e^2+1)$; (5) $\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}$; (6) 4π;

(7) $\frac{1}{5}(e^{\pi}-2)$; (8) $2\left(1-\frac{1}{e}\right)$; (9) $\frac{1}{2}[e(\sin1-\cos1)+1]$;

(10) $\frac{e}{2}-1$。

习 题 4-3

1. 分别为 0.7203, 0.7828, 0.7854。

2. 60.53(面积单位)。

3. 154.4 (μg·h/ml。

习题 4-4

1. (1) $\frac{1}{a}$; (2) 发散; (3) 发散;

(4) π; (5) $\frac{\pi}{2}$; (6) $\frac{1}{2}$;

(7) $\frac{1}{2}$; (8) $\frac{2\ln2}{3}$。

2. $k\leqslant1$ 时发散，$k>1$ 时为$\frac{1}{(k-1)(\ln2)^{k-1}}$。

3. $\frac{FD}{KV}$。

习 题 4-5

1. (1) $\frac{16}{3}$; (2) $2\ln2$; (3) 12;

(4) $e+\frac{1}{e}-2$; (5) $9.9-8.1\lg e$; (6) $85\frac{1}{3}$;

(7) $\frac{96}{5}$; (8) $\frac{\pi}{2}$。

2. $\frac{9}{4}$。

3. $\frac{76}{15}$。

4. $3a^2\pi$。

5. (1) $\frac{3}{10}\pi$; (2) $\frac{8}{3}\pi a^2b$; (3) $2\pi^2R^2b$;

(4) $2\pi^2a^2b$; (5) $\frac{32}{15}\pi$; (6) $\frac{\pi}{2}a$。

6. $2ka^3$.

7. 4.9J.

8. 3π(t·m).

9. $\frac{10^3}{4}\pi r^4$(kg·m).

11. $\frac{KmM}{a(a+l)}$.

12. $\frac{KmM}{d}$.

13. $KT\ln\frac{V_2-b}{V_1-b}+\frac{a}{V_2}-\frac{a}{V_1}$.

14. $2\pi v_0[R-\ln(1+R)]$.

15. $\frac{1}{2}\pi kR^4$.

16. 2460(cm/s).

17. $\frac{1}{\pi}I_m$.

第 五 章

习 题 5-1

4. $y=\frac{1}{3}(x^3-1)$.

5. $x=\frac{1}{12}t^4-\frac{1}{2}t^2+t$.

习 题 5-2

1. (1) $y^2+2\sqrt{1-x^2}=C$;

   (2) $y=Ce^{-x}$;

   (3) $y=2-Ce^{kx}$;

   (4) $\ln|(x^2-1)(y+1)|=y+C$;

   (5) $x=C(1-a\cos t)$;

   (6) $\cos y-3x=C$.

2. (1) $y=xe^{-x}+c_1x+c_3$;

   (2) $y=(1-x)\ln|x-1|+c_1x^2+c_2x+c_3$.

3. (1) $y=\frac{7}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}$;

(2) $x^2-y^2=1$;

(3) $m=\dfrac{2}{1+3^{-t}}$;

(4) $y=-e^{-x}+\dfrac{1}{2}x^2+x+2$.

4. $\dfrac{15}{4}\sqrt{2}\,(mc)$.

5. (1) ≈ 370(单位); (2) ≈ 11.3(月).

6. ≈ 7.45(分钟).

7. $y=e^{-x^2/2}$.

8. 50s, 500m.

习　题　5-3

1. (1) $y=\dfrac{1}{2}x^3+cx$;

(2) $y=ce^{2x}-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{5}{4}$;

(3) $y=\dfrac{1}{x}(\sin x-x\cos x+c)$;

(4) $y=x\ln|\ln x|+cx$.

2. (1) $y=1/(ce^{-x}-x^3+2x-2)$;

(2) $y=(ce^{x}-x-2)^{\frac{1}{3}}$;

(3) $y=\dfrac{1}{9}x^3+c_1\ln|x|+c_2$;

(4) $y=-\ln|\cos(x+c_1)|+c_2$.

3. (1) $y=\sin x-\cos x$;

(2) $y=\dfrac{1}{2}e^{-2x}-2e^{-x}+\dfrac{5}{2}$.

4. ≈ 3.9(kg).

5. $\approx 0.06\%$.

6. $v=\dfrac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)$, $x=\dfrac{mg}{k}\left[t-\dfrac{m}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)\right]$.

7. $i(t)=\dfrac{\omega LE_0}{R^2+\omega^2L^2}e^{-\frac{R}{L}t}+\dfrac{E_0}{R^2\omega^2L^2}(R\sin\omega t-\omega L\cos\omega t)$,

或 $i(t)=\dfrac{\omega LE_0}{R^2+\omega^2L^2}e^{-\frac{R}{L}t}+\dfrac{E_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin(\omega t-\varphi)$,

其中 $\varphi=\mathrm{arctg}\dfrac{\omega L}{R}$.

8. $y = y_0 e^{at - \frac{1}{2}bct^2}$, $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 0$.

习 题 5-4

1. (1) $y = c_1e^{-3x} + c_2e^{-5x}$;

   (2) $y = c_1e^{2x} + c_2e^{3x}$;

   (3) $y = (c_1x + c_2)e^{3x}$;

   (4) $x = \frac{1}{9}t - \frac{1}{6}t^2 + c_1e^{-3t} + c_2$;

   (5) $y = -\frac{1}{3}x^3 + c_1x + c_2$;

   (6) $y = c_1e^{-x} - \frac{1}{4}x + c_2$;

   (7) $x = c_1\cos 3t + c_2\sin 3t$;

   (8) $y = c_1e^{x} + c_2e^{-x}$;

   (9) $y = e^{-2x}(c_1\cos x + c_2\sin x)$;

   (10) $y = (c_1 + c_2x)e^{-2x} + 1$.

2. (1) $y = -\frac{1}{5}e^{3x} - \frac{4}{5}e^{-2x}$;

   (2) $y = 2\cos\sqrt{3}x + 3\sin\sqrt{3}x$;

   (3) $y = (6x + 2)e^{-\frac{x}{2}}$;

   (4) $x = \frac{v_0}{\sqrt{k^2 - b^2}}e^{-bt}\sin(\sqrt{k^2 - b^2}t)$.

3. $x = 4\cos 4t\,(\text{cm})$.

习 题 5-5

2. (1) $F(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{3}{s^2} + \frac{2}{s}$;

   (2) $F(s) = \frac{Ak}{s(s+k)}$;

   (3) $F(s) = \frac{10 + 3s}{s^2 + 4}$;

   (4) $F(s) = \frac{A}{(s + k_1)(s + k_2)}$.

3. (1) $f(t) = \frac{1}{2}t^2$;

   (2) $f(t) = \frac{3}{2}\sin 2t$;

(3) $f(t)=\frac{1}{2}(1-e^{-2t})$;

(4) $f(t)=\frac{3}{5}e^{2t}+\frac{2}{5}e^{-3t}$.

4. (1) $y=e^{2t}-e^{-t}$;

(2) $y=1+\frac{1}{4}t-\frac{1}{8}\sin 2t$;

(3) $y=te^{t}\sin t$;

(4) $x_a=FDe^{-kt}$, $x=kFDte^{-kt}$.

习 题 5-6

1. $t_{1/2}=\frac{\ln 2}{k}\approx\frac{0.693}{k}$.

3. $C_n(t)=C_0\left(\frac{1-e^{-nk\tau}}{1-e^{-k\tau}}\right)e^{-kt}$, $(C_\infty)_{\max}=\frac{C_0}{1-e^{-k\tau}}$,

$(C_\infty)_{\min}=\frac{C_0e^{-k\tau}}{1-e^{-k\tau}}$.

4. $y=\frac{a}{a+b}[1-e^{-(a+b)t}]$.

5. $A=A_0e^{-k_1t}$, $B=\frac{k_1A_0}{k_2-k_1}(e^{-k_1t}-e^{-k_2t})$,

$C=A_0\left[\frac{1}{k_2-k_1}(k_1e^{-k_2t}-k_2e^{-k_1t})+1\right]$.

第 六 章

习 题 6-1

1. 到 x 轴、y 轴和 z 轴的距离分别为 $\sqrt{41}$, $2\sqrt{13}$, $\sqrt{61}$。

2. $(0,1,-2)$.

3. (1) $xy\geqslant 0$; (2) $x-y+1\geqslant 0$; (3) $y^2-4x+8>0$; (4) $r^2\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$.

4. 1 和 $\frac{3}{\sqrt{5}}$.

5. $(xy)^{x+y}$.

6. $t^2f(x,y)$.

7. (a,b,c).

8. $y^2-x^2=1$.

习 题 6-2

1. (1) $z'_x=3x^2y-y^3, z'_y=x^3-3y^2x$;

(2) $z'_x=\dfrac{y}{2\sqrt{xy}}, z'_y=\dfrac{x}{2\sqrt{xy}}$;

(3) $z'_x=y(\cos xy-\sin 2xy), z'_y=x(\cos xy-\sin 2xy)$;

(4) $z'_x=-yx^{-y-1}, z'_y=-x^{-y}\ln x$.

2. (1) $z'_x\Big|_{\substack{x=2\\y=1}}=\dfrac{1}{9}$, $z'_y\Big|_{\substack{x=2\\y=1}}=-\dfrac{2}{9}$;

(2) $f'_x(2,1)=e, f'_y(2,1)=2e$.

3. (1) $z''_{xx}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, z''_{yy}=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$,

$$z''_{xy}=z''_{yx}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2};$$

(2) $z''_{xx}=y^2e^{xy}+ye^x, z''_{yy}=x^2e^{xy}+xe^y$,

$z''_{xy}=z''_{yx}=e^{xy}(1+xy)+e^x+e^y$.

7. (1) $dz=[6x^2(x^3-2y)+y]dx+[x-4(x^3-2y)]dy$;

(2) $$dz=\frac{1}{(y^2+\sin xy)^2}\Big\{[2x(y^2+\sin xy)-x^2y(\cos xy)]dx-[x^2(2y+x\cos xy)]dy\Big\};$$

(3) $du=2\cos(x^2+y^2+z^2)(xdx+ydy+zdz)$.

8. -94.2cm^3.

9. 面积 2127.82m^2,绝对误差 27.55m^2,相对误差 1.29%。

习 题 6-3

1. $\dfrac{\partial z}{\partial u}=3u^2(\cos v-\sin v)\cos v\cdot\sin v$,

$\dfrac{\partial z}{\partial v}=u^3(\sin^3v+\cos^3v-2\sin^3v\cdot\cos v-2\sin^2v\cdot\cos^2v)$.

2. $e^{\sin t-2t^3}(\cos t-6t^2)$.

3. $\dfrac{1}{1+x^2e^{2x}}e^x(1+x)$.

4. $y'=\dfrac{y^2}{1-xy}$.

5. $z'_x=y^2e^{-x}-z, z'_y=(2xy-\cos y)e^{-x}$.

习 题 6-4

1. 极小值 0.

2. 极大值 8.

3. $x=\frac{2}{3}a, t=2$.

4. $x=y=z=4$.

5. 长和宽分别为 6m，深 3m.

6. 腰长 8cm，倾角 60°.

7. 极大值$\frac{1}{4}$.

8. 极小值$\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.

习 题 6-5

1. $y=2.058x-5.695$.

2. $y=0.000937x+0.0105$.

3. $p=0.0063T^{2.02}$.

4. $c=5.892e^{-0.046x}$.

5. $q=e^{-D/4.34}$.

习 题 6-6

1. (1) e^{-1}； (2) $4\frac{4}{15}$； (3) $\pi^2-4\frac{4}{9}$.

2. (1) $\int_0^1 dx\int_x^1 f(x,y)dy$；

(2) $\int_0^2 dy\int_{\frac{y}{2}}^{y} f(x,y)dx+\int_2^4 dy\int_{\frac{y}{2}}^{2} f(x,y)dx$；

(3) $\int_{-\frac{1}{4}}^{0} dy\int_{-\sqrt{4y+1}}^{\sqrt{4y+1}} f(x,y)dx+\int_0^6 dy\int_{-\sqrt{4y+1}}^{1-y} f(x,y)dx$.

3. $10\frac{2}{3}$.

第 七 章

习 题 7-1

1. (1) $A\subset B$； (2) $B\subset A$；

(3) $AB=\varnothing$； (4) $AC\subset B\subset A$；

(5) $AB=\varnothing, \overline{A}C=\varnothing$； (6) $BC\subset A$，$A\overline{C}=\varnothing$.

2. $A_1A_2\cdots\overline{A}_i$ $i=1,2,3,4,5$.

3. (1) 第 i 次摸到黑球； (2) $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$； (3) $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$

(4) 互不相容。

4. $A_1\bar{A}_2\bar{A}_3\bar{A}_4A_5+\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3\bar{A}_4A_5+\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3\bar{A}_4A_5+\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3A_4A_5$。

5. (1) 20 件；(2) 30 件；(3) 15 件；(4) 25 件。

6. (1) $A\cup B\cup C\cup D$；

(2) $AB\bar{C}\bar{D}\cup AC\bar{B}\bar{D}\cup AD\bar{B}\bar{C}\cup BC\bar{A}\bar{D}\cup CD\bar{A}\bar{B}\cup BD\bar{A}\bar{C}$；

(3) $AB\bar{C}\bar{D}$； (4) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$；

(5) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}\cup A\bar{B}\bar{C}\bar{D}\cup\bar{A}B\bar{C}\bar{D}\cup\bar{A}\bar{B}C\bar{D}\cup\bar{A}\bar{B}\bar{C}D$。

习 题 7-2

1. $p(A)=p(B)=p(C)=\dfrac{1}{27}$，

$p(D)=\dfrac{1}{9}$，$p(E)=\dfrac{2}{9}$ $p(F)=\dfrac{8}{9}$，

$p(G)=p(H)=p(I)=\dfrac{8}{27}$，

$p(J)=\dfrac{1}{27}$，$p(K)=\dfrac{5}{9}$，$p(L)=\dfrac{2}{27}$。

2. $\dfrac{c_{35}^1\cdot c_5^1+c_5^2}{c_{40}^2}$ 或 $1-\dfrac{c_{35}^2}{c_{40}^2}$。

3. $\dfrac{c_6^1(c_{10}^2-5)}{c_{12}^4}=\dfrac{16}{33}$。

4. $\dfrac{c_N^n}{N^n}$。

5. (1) $\dfrac{c_5^1c_{95}^8}{c_{100}^9}$； (2) $\dfrac{c_{95}^9}{c_{100}^9}+\dfrac{c_5^1c_{95}^8}{c_{100}^9}$。

6. (1) $\dfrac{32}{243}$； (2) $\dfrac{80}{243}$； (3) $\dfrac{131}{243}$。

习 题 7-3

2. 0.902。

3. 96.53%。

4. 0.124。

5. 0.3623；0.4058；0.2319。

6. 0.38。

7. 0.46。

习 题 7-4

1.

X	0	1	2	3
P	0.9406	0.0588	0.0006	0

2. 0.104.

3.

X	0	1	2	3
P	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{44}$	$\frac{9}{220}$	$\frac{1}{220}$

4. $P(X=K)=c_{13}^{k}\cdot c_{39}^{5-k}/c_{52}^{5}, k=0,1,\ 2,3,4,5.$

5. $1-\left(\frac{364}{365}\right)^{730}-c_{730}^{1}\frac{(364)^{729}}{(365)^{730}}.$

6. (1) $(1-0.01\%)^{50000}$;

(2) $c_{50000}^{5}(0.9999)^{49995}(0.0001)^{5}$.

7. (1) $\frac{1}{\pi}$; (2) $\frac{1}{3}$.

8. (1) 2; (2) 0.4.

9. (1) $\frac{1}{2}$; (2) $\frac{1}{2}(1-e^{-1})$.

10. 0.95254 和 0.81648.

11. 依次为 1.96, 1.65, 2.58; $k=1.65$.

习 题 7-5

1. 分别为 0.3 和 0.3191.

2. 分别为 0 和$\frac{1}{2}$.

3. 分别为$\frac{2}{3}$和$\frac{1}{18}$.

4. 分别为 0 和 2.

5. $E(X)=0.6, E(Y)=0.9, D(X)=1.04, D(Y)=1.09$，可见甲的技术水平较高。

第 八 章

习 题 8-1

1. (1) 8; (2) 48; (3) $(-1)^{n-1}(x)^{n-2}$.

3. (1) $x_1=1, x_2=2, x_3=1$;

(2) $x_1=\frac{1}{12}$, $x_2=-\frac{1}{6}$, $x_3=-\frac{7}{12}$, $x_4=-\frac{1}{4}$.

习 题 8-2

1. (1) $\begin{bmatrix} 5 & 8 & 11 \\ -1 & -4 & 10 \\ 2 & 13 & 5 \end{bmatrix}$; (2) $\begin{bmatrix} -2 & -9 & -16 \\ 12 & 19 & -33 \\ 5 & -40 & -2 \end{bmatrix}$;

(3) $\begin{bmatrix} -2 & 13 & 22 \\ -2 & -17 & 20 \\ 4 & 29 & -2 \end{bmatrix}$; (4) $\begin{bmatrix} 0 & 5 & 8 \\ 0 & -5 & 6 \\ -2 & 9 & 0 \end{bmatrix}$.

2. (1) $\begin{bmatrix} 35 \\ 6 \\ 49 \end{bmatrix}$; (2) $[10]$;

(3) $\begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -1 & 2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$; (4) $[a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2$

$+2a_{23}x_2x_3+2a_{13}x_1x_3]$.

3. (1) 否; (2) 否; (3) 否.

4. $\begin{cases} y_1=6t_1+t_2 \\ y_2=11t_1+t_2 \\ y_3=2t_1+t_2 \end{cases}$

习 题 8-3

1. (1) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$; (2) $\begin{bmatrix} \frac{8}{21} & -\frac{2}{21} & \frac{1}{21} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix}$.

2. (1) $\begin{bmatrix} -5 & 4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -9 & 7 & -4 \end{bmatrix}$; (2) $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

3. (1) $x_1=1, x_2=0, x_3=0$;

(2) $x_1=-10, x_2=-1, x_3=21, x_4=-35$.

习 题 8-4

1. (1) $\begin{bmatrix} \frac{7}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{3}{2} \\ -1 & -1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, (2) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -6 & -10 \end{bmatrix}$.

2. (1) $\begin{cases} y_1 = -7x_1 - 4x_2 + 9x_3 \\ y_2 = 6x_1 + 3x_2 - 7x_3 \\ y_3 = 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} y_1 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_3 \\ y_2 = \frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3 \\ y_3 = -\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 \end{cases}$

3. (1) $x_1 = 5, x_2 = 0, x_3 = 3$;

(2) $x_1 = -10, x_2 = -1, x_3 = 21, x_4 = -35$.

习 题 8-5

1. (1) $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \ p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$;

(2) $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$. $p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \ p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

2. (1) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -2$;

(2) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 9$.

附录一、微积分基本公式和积分表

一、导数和微分

1. 基本公式

$(c)' = 0,$

$(x)' = 1,$

$(x^n)' = nx^{n-1},$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2},$

$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}},$

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}},$

$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

$(e^x)' = e^x,$

$(a^x)' = a^x \ln a,$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$

$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$

$(\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{1+x^2},$

$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2},$

$(\operatorname{arcsec} x)' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}},$

$(\operatorname{arccsc} x)' = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}},$

$(\ln x)' = \frac{1}{x},$

$(\lg_a x)' = \frac{1}{x}\lg_a e = \frac{1}{x\ln a},$

$(\lg x)' = \frac{1}{x}\lg e \approx \frac{0.4343}{x},$

$(\sin x)' = \cos x,$

$(\cos x)' = -\sin x,$

$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x,$

$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x,$

$(\sec x)' = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \sec x,$

$(\csc x)' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x \csc x,$

$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x},$

$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x},$

$(\operatorname{Arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$

$(\operatorname{Arch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}},$

$(\operatorname{Arth} x)' = \frac{1}{1-x^2},$

$(\operatorname{Arcth} x)' = -\frac{1}{x^2-1},$

$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x,$

$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x.$

2. 运算法则

$(cu)' = cu',$

$(u \pm v)' = u' \pm v',$

$(uv)' = uv' + vu',$

$(uvw)' = uvw' + uwv' + vwu',$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2},$

$f'_x[\varphi(x)] = f'(u) \cdot \varphi'(x),$

$d(cu) = c\,du,$

$d(u \pm v) = du \pm dv,$

$d(uv) = u\,dv + v\,du,$

$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$

二、不定积分

1. 基本积分公式

$$\int 0 \cdot dx = C, \quad \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1),$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \quad \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C, \quad \int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C,$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C, \quad \int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C,$$

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln|\cos x| + C, \quad \int \operatorname{th} x\, dx = \ln|\operatorname{ch} x| + C,$$

$$\int \operatorname{ctg} x\, dx = \ln|\sin x| + C, \quad \int \operatorname{cth} x\, dx = \ln|\operatorname{sh} x| + C,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \quad \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C,$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} + C,$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C,$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \operatorname{Arsh}\frac{x}{a} + C = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \operatorname{Arch}\frac{x}{a} + C = \ln(x+\sqrt{x^2-a^2}) + C,$$

2．**积分运算**

$$\int [f(x)+\varphi(x)+\cdots+\psi(x)]dx$$

$$= \int f(x)\,dx + \int \varphi(x)\,dx + \cdots + \int \psi(x)\,dx,$$

$$\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx \quad (a \neq 0, a\text{是常数}),$$

$$\int uv'\,dx = uv - \int vu'\,dx,$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

3．**积分表**

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b}\ln(a+bx) + C,$

(2) $\displaystyle\int (a+bx)^n dx = \frac{(a+bx)^{n+1}}{b(n+1)} + C,\ n \neq -1,$

(3) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{a+bx} = \frac{1}{b^2}[a+bx-a\ln(a+bx)] + C,$

(4) $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{a+bx} = \frac{1}{b^3}\left[\frac{1}{2}(a+bx)^2 - 2a(a+bx) + a^2\ln(a+bx)\right] + C,$

(5) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(a+bx)} = -\frac{1}{a}\ln\frac{a+bx}{x} + C,$

(6) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(a+bx)} = -\frac{1}{ax} + \frac{b}{a^2}\ln\frac{a+bx}{x} + C,$

(7) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(a+bx)^2} = \frac{1}{b^2}\left[\ln(a+bx) + \frac{a}{a+bx}\right] + C,$

(8) $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{(a+bx)^2} = \frac{1}{b^3}\left[a+bx-2a\ln(a+bx) - \frac{a^2}{a+bx}\right] + C,$

(9) $\int \frac{dx}{x(a+bx)^2} = \frac{1}{a(a+bx)} - \frac{1}{a^2}\ln\frac{a+bx}{x} + C,$

(10) $\int \frac{xdx}{(a+bx)^3} = \frac{1}{b^2}\left[-\frac{1}{a+bx} + \frac{a}{2(a+bx)^2}\right] + C,$

(11) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C,$

(12) $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} + C,$

(13) $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{a+x}{a-x} + C,$

(14) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{x-a}{x+a} + C,$

(15) $\int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}}\operatorname{arc\,tg} x\sqrt{\frac{b}{a}} + C(a>0,b>0),$

(16) $\int \frac{dx}{a-bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{ab}}\ln\frac{\sqrt{a}+x\sqrt{b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{b}} + C,$

(17) $\int \frac{xdx}{a+bx^2} = \frac{1}{2b}\ln\left(x^2+\frac{a}{b}\right) + C,$

(18) $\int \frac{x^2dx}{a+bx^2} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b}\int\frac{dx}{a+bx^2},$

(19) $\int \frac{dx}{x(a+bx^2)} = \frac{1}{2a}\ln\frac{x^2}{a+bx^2} + C,$

(20) $\int \frac{dx}{x^2(a+bx^2)} = -\frac{1}{ax} - \frac{b}{a}\int\frac{dx}{a+bx^2},$

(21) $\int \frac{dx}{(a+bx^2)^2} = \frac{x}{2a(a+bx^2)} + \frac{1}{2a}\int\frac{dx}{a+bx^2},$

(22) $\int \sqrt{a+bx}\,dx = \frac{2}{3b}\sqrt{(a+bx)^3} + C,$

(23) $\int x\sqrt{a+bx}\,dx = -\frac{2(2a-3bx)\sqrt{(a+bx)^3}}{15b^2} + C,$

(24) $\int x^2\sqrt{a+bx}\,dx = \frac{2(8a^2-12abx+15b^2x^2)\sqrt{(a+bx)^3}}{105b^3} + C,$

(25) $\int \frac{xdx}{\sqrt{a+bx}} = -\frac{2(2a-bx)}{3b^2}\sqrt{a+bx} + C,$

(26) $\displaystyle\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a+bx}}=\frac{2(8a^2-4abx+3b^2x^2)}{15b^3}\sqrt{a+bx}+C$,

(27) $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}+C(a>0)$,

(28) $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}=\frac{2}{\sqrt{-a}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{a+bx}{-a}}+C(a<0)$,

(29) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2\sqrt{a+bx}}=\frac{-\sqrt{a+bx}}{ax}-\frac{b}{2a}\int\frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}$,

(30) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{a+bx}\,dx}{x}=2\sqrt{a+bx}+a\int\frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}$,

(31) $\displaystyle\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$

$\displaystyle+C$ 或 $\displaystyle\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\mathrm{Arsh}\frac{x}{a}+C$,

(32) $\displaystyle\int\sqrt{(x^2+a^2)^3}\,dx=\frac{x}{8}(2x^2+5a^2)\sqrt{x^2+a^2}$

$\displaystyle+\frac{3a^4}{8}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$

或 $\displaystyle\frac{x}{8}(2x^2+5a^2)\sqrt{x^2+a^2}+\frac{3a^4}{8}\mathrm{Arsh}\frac{x}{a}+C$,

(33) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+a^2}\,dx=\frac{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}{3}+C$,

(34) $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^2+a^2}\,dx=\frac{x}{8}(2x^2+a^2)\sqrt{x^2+a^2}$

$\displaystyle-\frac{a^4}{8}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$

或$\displaystyle\frac{x(2x^2+a^2)}{8}\sqrt{x^2+a^2}-\frac{a^4}{8}\mathrm{Arsh}\frac{x}{a}+C$,

(35) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$ 或 $\displaystyle\mathrm{Arsh}\frac{x}{a}+C$,

(36) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}=\frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}+C$,

(37) $\displaystyle\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\sqrt{x^2+a^2}+C$,

(38) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}-\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$

$+C$ 或 $\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}-\frac{a^2}{2}\mathrm{Arsh}\frac{x}{a}+C,$

(39) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}=-\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}+\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$

$+C$ 或 $-\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}+\mathrm{Arsh}\frac{x}{a}+C,$

(40) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{1}{a}\ln\frac{x}{a+\sqrt{x^2+a^2}}+C,$

(41) $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}=-\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x}+C,$

(42) $\int\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+a^2}}=-\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{2a^2x^2}$

$+\frac{1}{2a^3}\ln\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}+C,$

(43) $\int\frac{\sqrt{x^2+a^2}\,dx}{x}=\sqrt{a^2+x^2}-a\ln\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}+C,$

(44) $\int\frac{\sqrt{x^2+a^2}\,dx}{x^2}=-\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}+\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$

$+C$ 或 $\frac{-\sqrt{a^2+x^2}}{x}+\mathrm{Arsh}\frac{x}{a}+C,$

(45) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C,$

(46) $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C,$

(47) $\int\frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}=\frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}}+C,$

(48) $\int\frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\sqrt{a^2-x^2}+C,$

(49) $\int\frac{xdx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}+C,$

(50) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C,$

(51) $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$,

(52) $\int\sqrt{(a^2-x^2)^3}\,dx$

$=\frac{x}{8}(5a^2-2x^2)\sqrt{a^2-x^2}+\frac{3a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a}+C$,

(53) $\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx=-\frac{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}{3}+C$,

(54) $\int x\sqrt{(a^2-x^2)^3}\,dx=-\frac{\sqrt{(a^2-x^2)^5}}{5}+C$,

(55) $\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a}+C$,

(56) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}-\arcsin\frac{x}{a}+C$,

(57) $\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{a}\ln\frac{x}{a+\sqrt{a^2-x^2}}+C$,

(58) $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x}+C$,

(59) $\int\frac{dx}{x^3\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{2a^2x^2}+\frac{1}{2a^3}\ln\frac{x}{a+\sqrt{a^2-x^2}}+C$,

(60) $\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}dx=\sqrt{a^2-x^2}-a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}+C$,

(61) $\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}dx=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}-\arcsin\frac{x}{a}+C$,

(62) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C$ 或 $\mathrm{Arch}\frac{x}{a}+C$,

(63) $\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}=-\frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}}+C$,

(64) $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\sqrt{x^2-a^2}+C$,

(65) $\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})$

$+C$ 或 $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\mathrm{Arch}\frac{x}{a}+C$,

(66) $\int\sqrt{(x^2-a^2)^3}\,dx=\frac{x}{8}(2x^2-5a^2)\sqrt{x^2-a^2}$

$$+\frac{3a^4}{8}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C$$

或 $\frac{x}{8}(2x^2-5a^2)\sqrt{x^2-a^2}+\frac{3a^4}{8}\mathrm{Ar\,ch}\frac{x}{a}+C$,

(67) $\int x\sqrt{x^2-a^2}\,dx=\frac{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}{3}+C$,

(68) $\int x\sqrt{(x^2-a^2)^3}\,dx=\frac{\sqrt{(x^4-a^2)^5}}{5}+C$,

(69) $\int x^2\sqrt{x^2-a^2}\,dx$

$$=\frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^4}{8}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})$$

$+C$ 或 $\frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^4}{8}\mathrm{Ar\,ch}\frac{x}{a}+C$,

(70) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^4}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})$

$+C$ 或 $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}+\frac{a^2}{2}\mathrm{Ar\,ch}\frac{x}{a}+C$,

(71) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}=-\frac{x}{\sqrt{x^2-a^4}}+\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})$

$+C$ 或 $-\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}+\mathrm{Ar\,ch}\frac{x}{a}+C$,

(72) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\mathrm{arc\,sec}\,x+C$,

(73) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{1}{a}\mathrm{arc\,sec}\frac{x}{a}+C$,

(74) $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2x}+C$,

(75) $\int\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{2a^2x^2}+\frac{1}{2a^3}\mathrm{arc\,sec}\frac{x}{a}+C$,

(76) $\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}\,dx}{x}=\sqrt{x^2-a^2}-a\,\mathrm{arc\,cos}\frac{a}{x}+C$,

(77) $\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}\,dx}{x^2}=-\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}+\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})$

$+C$ 或 $\frac{-\sqrt{x^2-a^2}}{x}+\mathrm{Ar\,ch}\frac{x}{a}+C$,

(78) $\displaystyle\int\frac{dx}{a+bx+cx^2}$

$$=\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2cx+b}{\sqrt{4ac-b^2}}+C & (b^2<4ac),\\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\ln\dfrac{2cx+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2cx+b+\sqrt{b^2-4ac}}+C & (b^2>4ac),\end{cases}$$

(79) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$

$$=\frac{1}{\sqrt{c}}\ln(2cx+b+2\sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2})+C,$$

(80) $\displaystyle\int\sqrt{a+bx+cx^2}\,dx=\frac{2cx+b}{4c}\sqrt{a+bx+cx^2}$

$$-\frac{b^2-4ac}{8\sqrt{c^3}}\ln(2cx+b+2\sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2})+C,$$

(81) $\displaystyle\int\frac{xdx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=\frac{\sqrt{a+bx+cx^2}}{c}-\frac{b}{2\sqrt{c^3}}\ln(2cx$

$$+b+2\sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2})+C,$$

(82) $\displaystyle\int\frac{dx}{a+bx-cx^2}=\frac{2}{\sqrt{b^2+4ac}}\ln\frac{\sqrt{b^2+4ac}+2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}-2cx+b}+C,$

(83) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}}=\frac{1}{\sqrt{c}}\arcsin\frac{2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}}+C,$

(84) $\displaystyle\int\sqrt{a+bx-cx^2}\,dx=\frac{2cx-b}{4c}\sqrt{a+bx-cx^2}$

$$+\frac{b^2+4ac}{8\sqrt{c^3}}\arcsin\frac{2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}}+C,$$

(85) $\displaystyle\int\frac{xdx}{\sqrt{a+bx-cx^2}}$

$$=-\frac{\sqrt{a+bx-cx^2}}{c}+\frac{b}{2\sqrt{c^3}}\arcsin\frac{2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}}+C,$$

(86) $\displaystyle\int\sqrt{\frac{a+x}{b+x}}\,dx=\sqrt{(a+x)(b+x)}$

$$+(a-b)\ln(\sqrt{a+x}+\sqrt{b+x})+C,$$

(87) $\displaystyle\int\sqrt{\frac{a-x}{b+x}}\,dx$

$$=\sqrt{(a-x)(b+x)}+(a+b)\arcsin\sqrt{\frac{x+b}{a+b}}+C,$$

(88) $\int\sqrt{\dfrac{a+x}{b-x}}dx$

$$= -\sqrt{(a+x)(b-x)} - (a+b)\arcsin\sqrt{\frac{b-x}{a+b}} + C,$$

(89) $\int\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}dx = -\sqrt{1-x^2} + \arcsin x + C,$

(90) $\int\dfrac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = 2\arcsin\sqrt{\dfrac{x-a}{b-a}} + C,$

(91) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C,$ (92) $\int e^x dx = e^x + C,$

(93) $\int e^{ax} dx = \dfrac{e^{ax}}{a} + C,$ (94) $\int \sin x\, dx = -\cos x + C,$

(95) $\int \cos x\, dx = \sin x + C,$ (96) $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln\cos x + C,$

(97) $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln\sin x + C,$

(98) $\int \sec x dx = \ln(\sec x + \operatorname{tg} x) + C = \ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right) + C,$

(99) $\int \csc x dx = \ln(\csc x - \operatorname{ctg} x) + C = \ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} + C,$

(100) $\int \sec^2 x d x = \operatorname{tg} x + C,$

(101) $\int \csc^2 x dx = -\operatorname{ctg} x + C,$

(102) $\int \sec x \operatorname{tg} x\, dx = \sec x + C,$

(103) $\int \csc x \operatorname{ctg} x\, dx = -\csc x + C,$

(104) $\int \sin^2 x\, dx = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4}\sin 2x + C,$

(105) $\int \cos^2 x\, dx = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4}\sin 2x + C,$

(106) $\int \sin^n x\, dx = -\dfrac{\sin^{n-1}x\cos x}{n} + \dfrac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}x dx,$

(107) $\int \cos^n x d x = \dfrac{\cos^{n-1}x\sin x}{n} + \dfrac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x\, dx,$

(108) $$\int\frac{dx}{\sin^n x}=-\frac{1}{n-1}\,\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}\int\frac{dx}{\sin^{n-2}x},$$

(109) $$\int\frac{dx}{\cos^n x}=\frac{1}{n-1}\,\frac{\sin x}{\cos^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}\int\frac{dx}{\cos^{n-2}x},$$

(110) $$\int\sin x\cos^n x\,dx=\frac{-\cos^{n+1}x}{n+1}+C,$$

(111) $$\int\sin^n x\cos x\,dx=\frac{\sin^{n+1}x}{n+1}+C,$$

(112) $$\int\cos^m x\sin^n x\,dx$$
$$=\frac{\cos^{m-1}x\sin^{n+1}x}{m+n}+\frac{m-1}{m+n}\int\cos^{m-2}x\sin^n x\,dx,$$

(113) $$\int\cos^m x\sin^n x\,dx$$
$$=-\frac{\sin^{n-1}x\cos^{m+1}x}{m+n}+\frac{n-1}{m+n}\int\cos^m x\sin^{n-2}x\,dx,$$

$$\left.\begin{array}{ll}
(114) & \displaystyle\int\sin mx\sin nx\,dx=-\frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)}+\frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)}+C,\\[2ex]
(115) & \displaystyle\int\cos mx\cos nx\,dx=\frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)}+\frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)}+C,\\[2ex]
(116) & \displaystyle\int\sin mx\cos nx\,dx=-\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)}-\frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)}+C,
\end{array}\right\}(m\neq n)$$

(117) $$\int\frac{dx}{a+b\cos x}=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C\ (a>b),$$

(118) $$\int\frac{dx}{a+b\cos x}=\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\frac{\sqrt{b-a}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\sqrt{b+a}}{\sqrt{a-b}\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\sqrt{b+a}}+C\ (a<b),$$

(119) $$\int\frac{dx}{a+b\sin x}=-\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{a\operatorname{tg}\frac{x}{2}+b}{\sqrt{a^2-b^2}}+C\ (a>b),$$

(120) $$\int\frac{dx}{a+b\sin x}=\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\frac{a\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}+b-\sqrt{b^2-a^2}}{a\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}+b+\sqrt{b^2-a^2}}+C\quad(a<b),$$

(121) $$\int\frac{dx}{a^2\cos^2x+b^2\sin^2x}=\frac{1}{ab}\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{b\,\mathrm{tg}\,x}{a}\right)+C,$$

(122) $$\int\frac{dx}{a^2\cos^2x-b^2\sin^2x}=\frac{1}{2ab}\ln\frac{b\,\mathrm{tg}x+a}{b\,\mathrm{tg}x-a}+C,$$

(123) $$\int e^x\sin x\,dx=\frac{e^x(\sin x-\cos x)}{2}+C,$$

(124) $$\int e^{ax}\sin nx\,dx=\frac{e^{ax}(a\sin nx-n\cos nx)}{a^2+n^2}+C,$$

(125) $$\int e^x\cos x\,dx=\frac{e^x(\sin x+\cos x)}{2}+C,$$

(126) $$\int e^{ax}\cos nx\,dx=\frac{e^{ax}(n\sin nx+a\cos nx)}{a^2+n^2}+C,$$

(127) $$\int xe^{ax}dx=\frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1)+C,$$

(128) $$\int x^ne^{ax}dx=\frac{x^ne^{ax}}{a}-\frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}dx,$$

(129) $$\int xa^{mx}dx=\frac{xa^{mx}}{m\ln a}-\frac{a^{mx}}{(m\ln a)^2}+C,$$

(130) $$\int x^na^{mx}\,dx=\frac{a^{mx}x^n}{m\ln a}-\frac{n}{m\ln a}\int a^{mx}x^{n-1}dx,$$

(131) $$\int e^{ax}\cos^nx\,dx=\frac{e^{ax}\cos^{n-1}x(a\cos x+n\sin x)}{a^2+n^2}+\frac{n(n-1)}{a^2+n^2}\int e^{ax}\cos^{n-2}x\,dx,$$

(132) $$\int \mathrm{sh}\,x\,dx=\mathrm{ch}\,x+C,$$

(133) $$\int \mathrm{ch}\,x\,dx=\mathrm{sh}\,x+C,$$

(134) $$\int \mathrm{th}\,x\,dx=\ln\mathrm{ch}\,x+C,$$

(135) $$\int \mathrm{cth}\,x\,dx=\ln\mathrm{sh}\,x+C,$$

(136) $\int \operatorname{sch} x\, dx = 2 \operatorname{arc\,tg} e^{x} + C,$

(137) $\int \operatorname{csch} x\, dx = \ln \operatorname{th} \frac{x}{2} + C,$

(138) $\int \operatorname{sch}^{2} x\, dx = \operatorname{th} x + C,$

(139) $\int \operatorname{csch}^{2} x\, dx = -\operatorname{cth} x + C,$

(140) $\int \operatorname{sch} x \operatorname{th} x\, dx = -\operatorname{sch} x + C,$

(141) $\int \operatorname{csch} x \operatorname{cth} x\, dx = -\operatorname{csch} x + C,$

(142) $\int \operatorname{sh}^{2} x\, dx = -\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2x + C,$

(143) $\int \operatorname{ch}^{2} x\, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2x + C,$

(144) $\int \ln x\, dx = x \ln x - x + C,$

(145) $\int \frac{dx}{x \ln x} = \ln(\ln x) + C,$

(146) $\int x^{n} \ln x\, dx = x^{n+1} \left[\frac{\ln x}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^{2}} \right] + C,$

(147) $\int \ln^{n} x\, dx = x \ln^{n} x - n \int \ln^{n-1} x\, dx,$

(148) $\int x^{m} \ln^{n} x\, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \ln^{n} x - \frac{n}{m+1} \int x^{m} \ln^{n-1} x\, dx,$

(149) $\int \operatorname{arc\,sin} \frac{x}{a}\, dx = x \operatorname{arc\,sin} \frac{x}{a} + \sqrt{a^{2} - x^{2}} + C,$

(150) $\int x \operatorname{arc\,sin} \frac{x}{a}\, dx = \left(\frac{x^{2}}{2} - \frac{a^{2}}{4} \right) \operatorname{arc\,sin} \frac{x}{a} + \frac{x}{4} \sqrt{a^{2} - x^{2}} + C,$

(151) $\int x^{2} \operatorname{arc\,sin} \frac{x}{a}\, dx$

$$= \frac{x^{3}}{3} \operatorname{arc\,sin} \frac{x}{a} + \frac{1}{9} (x^{2} + 2a^{2}) \sqrt{a^{2} - x^{2}} + C,$$

(152) $\int \frac{\arcsin\frac{x}{a}dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\arcsin\frac{x}{a} - \frac{1}{a}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x} + C,$

(153) $\int \arccos\frac{x}{a}dx = x\arccos\frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2} + C,$

(154) $\int x\arccos\frac{x}{a}dx = \left(\frac{x^2}{2}-\frac{a^2}{4}\right)\arccos\frac{x}{a} - \frac{x}{4}\sqrt{a^2-x^2} + C,$

(155) $\int x^2\arccos\frac{x}{a}dx$

$$= \frac{x^3}{3}\arccos\frac{x}{a} - \frac{1}{9}(x^2+2a^2)\sqrt{a^2-x^2} + C,$$

(156) $\int \frac{\arccos\frac{x}{a}dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\arccos\frac{x}{a} + \frac{1}{a}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x} + C,$

(157) $\int \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}dx = x\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} - \frac{a}{2}\ln(a^2+x^2) + C,$

(158) $\int x\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}dx = \frac{1}{2}(x^2+a^2)\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} - a\frac{x}{2} + C,$

(159) $\int x^2\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}dx = \frac{x^3}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} - \frac{ax^2}{6} + \frac{a^3}{6}\ln(a^2+x^2) + C,$

(160) $\int x^n\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} - \frac{a}{n+1}\int\frac{x^{n+1}dx}{a^2+x^2} \quad (n \neq -1),$

(161) $\int \frac{\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} - \frac{1}{2a}\ln\frac{a^2+x^2}{x^2} + C,$

(162) $\int \frac{\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}dx}{x^n} = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}$

$$+ \frac{a}{n-1}\int\frac{dx}{x^{n-1}(a^2+x^2)} \quad (n \neq 1),$$

(163) $\int \operatorname{arc\,ctg}\frac{x}{a}dx = x\operatorname{arc\,ctg}\frac{x}{a} + \frac{a}{2}\ln(a^2+x^2) + C,$

(164) $\int x\operatorname{arc\,ctg}\frac{x}{a}dx = \frac{1}{2}(x^2+a^2)\operatorname{arc\,ctg}\frac{x}{a} + \frac{ax}{2} + C,$

(165) $\int x^2\operatorname{arc\,ctg}\frac{x}{a}dx$

$$= \frac{x^3}{3}\operatorname{arc\,ctg}\frac{x}{a} + \frac{ax^2}{6} - \frac{a^3}{6}\ln(a^2+x^2) + C,$$

(166) $\int x^n \operatorname{arc\,ctg}\frac{x}{a}dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\operatorname{arc\,ctg}\frac{x}{a} + \frac{a}{n+1}\int\frac{x^{n+1}dx}{a^2+x^2}\quad (n \neq -1)$,

(167) $\int\frac{\operatorname{arc\,ctg}\frac{x}{a}dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\operatorname{arc\,ctg}\frac{x}{a} + \frac{1}{2a}\ln\frac{a^2+x^2}{x^2} + C$,

(168) $\int\frac{\operatorname{arc\,ctg}\frac{x}{a}dx}{x^n}$

$$= -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}\operatorname{arc\,ctg}\frac{x}{a} - \frac{a}{n-1}\int\frac{dx}{x^{n-1}(a^2+x^2)}\quad (n \neq 1),$$

(169) $\int \operatorname{Ar\,sh}\frac{x}{a}dx = x\operatorname{Ar\,sh}\frac{x}{a} - \sqrt{x^2+a^2} + C$,

(170) $\int \operatorname{Ar\,ch}\frac{x}{a}dx = x\operatorname{Ar\,ch}\frac{x}{a} - \sqrt{x^2-a^2} + C$,

(171) $\int \operatorname{Ar\,th}\frac{x}{a}dx = x\operatorname{Ar\,th}\frac{x}{2} + \frac{a}{2}\ln(a^2-x^2) + C$,

(172) $\int \operatorname{Ar\,cth}\frac{x}{a}dx = x\operatorname{Ar\,cth}\frac{x}{a} + \frac{a}{2}\ln(x^2-a^2) + C$.

附录二、拉普拉斯变换简表

	$f(t)$	$F(s)$
1	1	$\frac{1}{s}$
2	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
3	t^m(m 为自然数)	$\frac{m!}{s^{m+1}}$
4	$t^m e^{at}$(m 为自然数)	$\frac{m!}{(s-a)^{m+1}}$
5	$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
6	$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
7	$\mathrm{sh}\,at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
8	$\mathrm{ch}\,at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
9	$t\sin at$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$
10	$t\cos at$	$\frac{s^2-a^2}{(s+a^2)^2}$
11	$e^{-bt}\sin at$	$\frac{a}{(s+b)^2+a^2}$
12	$e^{-bt}\cos at$	$\frac{s+b}{(s+b)^2+a^2}$
13	$e^{-bt}\sin(at+c)$	$\frac{(s+b)\sin c+a\cos c}{(s+b)^2+a^2}$
14	$\sin^2 t$	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+4}\right)$
15	$\cos^2 t$	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+4}\right)$
16	$\sin at\sin bt$	$\frac{2abs}{[s^2+(a+b)^2][s^2+(a-b)^2]}$
17	$e^{at}-e^{bt}$	$\frac{a-b}{(s-a)(s-b)}$

	$f(t)$	$F(s)$
18	$ae^{at}-be^{bt}$	$\dfrac{(a-b)s}{(s-a)(s-b)}$
19	$\dfrac{1}{a}\sin at-\dfrac{1}{b}\sin bt$	$\dfrac{b^2-a^2}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$
20	$\cos at-\cos bt$	$\dfrac{(b^2-a^2)s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$
21	$\dfrac{1}{a^2}(1-\cos at)$	$\dfrac{1}{s(s^2+a^2)}$
22	$\dfrac{1}{a^3}(at-\sin at)$	$\dfrac{1}{s^2(s^2+a^2)}$
23	$\dfrac{1}{a^4}(\cos at-1)+\dfrac{1}{2a^2}t^2$	$\dfrac{1}{s^3(s^2+a^2)}$
24	$\dfrac{1}{a^4}(\operatorname{ch}at-1)-\dfrac{1}{2a^2}t^2$	$\dfrac{1}{s^3(s^2-a^2)}$
25	$\dfrac{1}{2a^3}(\sin at-at\cos at)$	$\dfrac{1}{(s^2+a^2)^2}$
26	$\dfrac{t}{2a}\sin at$	$\dfrac{s}{(s^2+a^2)^2}$
27	$\dfrac{1}{2a}(\sin at+at\cos at)$	$\dfrac{s^2}{(s^2+a^2)^2}$
28	$\dfrac{1}{a^4}(1-\cos at)-\dfrac{1}{2a^3}t\sin at$	$\dfrac{1}{s(s^2+a^2)^2}$
29	$(1-at)e^{-at}$	$\dfrac{s}{(s+a)^2}$
30	$t\left(1-\dfrac{a}{2}t\right)e^{at}$	$\dfrac{s}{(s+a)^3}$
31	$\dfrac{1}{a}(1-e^{-at})$	$\dfrac{1}{s(s+a)}$
32	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{s}}$
33	$2\sqrt{\dfrac{t}{\pi}}$	$\dfrac{1}{s\sqrt{s}}$
34	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{bt}(1+2at)$	$\dfrac{s}{(s-a)\sqrt{s-a}}$
35	$\dfrac{1}{2\sqrt{\pi t^3}}(e^{bt}-e^{at})$	$\sqrt{s-a}-\sqrt{s-b}$

附录三、标准正态分布函数数值表

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76425	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84850	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92786	0.92922	0.93056	0.93189

（续表）

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.96254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900

教学参考书

[1] 同济大学数学教研室主编，高等数学(上、下册)，人民教育出版社，1982 年.
[2] 路见可等，高等数学(上、下册)，人民教育出版社，1983 年.
[3] 周怀梧主编，医药应用高等数学，山东教育出版社，1985 年.
[4] 周怀梧主编，医药应用数理统计，山东教育出版社，1986 年.
[5] 周怀梧，数理医药学，上海科学技术出版社，1983 年.
[6] 杨纪珂等，生物数学概论，科学出版社，1982 年.
[7] 华东师范大学数学系编，概率论与数理统计教程，高等教育出版社，1983 年.
[8] 周怀梧主编，医用生物数学，人民卫生出版社，1990 年.
[9] 上海交通大学数学教研室，工程数学——线性代数，人民教育出版社，1979 年.